

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 11. — Points en ligne droite.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21251>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

11. — Points en ligne droite.

1^o Déterminons les points d'intersection X, Y, Z des côtés correspondants — ou leurs prolongements — d'un triangle et du triangle des pieds des hauteurs (fig. 20):

THÉORÈME 1. — *Les côtés correspondants — ou les prolongements des côtés — d'un triangle et du triangle des pieds des hauteurs se coupent en trois points en ligne droite.*

Démonstration. — 1^{er} PROCÉDÉ. — Le théorème de *Menelaüs* appliqué aux trois transversales A_1B_1Z , C_1B_1X , C_1A_1Y du triangle ABC donne successivement

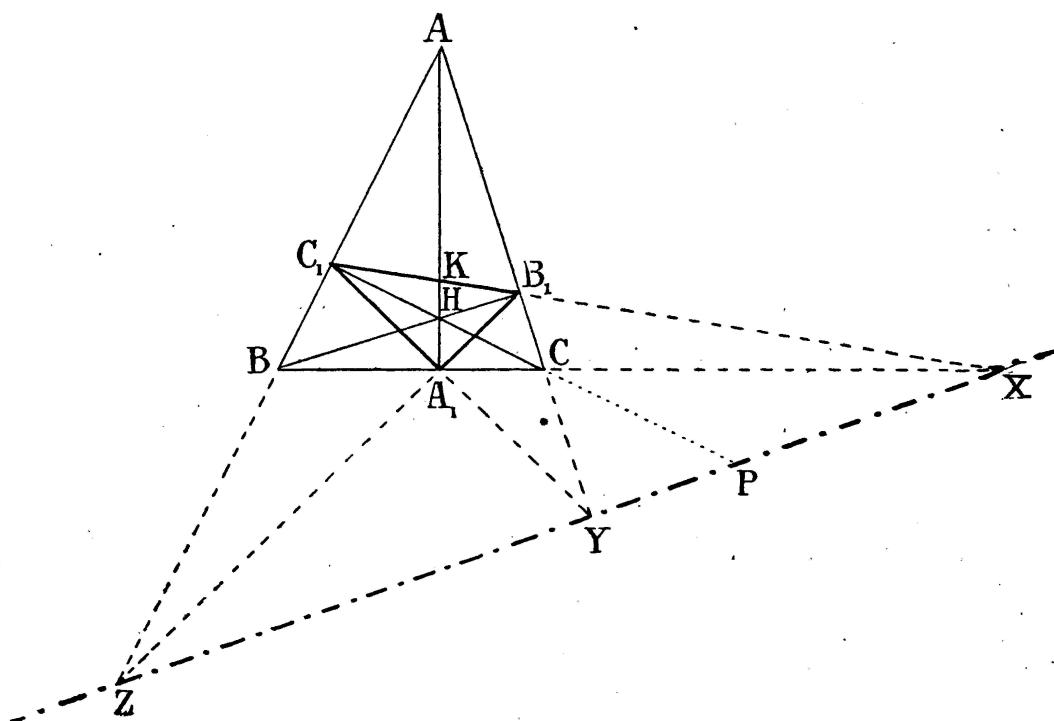


Fig. 20.

$$1) \underline{AZ} \cdot \underline{BA_1} \cdot \underline{CB_1} = \underline{AB_1} \cdot \underline{CA_1} \cdot \underline{BZ},$$

$$2) \underline{AC_1} \cdot \underline{BX} \cdot \underline{CB_1} = \underline{AB_1} \cdot \underline{CX} \cdot \underline{BC_1},$$

$$3) \underline{AC_1} \cdot \underline{BA_1} \cdot \underline{CY} = \underline{AY} \cdot \underline{CA_1} \cdot \underline{BC_1}.$$

En multipliant membre à membre, on obtient

$$\alpha) (AZ \cdot BX \cdot CY) \cdot (AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1)^2 = (AY \cdot CX \cdot BZ) \cdot (AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1)^2.$$

Or, d'après le théorème de *Ceva* appliqué aux hauteurs du triangle ABC, on a

$$4) \quad AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 ,$$

d'où

$$4)' \quad (AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1)^2 = (AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1)^2 .$$

$$\alpha) : 4)' \dots AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot CX \cdot BZ . \quad (68)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Menelaüs, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

2^{me} PROCÉDÉ. — *Dans un quadrilatère complet, les trois diagonales se coupent harmoniquement.* Donc (fig. 20):

$$\text{Quadrilatère complet } CB_1 HA_1 AB \dots 1) \frac{AZ}{BZ} = \frac{AC_1}{BC_1} ,$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad AC_1 HB_1 BC \dots 2) \frac{BX}{CX} = \frac{BA_1}{CA_1} ,$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad BA_1 HC_1 CA \dots 3) \frac{CY}{AY} = \frac{CB_1}{AB_1} .$$

