

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA COMPARAISON DE CERTAINS PROCÉDÉS DE
SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

Autor: Bouligand, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21245>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA COMPARAISON DE CERTAINS PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

PAR

Georges BOULIGAND (Poitiers).

1. — Soit la série à termes constants

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu} .$$

Posons comme d'habitude

$$S_n = \sum_{\nu=0}^n u_{\nu} . \quad (1)$$

Au moyen d'un tableau d'éléments constants et positifs c_{mn} , dont les lignes

$$c_{m0}, c_{m1}, \dots, c_{mn}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

forment des séries convergentes, calculons les expressions auxiliaires

$$\sigma_m = \frac{c_{m0} S_0 + c_{m1} S_1 + \dots + c_{mn} S_n + \dots}{c_{m0} + c_{m1} + \dots + c_{mn} + \dots} \quad (2)$$

et supposons que, grâce au choix de la série proposée, le numérateur de σ_m soit lui-même une série convergente. Avec M. E. BOREL, nous appellerons *somme généralisée* de Σu_{ν} , la limite pour m infini de la suite $\{\sigma_m\}$, chaque fois que cette limite existe ¹.

Le présent article se propose, dans un but principalement didactique, de comparer entre eux les résultats auxquels peuvent conduire les procédés de sommation de l'espèce précédente.

¹ *Leçons sur les Séries divergentes*, première édition, page 93.

2. — La question essentielle consiste naturellement à chercher dans quelle mesure différents procédés de cette catégorie sont susceptibles de concorder. Un procédé quel qu'il soit ne sera admis comme *procédé régulier* (suivant la terminologie devenue classique) que s'il satisfait à la *condition de consistance* de M. G. HARDY, appelée encore *condition de permanence* par M. K. KNOPP. Cette condition, qui sert de définition à la régularité est que l'existence d'une limite pour les S_n entraîne celle d'une limite pour les σ_m , avec égalité de ces deux limites.

M. J. SCHUR a donné un théorème général sur les conditions de régularité¹ pour les transformations linéaires infinies de la forme

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} S_n. \quad (3)$$

Mais ici, les a_{mn} sont soumis, de par ce qui précède, à des restrictions qui simplifient la discussion. La condition nécessaire et suffisante de régularité est ainsi, que l'on ait, quel que soit n :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn} = 0 \quad \left(\text{où } a_{mn} = \frac{c_{mn}}{c_{m0} + c_{m1} + \dots} \right) \quad (4)$$

Elle est bien nécessaire: en effet, prenons une suite S_n ayant tous ses termes nuls, sauf le $(n + 1)$ ième, qui égalera l'unité: elle a pour limite zéro, donc la suite σ_m doit posséder la même propriété. Mais on a alors $\sigma_m = a_{mn}$, ce qui justifie la condition (4).

Elle est suffisante lorsque les S_n tendent vers zéro, car ε étant donné, on peut trouver m_1 tel que l'inégalité $m > m_1$ entraîne $|\sigma_m| < \varepsilon$: pour le voir, on séparera dans σ_m l'ensemble des p premiers termes; on peut prendre p assez grand pour que la somme des termes restants soit en valeur absolue $< \frac{\varepsilon}{2}$ (puisque les S_n tendent vers zéro et que la somme des coefficients est égale à l'unité); p étant ainsi choisi, on peut prendre m assez grand pour que la somme des p premiers termes soit elle-même moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ (cela, en vertu de l'hypothèse). Le cas où les S_n tendent

¹ *Journal de Crelle*, t. 151, p. 79 et suivantes.

vers zéro étant ainsi élucidé, on passe facilement à celui où les S_n tendent vers une limite quelconque à la faveur du cas (immédiatement résolu) où tous les S_n sont égaux.

