

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	26 (1927)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR LES PETITES OSCILLATIONS, D'UN SYSTÈME POSSÉDANT UNE FONCTION DES FORCES, AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE
<b>Autor:</b>	Appell, Paul
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-21252">https://doi.org/10.5169/seals-21252</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR LES PETITES OSCILLATIONS, D'UN SYSTÈME  
POSSÉDANT UNE FONCTION DES FORCES,  
AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE

PAR

Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

On enseigne aujourd'hui, dans tous les cours de Mécanique rationnelle, le théorème de Lejeune-Dirichlet, d'après lequel une position d'équilibre d'un système matériel possédant une fonction des forces  $U$ , dans laquelle  $U$  est maximum, constitue une position stable. Mais, en supposant que la position du système dont on cherche l'équilibre dépende de  $k$  paramètres arbitraires  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , nuls dans la position d'équilibre considérée et que le maximum correspondant de  $U$  soit zéro, le développement de  $U$ , par la formule de Mac-Laurin, commence par un groupe  $\varphi$  de termes d'un degré pair quelconque, négatif quels que soient les  $q_i$ ;

$$U = -\varphi + U_1 ,$$

$U_1$  étant l'ensemble des termes de degré supérieur.

La demi-force vive du système peut être supposée mise sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} q'_i q'_j + T_1 , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

où les coefficients  $a_{ij}$  sont constants et où la forme quadratique  $\Sigma$  est positive,  $T_1$  désignant une fonction des  $q_i$  et des  $q'_i$  homogène et du second ordre en  $q'_i$  avec des coefficients s'annulant pour

$$q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0 .$$

On suppose habituellement, dans les cours, que  $\varphi$  est une forme quadratique des  $q_i$

$$\varphi = \sum \alpha_{ij} q_i q_j, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

et on néglige  $U_1$  et  $T_1$ . Mais  $\varphi$  peut être d'un degré pair quelconque supérieur à 2; les oscillations du système ont alors une durée qui dépend de leur amplitude. Il est important d'envisager ce cas qui s'impose; c'est ce que j'ai fait sommairement dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. 185, 29 août 1927, pp. 487-489). Nous développerons ici les calculs en supposant  $\varphi$  de degré 4.

*Premier cas, k = 1.* (Système à liaisons complètes). — Nous prendrons

$$U = -\frac{\alpha}{4} q^4, \quad T = \frac{a}{2} q'^4.$$

L'équation approchée du mouvement est, d'après Lagrange,

$$aq'' = -\alpha q^3 \quad \text{ou} \quad q'' = -r^2 q^3,$$

en posant  $\alpha = ar^2$ . On en déduit

$$q' = -\frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{q_0^4 - q^4},$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}} t = - \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{q_0^4 - q^4}},$$

avec  $q_0$  valeur de  $q$  pour  $t = 0$ . En faisant  $q = q_0 s$ ,

$$\frac{r}{\sqrt{2}} t = -\frac{1}{q_0} \int_1^s \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}},$$

ce qui donne  $q$  par une fonction elliptique de  $t$ . Le temps  $\tau$  que met  $q$  partant de  $q_0$  pour devenir nul est

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{rq_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}};$$

il est en raison inverse de  $q_0$ . Ce cas se présente quand, Oz étant

vertical ascendant, on étudie, dans le voisinage de O, les petits mouvements d'un point pesant mobile sur la courbe

$$y = 0, \quad 4z = x^4.$$

Alors

$$T = \frac{m}{2} x'^2 + \frac{m}{2} x^6 x'^2 = \frac{m}{2} x'^2 + T_1,$$

$$U = -mgz = -mg \frac{x^4}{4}, \quad q = x.$$

*Deuxième cas, k = 2.* — Nous désignerons les deux paramètres par  $p$  et  $q$ ; alors

$$2T = ap'^2 + 2bp'q' + cq'^2 + 2T_1,$$

et nous prendrons

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4} (\alpha_1 p^4 + 4\alpha_2 p^3 q + 6\alpha_3 p^2 q^2 + 4\alpha_4 p q^3 + \alpha_5 q^4), \\ U &= -\varphi + U_1.\end{aligned}$$

Les coefficients  $\alpha_i$  sont tels que  $\varphi$  soit positif quels que soient  $p$  et  $q$ . En négligeant  $T_1$  et  $U_1$  on a, pour équations approchées du mouvement,

$$ap'' + bq'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -(\alpha_1 p^3 + 3\alpha_2 p^2 q + 3\alpha_3 p q^2 + \alpha_4 q^3),$$

$$bp'' + cq'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial q} = -(\alpha_2 p^3 + 3\alpha_3 p^2 q + 3\alpha_4 p q^2 + \alpha_5 q^3),$$

les accents désignant des dérivées par rapport au temps.

