

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 26 (1927)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** P. Appell et J. Kämpé de Fériet. — Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. — 1 volume in-4° carré de viii-434 pages. Prix: 140 fr. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926.

**Autor:** Buhl, A.

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ce sont ces singularités qui éclairent le reste d'une manière particulièrement claire. Citons ici Beudon, Hadamard, Gunther. Nous terminons avec les systèmes de Pfaff particulièrement approfondis par M. Cartan et si nécessaires en la géométrie des espaces affines ou à connexion affine, dans la théorie des groupes, etc. La théorie de M. Cartan admet d'ailleurs une sorte de théorie corrélative due à M. Vessiot. Et toute cette belle analyse est celle qui aujourd'hui conditionne impérieusement la Physique mathématique.

A. BÜHL (Toulouse).

**L. GODEAUX.** — **Les transformations birationnelles du plan** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXII). — 1 fascicule gr. in-8° de 58 pages. Prix: 16 fr. 80 net. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1927.

M. Lucien Godeaux, Professeur à l'Université de Liège, est bien connu pour ses travaux de géométrie algébrique. Il nous donne ici un fascicule, peu encombré de formules, où l'on poursuit bien, sans figures, une géométrie: celle dont le groupe principal est formé de transformations birationnelles. Celles-ci font correspondre à un réseau de droites un réseau *homaloïdal* dans lequel deux courbes variables ne se rencontrent, comme les droites du réseau rectiligne, qu'en un seul point variable. Il est clair que la construction de la transformation ou celle du réseau homaloïdal sont choses équivalentes. L'auteur commence par le réseau, d'où des généralités sur les intersections de courbes algébriques et la manière dont les singularités de ces courbes influent sur le dénombrement des intersections libres.

La plus simple des transformations birationnelles est homographique; viennent ensuite les transformations quadratiques avec leurs réseaux homaloïdaux formés de coniques. Les réseaux dépendent d'un système arithmétique de deux équations très simples, l'une linéaire, l'autre quadratique (p. 14); ceci rappelle la théorie générale des groupes continus avec ses deux types de relations de structure. Toute transformation birationnelle est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques.

Il n'y a guère besoin d'en dire davantage pour caractériser une théorie qui repose indéniablement sur des idées fort élégantes. Jusqu'ici ce ne sont que des géomètres d'un véritable talent qui, en dehors de l'homographie et de l'inversion, ont manié des transformations birationnelles: Castelnuovo, Cayley, Chisini, Clebsch, Cosserat, Cremona, De Jonquieres, Enriques, Halphen, Kantor, Montesano, Noether, Picard, Puiseux, Segre, Severi,...

Des ouvrages classiques français ont grandement insisté sur leur importance; ne citons que la *Théorie des Fonctions algébriques de deux variables* de MM. E. Picard et G. Simart et la *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales* de MM. P. Appell et E. Goursat. L'excellent fascicule de M. L. Godeaux précisera très esthétiquement les idées nouvelles se rapportant au sujet.

A. BÜHL (Toulouse).

**P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET.** — **Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite.** — 1 volume in-4° carré de VIII-434 pages. Prix: 140 fr. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926.

Cet ouvrage est comme le couronnement d'une carrière illustre pour M. Paul Appell, ce qui ne va pas naturellement sans un grand honneur pour son jeune collaborateur M. J. Kampé de Fériet.

Les recherches de M. Appell sur le sujet remontent presque à un demi-siècle et elles étaient éparses jusqu'ici dans de nombreux Mémoires; le fascicule III du Mémorial des Sciences mathématiques, en nous en donnant un bref aperçu, nous a donné aussi le désir d'approfondir un sujet aussi vaste qu'esthétique et ce désir peut, maintenant, être magnifiquement exaucé.

Le grandiose exposé d'aujourd'hui est divisé en trois parties. La première partie est consacrée aux Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. Il est naturel de commencer par celles d'une seule variable, c'est-à-dire par la série hypergéométrique ordinaire dont les propriétés essentielles sont résumées, avec une rare élégance, en une douzaine de pages, propriétés immédiatement étendues ensuite au cas de deux variables. Les premiers instruments de représentation sont des séries entières susceptibles d'être accompagnées de leur prolongement analytique; les seconds sont des intégrales définies en lesquelles les fonctions hypergéométriques naissent de manière curieuse de l'intégration de certaines combinaisons de la fonction  $\Gamma$ . Le calcul des résidus intervient ici d'une manière remarquablement simple. Il y a ensuite des équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions en litige; ces équations sont linéaires et sont de celles dont l'intégration peut être complétée quand on en connaît des solutions particulières, ici hypergéométriques. Les équations *adjointes* sont aussi en relations simples avec les équations initiales; il est même aisé de construire, en particulier, des équations identiques à leur adjointe. On sait, d'autre part, que Riemann a défini la fonction hypergéométrique d'Euler et de Gauss comme fonction d'une variable complexe avec trois points critiques, que ceci est l'origine des travaux de M. Emile Picard sur la fonction modulaire, travaux qui devaient renouveler complètement la théorie des fonctions. Or il y avait quelque chose d'analogique à faire dans le cas de deux variables et c'était ouvrir une nouvelle voie vers les fonctions fuchsiennes et hyperfuchsiennes.