Multiplions membre à membre:

$$\alpha) \frac{AZ \cdot BX \cdot CY}{AY \cdot CX \cdot BZ} = \frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1} .$$

Les transversales AA₁, BB₁, CC₁ (issues des sommets A, B, C) se coupant en un même point H, on a, d'après le théorème de *Ceva*

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 .$$

Le second membre de $\alpha)$ est donc égal à 1, par suite aussi le 1^{er}; donc

$$\underline{\underline{AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot CX \cdot BZ}} .$$

D'après la réciproque du théorème de Menelaüs, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

Remarque. — Ce théorème peut être généralisé: En appliquant les mêmes procédés de démonstration au cas de trois transversales quelconques issues des sommets d'un triangle et se coupant en un même point, on aboutit au résultat suivant:

THÉORÈME 2. — *Si l'on mène par les sommets d'un triangle trois transversales se coupant en un même point et qu'on détermine leurs*

points d'intersection avec les côtés correspondants, les droites de jonction de ces trois points coupent les côtés respectifs du triangle en trois points en ligne droite.

THÉORÈME 3. — *Chaque hauteur d'un triangle détermine sur la droite de jonction des points d'intersection X, Y, Z des côtés avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs le 4^{me} harmonique de ces points X, Y, Z (fig. 20).*

Démonstration. — Soit P le point d'intersection de la hauteur CC_1 avec la droite XY . Les quatre points A, K, H, A_1 forment un groupe harmonique, car la diagonale AH du quadrilatère complet AC_1HB_1BC est coupée harmoniquement par les deux autres C_1B_1 et BC. En les projetant à partir du point C_1 , on obtient le faisceau harmonique $C_1(AKHA_1)$ et celui-ci coupe la droite XYZ en quatre points harmoniques $ZXPY$ (c.q.f.d.).

2^o On sait que le centre O du cercle circonscrit à un triangle, son centre de gravité G et l'orthocentre H sont en ligne droite ($GO = \frac{1}{2} GH$). En se basant sur cette propriété et en appliquant la 7^{me} propriété (voir 8) au triangle IJK des pieds des hauteurs du triangle $O' O'' O'''$ (ou la 10^{me} au triangle ABC), on est conduit au théorème suivant (fig. 12 et 21):

THÉORÈME 4. — *Le centre O du cercle circonscrit à un triangle donné, le centre de gravité G, le point H d'intersection des hauteurs (ou le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs), le centre M du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs (ou le centre du cercle passant par les points milieu O' , O'' , O''' des segments supérieurs des hauteurs), le centre de gravité G' du triangle ayant pour sommets les points milieu des segments supérieurs des hauteurs et le centre M' du cercle passant par les points milieu des segments inférieurs des hauteurs sont (6 points) en ligne droite.*

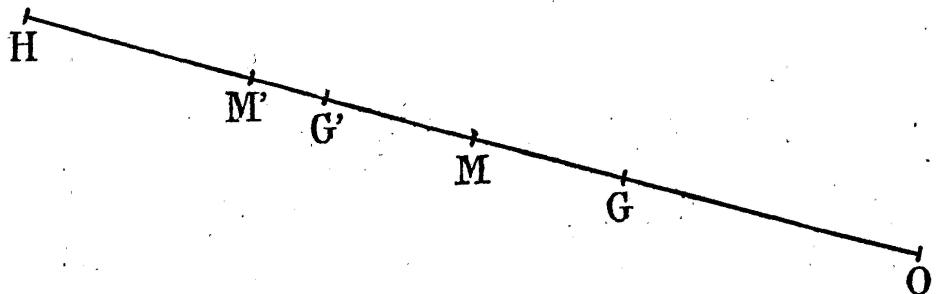


Fig. 21.

Positions relatives de ces points :

$$\begin{aligned} HG &= 2 \cdot GO, \quad HM = MO, \quad HG' = 2 \cdot G'M, \quad HM' = M'M = \frac{1}{4} HO, \\ HG' &= G'G. \end{aligned}$$

Rayons des cercles en question :

$$OA = R, \quad MA_1 = R_1 = \frac{R}{2}, \quad M'I = \frac{R_1}{2} = \frac{R}{4}.$$

3º On sait que l'orthocentre H d'un triangle, le point d'intersection Q des transversales joignant les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits, le centre O du cercle circonscrit et le centre C' du cercle inscrit sont les quatre sommets d'un trapèze dont les diagonales se coupent au centre de gravité G du triangle (fig. 22). La grande base HQ est le double de la petite

