Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE

Autor: Cartan, E.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21253

propriétés d'un espace E à $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensions. Toute variété riemannienne peut être regardée comme une variété X_n à n dimensions plongée dans cet espace et définie par les équations qui donnent les g_{ij} en fonctions des x. Mais d'abord la Géométrie riemannienne correspondante n'est pas en toute rigueur l'étude des propriétés de la variété X_n dans ses relations avec l'espace ambiant, et, le serait-elle, elle n'en constituerait pas plus une Géométrie au sens de Klein que l'étude d'une surface particulière plongée dans l'espace euclidien, la surface des ondes, par exemple, n'en constitue une.

III

La Relativité généralisée jeta dans la Physique et la Philosophie l'antagonisme qui existait entre les deux principes directeurs de la Géométrie, celui de Riemann et celui de Klein. Les espaces-temps de la mécanique classique et de la relativité restreinte sont du type de Klein, celui de la Relativité généralisée est du type de Riemann. Ce fait même que presque tous les phénomènes étudiés par la science depuis de nombreux siècles pouvaient s'expliquer aussi bien en se plaçant à l'un des points de vue qu'à l'autre était hautement significatif et suggérait malgré tout la possibilité d'une synthèse englobant les deux principes antagonistes.

La découverte par Levi-Civita [1] en 1917 du transport par parallélisme dans un espace de Riemann orienta les esprits vers une nouvelle direction. C'est en généralisant la notion du parallélisme de Levi-Civita d'une part, en poussant d'autre part à ses dernières conséquences l'idée directrice de Riemann par l'affirmation de la relativité de la longueur, que Weyl [2] arriva à la conception d'espaces métriques plus généraux que ceux de Riemann. Les géomètres furent surtout frappés par la fécondité de la notion du transport parallèle et on pensa être arrivé ainsi au principe constructeur de la Géométrie différentielle générale.

[1] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* (*Rend Circ. Mat. Palermo*, 42, 1917, p. 173-205).

[2] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 3te Auflage (Berlin, Springer, 1922).

Qu'une telle vue fût incomplète, l'impossibilité de fonder la Géométrie projective ou la Géométrie conforme classiques sur un tel principe le prouve avec évidence; en Géométrie projective la notion de parallélisme n'existe pas; en Géométrie conforme, la notion de vecteur disparaissant elle-même, disparaît *ipso facto* le problème du transport des vecteurs par parallélisme.

IV

Mais si le transport parallèle ne fournit pas par lui-même un principe assez général pour englober les différentes théories géométriques connues, il fournit du moins, envisagé d'une manière convenable, un moyen pour y parvenir.

Reprenons dans un espace de Riemann une petite région entourant un point donné A; la connaissance du ds^2 de l'espace fait jusqu'à un certain point de cette région un petit morceau d'espace euclidien; on peut imaginer par exemple un repère rectangulaire d'origine A, et rapporter à ce repère tous les points M infiniment voisins de A en leur attribuant ainsi des coordonnées cartésiennes rectangulaires; les formules qui expriment la distance d'un point M à l'origine, l'angle de deux vecteurs joignant le point A à deux points M, M′ infiniment voisins de A, celles qui traduisent un changement de coordonnées rectangulaires, sont exactement les mêmes que dans l'espace ordinaire. La difficulté commence quand on considère deux portions voisines de l'espace, l'une entourant un point A, l'autre un point voisin A′; elles constituent deux morceaux d'espace euclidien qui sont en quelque sorte isolés l'un de l'autre, tant qu'on n'a pas réussi à les orienter l'un par rapport à l'autre. D'une manière plus précise si nous attachons aux points A et A′ deux repères rectangulaires, nous savons localiser, à la manière euclidienne, l'origine A′ du second repère par rapport au premier, mais nous ne savons pas orienter les axes du second repère par rapport à ceux du premier. Le transport par parallélisme de Levi-Civita nous fournit précisément un moyen de fixer cette orientation, puisque nous savons, grâce à lui, reconnaître quand deux vecteurs d'origine A et A′ doivent être regardés comme paral-