Il y a deux modes de *réduction* des fonctions hypergéométriques à deux variables; il s'agit de lier ces variables dans un but de vérification, quant à une équation différentielle *réductrice*, ou dans un but de rationalisation. La fonction de Gauss pouvant se réduire à des polynomes, il était indiqué de rechercher la généralisation constituée par les polynomes hypergéométriques à deux variables; les propriétés d'orthogonalité peuvent être étendues à ceux-ci.

Des fonctions hypergéométriques à  $n$  variables ont été construites par M. Loricella mais peut être trouve-t-on plus d'intérêt encore du côté des *dégénérences* des fonctions pour lesquelles  $n$  est égal à 2. Ces dégénérences sont comparables à celles qui donnent par exemple la fonction de Bessel en partant de celle de Gauss. Il faudrait maintenant insister longuement sur les fonctions d'ordre supérieur; dans le cas d'une variable, une fonction  $F(x)$  peut être définie par une série en  $a_n x^n$  en laquelle le rapport de deux coefficients consécutifs est une fraction rationnelle en  $n$ . Alors  $F$  satisfait à une équation différentielle linéaire. Peut-on construire une théorie analogue pour des  $F(x, y)$  avec des polynomes en  $m, n$ ? Oui, et c'est là ce qui est d'une très grande importance, mais pas sans une étude serrée de conditions de compatibilité à laquelle M. Kampé de Fériet a apporté lui-même les plus sérieuses contributions. Ce sont de telles extensions qui montrent tout ce qu'il y avait de fécondité latente dans les cas précédemment développés.

Passons à la seconde partie: Fonctions hypersphériques et polynomes d'Hermite. Elle débute par l'équation de Laplace à  $n$  variables avec ses invariances, ses solutions à constantes arbitraires si remarquables comme celle où interviennent les distances d'un point de l'hyperespace à  $n$  hyperplans rectangulaires. Ici la formule de Green, les transformations d'intégrales multiples sont largement mises à contribution; comme toujours, l'arsenal fondamental de la Physique mathématique touche aux principes de l'Analyse. L'équation de Laplace est toujours vérifiable par des polynomes qui, sur l'hypersphère de rayon unité, donnent les fonctions hypersphériques; celles-ci comportent d'abord une dissymétrie qui provient de celle des coordonnées polaires spatiales. Les coordonnées *zonales* y remédient heureusement. C'est alors qu'apparaissent deux catégories de polynomes à  $n$  variables, catégories jouant, l'une par rapport à l'autre, un rôle réciproque et s'imposant toutes deux à la fois quant au développement d'une fonction arbitraire. De tels polynomes furent d'abord construits par Hermite qui trouve dans la théorie le pendant du procédé de Göpel et Rosenhain pour passer des séries elliptiques de Jacobi aux séries analogues concernant les fonctions abéliennes. C'était déjà prodigieux et cependant ce n'était pas la théorie des fonctions harmoniques; le lien n'a été véritablement établi que par les auteurs du présent ouvrage. Ces rapprochements sont d'une élégance extrême; on y comprend fort bien, par exemple, l'emploi de la solution harmonique à  $n$  hyperplans rectangulaires.

Quant aux fonctions arbitraires à développer suivant les polynomes en question, nous en trouvons des exemples explicites: polynomes homogènes, exponentielles. Ceci est d'ailleurs en relation avec le problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à une hypersphère; les fonctions hypersphériques générales permettent de résoudre le même problème tant extérieur qu'intérieur. Enfin les deux catégories de polynomes à  $n$  variables sont reprises dans un chapitre spécial, pour  $n$  égal à 2. Les fonctions hypersphériques s'expriment toujours très simplement par les fonctions hypergéométriques; en cette assertion apparaît encore le mérite personnel de M. Kampé de Fériet qui a consacré sa Thèse à la fusion des deux ordres d'idées.