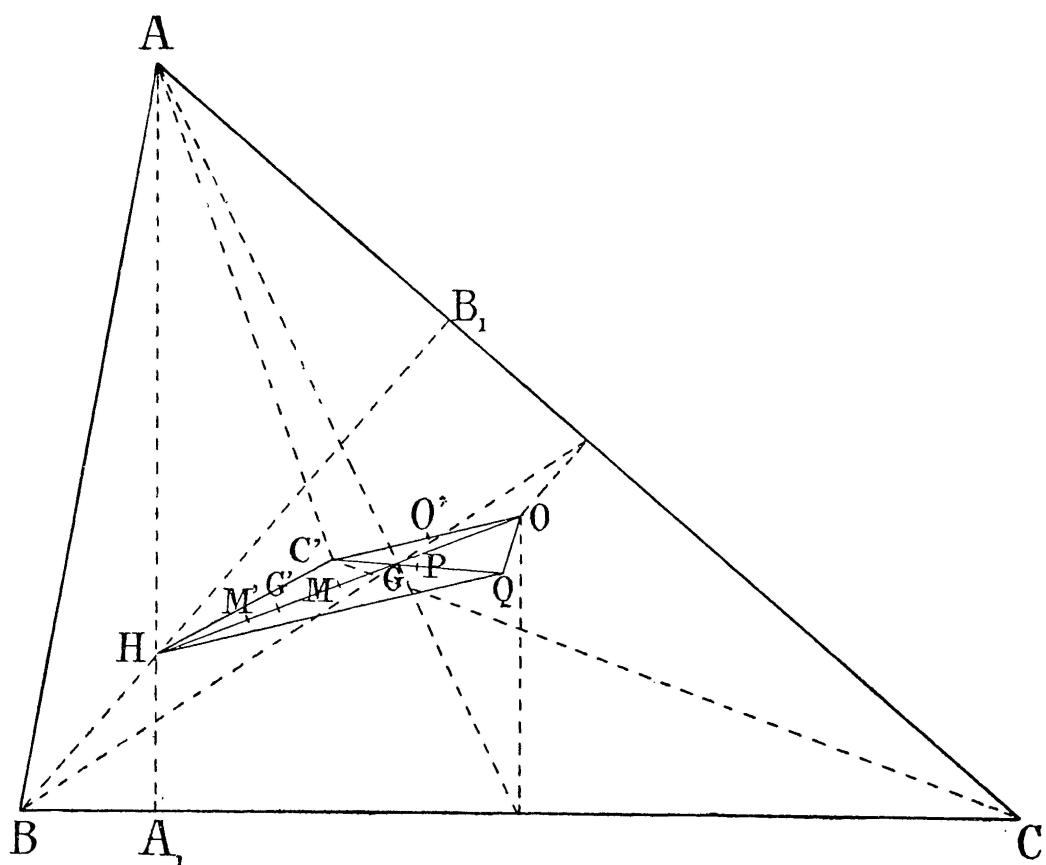


Fig. 22.

base C' O. Ces points H, G, O, C', Q sont les 5 points remarquables du triangle. Le point milieu M de la diagonale HO est le centre du « cercle des 9 points », donc le centre du cercle circonscrit au

triangle des pieds des hauteurs et le point milieu P de la diagonale C' Q, le centre du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les points milieu des côtés du triangle donné.

D'après ce qui précède, nous sommes à même de fixer, sur la petite base C' O et la diagonale HO du trapèze, les positions de 3 nouveaux points qui sont :

1. Le centre O' du cercle passant par les points milieu des segments supérieurs des bissectrices : il est situé au milieu de la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit (voir 8, 11^{me} propriété), donc au milieu de la petite base C' O du trapèze ;

2. Le centre M' du cercle passant par les points milieu des segments inférieurs des hauteurs : il se trouve au milieu de HM, donc au quart de la diagonale HO à partir de l'orthocentre H ;

3. Le centre de gravité G' du triangle ayant pour sommets les points milieu des segments supérieurs des hauteurs : il est au milieu du segment HG de la diagonale HO.

En résumé (fig. 22) :

$$\begin{aligned} HQ &= 2 \cdot C'O ; & HM &= MO ; & C'P &= PQ ; \\ C'O' &= O'O ; & HM' &= M'M ; & HG' &= G'G = GO . \end{aligned}$$

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article sur les hauteurs d'un triangle.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt le travail sur les hauteurs d'un triangle publié par M. STREIT dans l'*Enseign. Math.* (Tome XXV, p. 22-45, 1926). Permettez-moi de faire remarquer que le résultat exposé au § 4 (p. 31-32) n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale. En effet, en remplaçant les hauteurs par les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du plan du triangle sur les côtés, on trouve encore que les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs sont égales.