3. — Rappelons quelques applications classiques de ce théorème. Supposons que le tableau des c_{mn} soit de la forme

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right. \quad (5)$$

pour laquelle il est entièrement déterminé par la donnée d'une suite à un seul indice, celle qui est écrite dans la première colonne du tableau (5). La condition de régularité sera alors que l'on ait, pour chaque valeur fixe de n

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{m-n}}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m} = 0 \quad (5')$$

ou plus simplement que l'on ait l'unique condition

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_m}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m} = 0. \quad (5'')$$

Cette forme du tableau des c_{mn} est justement celle qui se présente dans la méthode de Cesàro, lorsqu'on définit la famille des procédés de sommation (C, k) à un paramètre k .

On a alors

$$\gamma_n = \binom{k+n-1}{n} = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1)}$$

la série des γ_n est divergente et son terme général grandit indéfiniment, asymptotiquement à

$$\frac{n^{k-1}}{\Gamma(k)};$$

on en déduit aisément que la condition (5'') est bien vérifiée ¹.

¹ Cette condition serait encore vérifiée si la série des γ_n était convergente.

Un autre cas où le tableau des c_{mn} se déduit d'une suite unique est celui où il est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right. \quad (6)$$

La condition de régularité consiste alors *dans la divergence de la série $\Sigma \gamma_n$* . Nous distinguerons en abrégé ce cas par cette appellation: *sommation par les séries divergentes*.

Enfin, un cas très important où le tableau des c_{mn} se déduit encore d'une suite unique, par une loi très simple, est le suivant, imaginé par M. Borel. On a un tableau tel que

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & \dots \\ \gamma_0 & 2\gamma_1 & 2^2\gamma_2 & \dots & 2^n\gamma_n & \dots \\ \gamma_0 & 3\gamma_1 & 3^2\gamma_2 & \dots & 3^n\gamma_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_0 & m\gamma_1 & m^2\gamma_2 & \dots & m^n\gamma_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right. \quad (7)$$

On suppose, conformément à ce qui précède, que chaque ligne du tableau forme une série convergente, ou ce qui revient au même, que la fonction représentée par la série

$$\varphi(a) = \gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \dots + \gamma_n a^n + \dots$$

soit une fonction entière de la variable a . Cela posé, on voit aisément qu'en pareil cas, il y aura toujours régularité (*sommation par les fonctions entières*).

Les procédés de sommation dont il sera question ici appartiendront exclusivement à l'un des types précédents.

4. — A côté de l'idée très importante de régularité, on peut placer la notion de procédés de sommation *liés entre eux par une relation d'ordre*. Par exemple, nous avons rappelé la famille à un paramètre des procédés (C, k) de Cesàro. Calculons les valeurs $\sigma_m(k)$ et $\sigma_m(k')$ pour deux valeurs k et k' du paramètre.

L'existence d'une limite pour les $\sigma_m(k)$ entraîne, chaque fois que k' surpasse k , l'existence d'une limite égale pour les $\sigma_m(k')$. La démonstration de ce théorème, aujourd'hui classique, est donnée au tome II du Traité d'Hobson sur les fonctions de variables réelles (seconde édition). On peut l'énoncer ainsi: *si k' surpasse k , la sommabilité (C, k') dépasse en efficacité la sommabilité (C, k) .*

Le tableau (6) fournit d'une manière immédiate l'exemple de procédés de sommation entre lesquels existe une relation du type précédent¹. Cela nous ramène simplement à démontrer un théorème de M. G. Hardy, dont voici l'énoncé:

Soit

$$1 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n \quad \dots$$

une suite non croissante à termes positifs, telle que la série $\sum \varepsilon_n \gamma_n$ soit divergente. Alors l'existence d'une limite pour les moyennes

$$\sigma_m = \frac{\gamma_0 S_0 + \gamma_1 S_1 + \dots + \gamma_n S_n}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n}$$

entraîne l'existence d'une limite égale pour les moyennes

$$\tau_n = \frac{\gamma_0 S_0 + \varepsilon_1 \gamma_1 S_1 + \dots + \varepsilon_n \gamma_n S_n}{\gamma_0 + \varepsilon_1 \gamma_1 + \dots + \varepsilon_n \gamma_n}.$$

Autrement dit, *la sommation au moyen de la série divergente $\sum \gamma_n$ est dépassée en efficacité par la sommation au moyen de la série $\sum \varepsilon_n \gamma_n$ plus lentement divergente.*