Une troisième et dernière partie a trait aux polynomes d'Hermite dérivés d'une exponentielle. C'est là encore une construction très originale d'Hermite; avec les polynomes précédemment étudiés, c'est le cas limite qui correspond au potentiel dans un espace à un nombre infiniment grand de dimensions. Ce cas fait naître des équations aux dérivées partielles diverses, telles celles qui sont relatives à la propagation de la chaleur; les nouveaux polynomes ont de curieuses propriétés symboliques, ils admettent une sorte de formule d'addition, ils se prêtent aussi, par leurs propriétés d'orthogonalité, à des développements à la Fourier. On peut leur adjoindre des fonctions de seconde espèce, de manière à intégrer complètement une certaine équation différentielle linéaire du second ordre. Enfin tout ceci se généralise en passant, de l'unique terme quadratique de l'exponentielle, à une forme à  $n$  variables.

Six notes terminent le volume. Je signalerai surtout celle qui est relative à la résolution des équations algébriques par des fonctions hypergéométriques. M. R. Birkeland s'est illustré dans la question qui apparaît comme fondée sur une idée simple: résolution de l'équation par la série de Lagrange et décomposition de cette série en somme de séries hypergéométriques. Notons encore la question des quadratures mécaniques qui, dans le cas de

$n$  variables comme dans le cas d'une seule, suffit à imposer des polynomes à propriétés intégrales orthogonales.

Et voici, sans formules, c'est-à-dire très imparfaitement, une impression d'ensemble sur un livre magnifique né du désir d'étendre les propriétés du joyau analytique constitué par la série hypergéométrique ordinaire ; il a fallu, chemin faisant, refondre et généraliser celles, non moins élégantes, du potentiel newtonien. Et, comme les savants auteurs le font remarquer, c'est surtout l'Ecole française qui a pris la plus grande part à l'érection du merveilleux monument.

A. BUHL (Toulouse)

R. FERRIER. — **Quelques idées sur l'Electrodynamique.** Théories nouvelles sur l'Oscillateur de Planck et le Mouvement autonome. Préface de M. Paul Painlevé. — 1 fascicule in-8° de 48 pages. A. Blanchard. Paris 1927.

M. Paul Painlevé, dans la préface de ce fascicule, nous rappelle que l'histoire des développements fondamentaux de l'électrodynamique répond, très en raccourci, au schème :

Faraday,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ampère,} \\ \text{Maxwell, Lorentz, Einstein et les relativistes,} \\ \text{Helmholtz.} \end{array} \right.$

Ceci est une croix dont la majorité des théoriciens a parcouru la branche horizontale. La branche verticale, beaucoup moins développée est cependant susceptible de prolongement et c'est dans cette direction que travaillerait M. Raoul Ferrier. Sa théorie est une théorie de structure ; l'éther est un substratum sans position mais où l'on peut considérer des configurations déterminées elles-mêmes par des distances. Nous avions déjà, en géométrie, des systèmes fondés sur cette seule notion de distance ; il n'est évidemment pas impossible d'imaginer des systèmes mécaniques bâtis de même, tels d'ailleurs ceux d'Einstein avec des  $ds^2$  et des rayons de gravitation tenant lieu de masses. Les conceptions atomiques ou corpusculaires sont alors une nécessité de raison ; ce qu'il y a de saisissable dans l'espace physique est naturellement ponctuel et, par suite, discontinu. Le continu, l'éther, au fond, sont amorphes ; ce n'est pas en eux qu'il faut chercher des images représentatives. Vraiment, il semble bien que ceci puisse s'accorder avec d'autres conceptions, d'autant plus, qu'en passant par Maxwell, l'auteur côtoie Lorentz et sa fameuse transformation qu'il propose de compléter par un système analogue qu'il dit *préquantique* comme entraînant des *points critiques*. Tout ceci est audacieux, mais est d'une analyse simple. Avec M. Painlevé, nous proposons, sans jugement préconçu, d'attendre des résultats contrôlables. Et il serait à souhaiter que tous les ingénieurs qui se mêlent de physique théorique montrent un talent analogue à celui de M. Ferrier.

A. BUHL (Toulouse).

N.-E. NÖRLUND. — **Leçons sur les séries d'interpolation** rédigées par René Lagrange (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VIII-236 pages. Prix: 56 fr. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926.

La Collection de Monographies publiée sous la direction de M. Emile Borel vient encore de s'enrichir d'une véritable merveille. Qu'on ne se