Il serait intéressant d'intégrer ces équations. Nous nous bornerons à chercher des solutions telles que  $p = \lambda q$ ,  $\lambda$  étant une constante réelle non nulle. Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned}(a\lambda + b)q'' &= -q^3(\alpha_1\lambda^3 + 3\alpha_2\lambda^2 + 3\alpha_3\lambda + \alpha_4), \\ (b\lambda + c)q'' &= -q^3(\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 3\alpha_4\lambda + \alpha_5),\end{aligned}$$

d'où en éliminant  $q''$ :  $q^3$  l'équation biquadratique en  $\lambda$

$$\begin{aligned}(a\lambda + b)(\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 3\alpha_4\lambda + \alpha_5) \\ - (b\lambda + c)(\alpha_1\lambda^3 + 3\alpha_2\lambda^2 + 3\alpha_3\lambda + \alpha_4) = 0\end{aligned}$$

dont sont admissibles seulement les racines réelles non nulles rendant positive la quantité

$$\mu = \frac{\alpha_1\lambda^3 + 3\alpha_2\lambda^2 + 3\alpha_3\lambda + \alpha_4}{a\lambda + b} = \frac{\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 3\alpha_4\lambda + \alpha_5}{b\lambda + c}.$$

Mais cette quantité  $\mu$  est toujours positive quand  $\lambda$  est réel; car, en ajoutant les deux rapports, après avoir multiplié les deux termes du premier par  $\lambda$ , on obtient

$$\mu = \frac{\alpha_1 \lambda^4 + 4\alpha_2 \lambda^3 + 6\alpha_3 \lambda^2 + 4\alpha_4 \lambda + \alpha_5}{a\lambda^2 + 2b\lambda + c}$$

qui est manifestement positif. On a alors  $q'' = -\mu q$  et, pour chacune des oscillations correspondantes,  $\tau$  varie en raison inverse de  $q_0$ .

On peut remarquer que l'intégration des équations approchées du mouvement se ramène à celle d'une équation du second ordre où figure une constante arbitraire, suivie d'une quadrature.

En effet, en modifiant les cinq coefficients  $\alpha_i$  on peut toujours supposer  $a = c = 1$ ,  $b = 0$ .

Les équations du mouvement

$$p'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad q'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

admettent l'intégrale des forces vives

$$p'^2 + q'^2 = -\varphi + 2h.$$

On a

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p'}{q'}, \quad \frac{1}{q'} \frac{d}{dt} \frac{p'}{q'} = \frac{d^2 p}{dq^2} = \frac{p'' q' - q'' p'}{q'^3}.$$

D'après la première de ces équations, celle des forces vives donne

$$q'^2 = \frac{-\varphi + 2h}{1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2};$$

comme

$$p'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad q'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$\frac{d^2 p}{dq^2} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{dp}{dq}}{q'^2} = \frac{\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{dp}{dq}\right] \left[1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2\right]}{-\varphi + 2h},$$

équation du second ordre donnant  $p$  en  $q$ ,

$$p = f(q)$$

L'intégrale des forces vives devient alors

$$[1 + f'^2(q)] \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = -\wp[f(q), q] + 2h$$

ce qui donne  $t$  en  $q$  par une quadrature.

Si, en général, on suppose que  $p$  et  $q$  s'annulent en même temps, on a

$$p = \lambda q + \lambda' q^2 + \dots$$

et, en négligeant  $q^2, q^3, \dots$ ,  $p = \lambda q$ ; on retrouve ainsi les solutions indiquées.

Si l'on suppose  $a = c = 1, b = 0, \alpha_4 = 0$ , l'équation en  $\lambda$  est, après suppression du facteur  $\lambda$ ,

$$\alpha_2 \lambda^3 + 3\alpha_3 \lambda^2 + \alpha_5 = \alpha_1 \lambda^2 + 3\alpha_2 \lambda + 3\alpha_3 ;$$

elle se réduit au troisième degré et admet toujours une racine réelle.

Si, en outre,  $\alpha_2 = 0$ , on a une équation quadratique

$$\lambda^2 = \frac{3\alpha_3 - \alpha_5}{3\alpha_3 - \alpha_1} ;$$

pour que  $\lambda$  soit réel, il faut que  $3\alpha_3$  soit extérieur à l'intervalle  $\alpha_1, \alpha_5$ .