En effet, au moyen de la transformation d'Abel, nous pouvons écrire

$$\tau_n = \frac{(1 - \varepsilon_1)\gamma_0\sigma_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\gamma_0 + \gamma_1)\sigma_1 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)(\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-1})\sigma_{n-1} + \varepsilon_n(\gamma_0 + \dots + \gamma_n)\sigma_n}{(1 - \varepsilon_1)\gamma_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\gamma_0 + \gamma_1) + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)(\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-1}) + \varepsilon_n(\gamma_0 + \dots + \gamma_n)}$$

l'existence d'une limite pour les τ_n (égale à celle des σ_n) s'établit alors en séparant haut et bas les p premiers termes et faisant croître p et indéfiniment, mais de manière que la somme des p

¹ Dans cet ordre d'idées, il est clair qu'un procédé de sommation régulier dépasse celui qui s'attache à la convergence, au sens ordinaire; celle-ci constitue dans l'échelle de tous les procédés possibles, une sorte de zéro absolu.

premiers termes du dénominateur soit négligeable par rapport à sa valeur totale, condition réalisable en vertu de la divergence de la série $\sum \varepsilon_n \gamma_n$. Dans ces conditions, au numérateur, les σ_i d'indices supérieurs à p tendent vers σ et le résultat devient immédiat.

5. — Voilà donc, dans un cas particulier, un résultat précis relatif à la concordance de procédés de sommation d'une certaine famille. Sa valeur s'accroît de ce que la régularité de plusieurs méthodes de sommation n'entraîne nullement leur concordance, hors du champ classique des séries convergentes. Ainsi prenons la série d'Euler

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

et supposons que la suite des γ_n ait tous ses termes de rang pair égaux à b , tous ses termes de rang impairs égaux à a ($a > 0$, $b > 0$). Alors dans la sommation par la série divergente $\sum \gamma_n$, la série d'Euler aura pour somme

$$\frac{a}{a + b}$$

Nous avons ainsi une famille de procédés réguliers dont chacun confère une somme, variable avec le procédé choisi, à la série d'Euler.

Quelques auteurs, notamment M. E. BOREL dans ses beaux travaux sur les séries divergentes et M. Paul LÉVY dans un récent mémoire¹ se sont attachés à mettre en lumière des effets de concordance, à la faveur d'hypothèses concernant le caractère régulier de la croissance ou de la décroissance des termes de la suite γ_n , hypothèses intéressantes à étudier dans chacun des trois cas précédents. Mais nous n'insisterons pas ici davantage sur cet ordre d'idées, et renverrons de préférence le lecteur aux travaux déjà cités.

6. — En matière de comparaison des procédés de sommation, s'ouvre une autre voie bien naturelle. Elle consiste à accorder une place privilégiée aux méthodes qui appliquées à la série

$$1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots$$

¹ *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 54, 1926, pages 1 et suivantes.

hors de son cercle de convergence, lui assignent, là où elles réussissent, une somme égale à

$$\frac{1}{1-u}.$$

Notons que, par essence même, il ne peut jamais arriver qu'un procédé, appartenant à l'un des types précédemment définis, réussisse en quelque point de la demi-droite $(1, +\infty)$ de l'arc réel: en effet, ces procédés sont tous réguliers, et alors le fait que, dans les conditions indiquées, les sommes S_n tendent vers $+\infty$ entraînent la même propriété pour les sommes σ_m . *A priori*, le seul domaine qu'on peut espérer atteindre ne dépassera jamais l'étoile, relative au point O, de la fonction $\frac{1}{1-u}$.