Si  $\alpha_1 = \alpha_5, \alpha_3$  est quelconque. Le cas  $a = c = 1, b = 0, \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \alpha_1 = \alpha_5$ , se présente dans le mouvement d'un point pesant au voisinage de O, point le plus bas de la surface qui a pour équation, Oz étant vertical ascendant,

$$4z = x^4 + 2\alpha x^2 y^2 + y^4, \quad \alpha \leq 1 .$$

Alors

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x'^2 + y'^2 + (x^3 + \alpha xy^2)^2 x'^2 + (y^3 + \alpha x^2 y)^2 y'^2 ,$$

$$U = -mgz .$$

*Troisième cas, k quelconque.* — Les équations approchées du mouvement sont

$$a_{i1} q_1'' + a_{i2} q_2'' + \dots + a_{ik} q_k'' = -\frac{\partial \wp}{\partial q_i} ,$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

Il serait utile de les intégrer. Nous nous bornerons à trouver des solutions où

$$q_1 = \lambda_1 q, \quad q_2 = \lambda_2 q, \dots, \quad q_k = \lambda_k q,$$

les  $\lambda_i$  étant réels, non nuls et  $q$  désignant une variable auxiliaire. Si  $k = 2$ ,  $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ . On peut toujours supposer

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{kk} = 1, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 q'' = -q^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \\ \lambda_2 q'' = -q^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lambda_k q'' = -q^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k). \end{array} \right.$$

En éliminant  $q'' : q^3$  on a  $k - 1$  équations

$$\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = \dots = \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}$$

homogènes en  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . En éliminant  $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_k$ , on a une équation algébrique en  $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$  dont sont admissibles seulement les racines réelles ne rendant nulle aucune des quantités  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  et rendant positives les quantités

$$\mu = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = \dots = \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}.$$

On peut montrer que si les  $\lambda_i$  sont réels,  $\mu$  est positif. En effet

$$\mu = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} + \dots + \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2} = \frac{\lambda_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} + \dots + \lambda_k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2},$$

ce qui est positif.

L'intégration des équations approchées du mouvement peut être ramenée à celle de  $k - 1$  équations du second ordre avec

une constante arbitraire, définissant  $q_2, q_3, \dots, q_k$  en  $q$ , suivie d'une quadrature. On a, en effet,

$$\frac{dq_z}{dq_1} = \frac{q'_z}{q'_1}, \quad (z = 2, 3, \dots, k)$$

$$\frac{d^2 q_z}{dq_1^2} = \frac{q''_z q'_1 - q''_1 q'_z}{q'^3_1} = \frac{q'_z \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - q'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_z}}{q'^3_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dq_z}{dq_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_z}}{q'^2_1}$$

Mais, d'après l'équation des forces vives,

$$q'^2_1 \left[ 1 + \left( \frac{dq_2}{dq_1} \right)^2 + \left( \frac{dq_3}{dq_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{dq_k}{dq_1} \right)^2 \right] = -\varphi + 2h$$

on a  $q'^2_1$ ; alors

$$\frac{d^2 q_z}{dq_1^2} = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dq_z}{dq_1} - \frac{dq_z}{dq_z} \right) \left[ 1 + \left( \frac{dq_2}{dq_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{dq_k}{dq_1} \right)^2 \right]}{-\varphi + 2h},$$

$$(z = 2, 3, \dots, k).$$

Ces équations donnent

$$q_2 = f_2(q_1), \quad q_3 = f_3(q_1), \dots, \quad q_k = f_k(q_1).$$

Puis, l'intégrale des forces vives

$$\left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2 \left[ 1 + f'^2_2(q_1) + f'^2_3(q_1) + \dots + f'^2_k(q_1) \right]$$

$$= -\varphi [q_1, f_2(q_1), \dots, f_k(q_1)] + 2h$$

donne  $t$  en  $q_1$  par une quadrature.

Si l'on suppose que  $q_1, q_2, \dots, q_k$  s'annulent en même temps, on a

$$q_1 = \lambda_1 q + \lambda'_1 q^2 + \dots,$$

$$q_2 = \lambda_2 q + \lambda'_2 q^2 + \dots,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$q_k = \lambda_k q + \lambda'_k q^2 + \dots;$$

en se bornant aux premiers termes,

$$q_1 = \lambda_1 q, \quad q_2 = \lambda_2 q, \dots, \quad q_k = \lambda_k q.$$


---