Pourquoi avons-nous considéré la série particulière Σu_n ? Précisément, en vertu du rôle de *noyau générateur* de l'intégrale de Cauchy, joué par la fonction

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-\frac{x}{z}} \right].$$

Supposons qu'un procédé sommatoire réussisse pour la série Σu^n dans une portion \mathcal{R} de son étoile relative au point O. Ecrivons par exemple qu'il en est bien ainsi pour la méthode qui consiste à former les moyennes

$$\frac{c_{m0}S_0 + c_{m1}S_1 + \dots + c_{mn}S_n + \dots}{c_{m0} + c_{m1} + \dots + c_{mn} + \dots}$$

et à prendre leur limite pour m infini. En vertu de l'identité

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u},$$

nous aurons, en chaque point de la région \mathcal{R} ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m0} + c_{m1}u + \dots + c_{mn}u^n + \dots}{c_{m0} + c_{m1} + \dots + c_{mn} + \dots} = 0. \quad (8)$$

Considérons maintenant une fonction analytique $f(x)$, holomorphe autour de $x = 0$, et issue du développement

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Déterminons l'étoile de cette fonction relativement au point O. En appelant c un contour quelconque intérieur à celle-ci, nous aurons

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z) dz}{z - x}$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(z)}{z} \left[1 + \frac{x}{z} + \dots + \frac{x^n}{z^n} \right] dz + \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{x^{n+1} f(z)}{z^{n+1} (z - x)} dz ,$$

ou encore

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{x^{n+1} f(z)}{z^{n+1} (z - x)} dz .$$

Il en résulte aisément qu'en appliquant la précédente méthode de sommation à la série $\sum a_n x^n$, nous trouverons bien la somme $f(x)$, à chaque fois que sera réalisée la condition suivante

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_c \frac{x}{z} \frac{f(z)}{z - x} \left(c_{m0} + c_{m1} \frac{x}{z} + c_{m2} \frac{x^2}{z^2} + \dots + c_{mn} \frac{x^n}{z^n} + \dots \right) dz}{c_{m0} + c_{m1} + c_{m2} + \dots + c_{mn} + \dots} = 0$$

Cela sera, pour une valeur de x et un contour c donnés, chaque fois que tous les points $\frac{x}{z}$ tomberont dans la région \mathcal{R} du plan de la variable complexe, ou encore chaque fois que le point x sera commun aux régions $z\mathcal{R}$ déduites de \mathcal{R} par les similitudes de centre O, faisant passer du point 1 à quelque point z du contour c .

Par exemple, posons

$$c_{mn} = \frac{m^n}{n!} ,$$

ce qui nous conduit à la méthode de sommation exponentielle de M. Borel. La condition (8) devient alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{mn}}{e^m} = 0 ,$$

ou encore

$$\text{partie réelle de } u < 1 .$$

La région \mathcal{R} sera donc ici un demi-plan, délimité par la perpendiculaire à la branche unique de l'étoile de $\frac{1}{1-u}$, à l'origine 1 de

cette branche. En appliquant les remarques précédentes, on en déduira donc le résultat suivant :

Toute série entière $f(x)$ est sommable par la méthode exponentielle dans la région du plan, qui relativement à l'origine, se trouve en deçà des perpendiculaires menées aux branches de l'étoile de $f(x)$ par les points singuliers d'où elles sont issues. Cette région constitue par définition le polygone de sommabilité.

7. — Nous tirons donc de la théorie des fonctions analytiques le moyen le plus naturel d'obtenir des procédés de sommation concordants. Ce n'est d'ailleurs là, à la forme près, que la répétition des idées que M. E. Borel a utilisées fréquemment, par exemple, pour la démonstration des théorèmes de Mittag-Leffler et pour les développements qu'il a présentés au Chapitre II de ses *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*.

On est alors naturellement conduit à se poser la question suivante :

Comparer entre eux les divers procédés de sommation mentionnés au début de cette note, au point de vue de leur efficacité en matière de prolongement analytique.

D'après les remarques qui précèdent, on pourra se borner à chercher ce qu'ils donnent pour la série Σu^n . Ecrivons successivement la condition (8) pour chacune des formes (5), (6), (7) du tableau des c_{mn} . Nous devons avoir dans chacun de ces cas

Cas (5)	}	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n + \gamma_{n-1}u + \dots + \gamma_0 u^n}{\gamma_n + \gamma_{n-1} + \dots + \gamma_0} = 0$
	}	<p style="text-align: center;">avec</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n} = 0$
Cas (6)	}	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 u + \dots + \gamma_n u^n}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n} = 0$
(sommation par les séries divergentes)	}	<p style="text-align: center;">avec</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n) = +\infty$
Cas (7)	}	$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 m u + \dots + \gamma_n (m u)^n + \dots}{\gamma_0 + \gamma_1 m + \dots + \gamma_n m^n + \dots} = 0$
(sommation par les fonctions entières)	}	<p style="text-align: center;">ou</p> $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varphi(mu)}{\varphi(m)} = 0$

L'étude de la condition relative au cas (7) est la plus importante: le problème qui se pose est d'essayer de choisir la fonction entière $\varphi(m)$, organe essentiel du procédé sommatoire, de manière que cette condition soit satisfaite dans toute l'étoile de la fonction $\frac{1}{1-u}$. Ce problème a été étudié en détail par M. A. BUHL dans le fascicule VII du *Mémorial des Sciences Mathématiques*. Nous renverrons donc le lecteur à l'exposé de ce savant géomètre.

8. — Mais il n'est pas sans intérêt de dire quelques mots des formes prises par la condition (8) pour les tableaux des types (5) et (6). Le fait saillant est ici l'impossibilité de sortir pratiquement du cercle de convergence par des processus de sommation dérivant de tels tableaux. Et grâce à ce contraste, les idées de M. Borel prennent toute leur valeur, la méthode de sommation par les fonctions entières est située à sa véritable place.

Ce qu'il faut montrer, c'est que si u est supérieur en module à l'unité, c'est qu'on ne peut avoir simultanément, ni les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n + \gamma_{n-1}u + \dots + \gamma_0 u^n}{\gamma_n + \gamma_{n-1} + \dots + \gamma_0} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \gamma_{n-1} + \dots + \gamma_0} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

ni les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 u + \dots + \gamma_n u^n}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n) = +\infty \end{array} \right. \quad (10)$$

pour aucun domaine du plan de la variable u , prélevé sur l'étoile de $\frac{1}{1-u}$, hors du cercle $|u| \leq 1$. Convenons de poser, pour abrégier l'écriture $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = \beta_n$.

Examinons d'abord le cas facile des relations (9). Si la seconde a lieu, à tout nombre positif α , on peut faire correspondre un

entier n tel qu'on ait la suite d'inégalités

$$\begin{array}{l} \frac{\gamma_n}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n} < \alpha, & \text{d'où} & \beta_n > \frac{1}{\alpha} (\beta_n - \beta_{n-1}) ; \\ \dots & & \vdots \\ \frac{\gamma_{n+k}}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n+k}} < \alpha, & \text{d'où} & \beta_{n+k} > \frac{1}{\alpha} (\beta_{n+k} - \beta_{n+k-1}) . \end{array}$$

On en déduit très facilement, quel que soit l'entier k

$$\gamma_{n+k} < \beta_{n+k} < \frac{\beta_{n-1}}{(1 - \alpha)^{k+1}} .$$

Il en résulte que le rayon de convergence de la série entière

$$\varphi_n(x) = \gamma_n + \gamma_{n+1}x + \dots + \gamma_{n+k}x^k + \dots$$

est au moins égal à $1 - \alpha$: il en est donc de même de celui de la série

$$\varphi_0(x) = \gamma_0 + \gamma_1x + \dots + \gamma_mx^m + \dots$$

et comme α peut être pris arbitrairement petit, ce rayon ne peut être inférieur à l'unité. Supposons essentiellement que $\frac{1}{u}$ ne soit pas racine de l'équation

$$\varphi_0(x) = 0 .$$

Dès lors, la première des conditions (9) équivaut à

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|u|^m}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m} = 0 .$$

Il faut montrer que cette propriété limite n'est pas conciliable avec la seconde des conditions (9).

En effet, reprenons notre nombre positif arbitraire α et la valeur particulière n que nous venons de lui faire correspondre. Nous aurons dès lors, pour $m = n + k$,

$$\frac{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n+k}}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}} < (k + 1)\alpha .$$

Or, de la relation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|u|^{n+k}}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n+k}} = 0,$$

résulterait, *a fortiori*, en vertu de l'inégalité précédente, la relation suivante

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|u|^k}{1 + (k+1)\alpha} = 0,$$

qui n'a visiblement pas lieu, la limite du premier membre étant infinie. Donc, dans l'ensemble des valeurs de u non racines de l'équation

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{u} + \frac{\gamma_2}{u^2} + \dots = 0$$

l'incompatibilité annoncée est bien établie.

9. — Il reste à montrer qu'en général, on ne peut avoir à la fois les deux relations (10). Cette partie du problème est plus difficile, parce qu'on ne peut plus se rattacher à la théorie des séries entières. Elle devient cependant abordable si l'on se contente de prendre la question au point de vue pratique, c'est-à-dire de prouver que dans des champs de séries divergentes

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n + \dots$$

soumises à des hypothèses très simples la première des relations (10) ne saurait avoir lieu pour $|u| > 1$.

Notre point de départ consistera à remarquer que si u a été choisi, et si la première des relations (10) a lieu pour cette valeur et pour une suite particulière $\{\gamma_n\}$, elle a nécessairement lieu (d'après le précédent théorème de G. Hardy) pour toute suite $\{\varepsilon_n \gamma_n\}$ fournie avec une suite ε_n décroissante (ou du moins non croissante) et donnant naissance à une série $\sum \varepsilon_n \gamma_n$ divergente. Donc inversement, à supposer que la propriété limite en litige n'ait pas lieu pour la valeur u et pour une suite $\{\gamma_n\}$ donnant une série divergente, elle n'aura pas lieu non plus pour u et pour les suites de la forme $\{k_n \gamma_n\}$ où les k_n sont non décroissants.

Voici une application de cette remarque. En supposant les γ_n égaux à 1, nous aurons pour premier membre de la relation indiquée:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + u + u^2 + \dots + u^n}{n + 1},$$

expression qui est infinie. Notre relation n'aura donc jamais lieu lorsque la suite des γ_n sera croissante.

Nous ferons dès lors l'hypothèse que la suite des γ_n est monotone: c'est-là une des restrictions dont nous avons noté l'opportunité en commençant. Il ne nous reste alors qu'à étudier le cas d'une suite $\{\gamma_n\}$ décroissante (ou du moins, non croissante).

Cela posé, imaginons qu'on ait pu trouver un domaine fini du plan complexe (u) où les polynomes

$$P_n(u) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 u + \dots + \gamma_n u^n}{\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n}$$

tendent vers zéro. D'après un théorème connu sur les suites convergentes de fonctions holomorphes (découlant très simplement de l'intégrale de Cauchy) on en déduit que leurs dérivées de tous ordres formeront des suites tendant elles-mêmes vers zéro. On en déduit par exemple que si l'on forme les polynomes

$$Q_n(u) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 u + 1 \cdot 2 \gamma_2 u^2 + \dots + (n-1) n \gamma_n u^n}{\gamma_0 + \gamma_1 + 1 \cdot 2 \gamma_2 + \dots + (n-1) n \gamma_n}$$

(liés simplement aux dérivées secondes), ces polynomes tendront vers zéro dans la même région. Faisons alors une nouvelle hypothèse complémentaire: *La suite décroissante $\{\gamma_n\}$ possède une régularité suffisante pour que la suite auxiliaire*

$$\{(n-1) n \gamma_n\}$$

soit monotone, ou tout au moins qu'il en soit ainsi à partir d'un certain rang. Alors, en vertu de la divergence de $\Sigma \gamma_n$, il est clair que notre suite auxiliaire sera *croissante*. Mais alors, contrairement à ce que nous venons de voir, il serait impossible (en vertu de ce qui a été établi pour les suites croissantes) que les $Q_n(u)$ tendent vers zéro. On ne peut donc avoir, dans les conditions indiquées

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u) = 0 .$$

L'impossibilité annoncée [de sortir du cercle de convergence par le genre de sommation qui se rapporte au tableau (6)] est donc pratiquement établie.