

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 10. — Droites se coupant en un même point.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21251>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Delta AB_1C_1 &\sim \Delta BC_1A_1 : \\ a_1 : c' &= c'' : b_1 ; \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 b_1 = c' c'' , \\ b_1 c_1 = a' a'' , \\ c_1 a_1 = b' b'' . \end{array} \right. & \quad (64) \end{aligned}$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1^o Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs :

THÉORÈME 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD ; \quad \text{mais} \quad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 ; \quad \text{de même} \quad BO \perp b_1 \quad \text{et} \quad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1 , b_1 , c_1 passent donc par O.

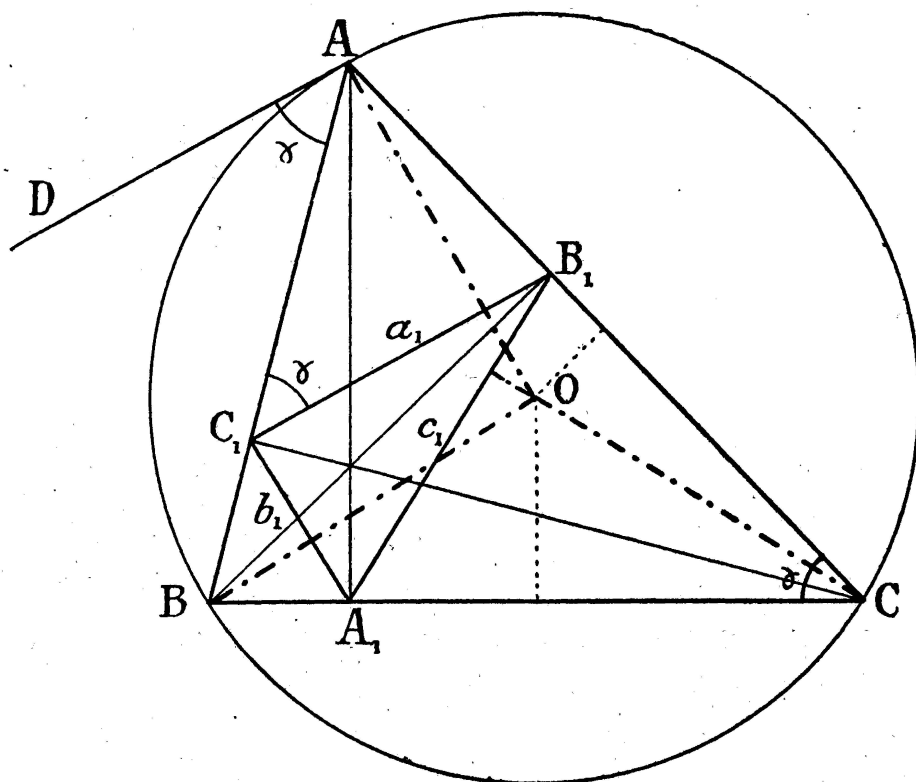


Fig. 15.

Remarque 1. — On peut aussi démontrer ce théorème en se basant sur la *réci-proque du théorème de Ceva*.

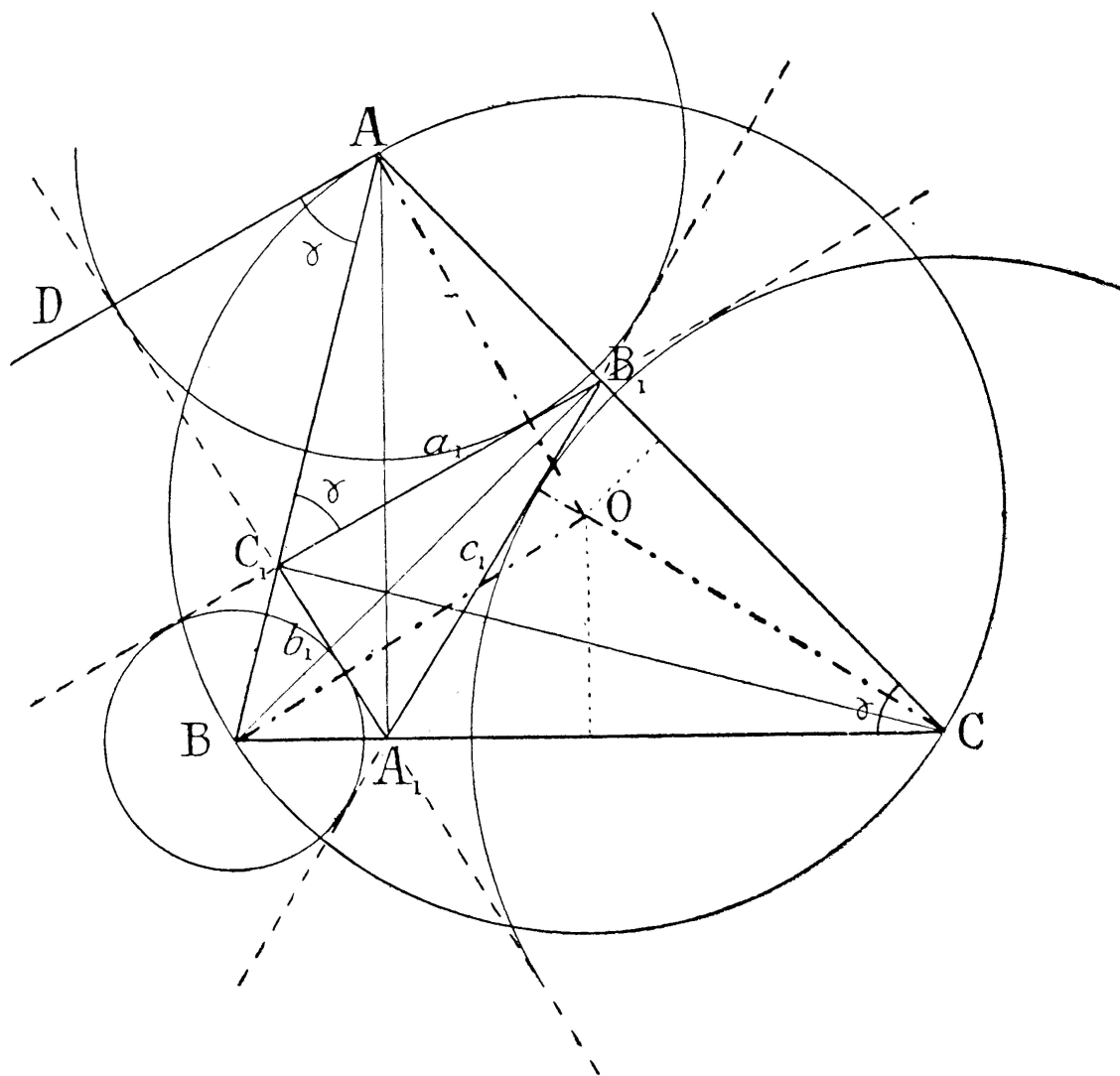


Fig. 16.

Remarque 2. — Les sommets du triangle donné (ABC) étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs ($A_1 B_1 C_1$), les perpendiculaires en question sont les rayons aboutissant aux points de contact des côtés (fig. 16). Le théorème ci-dessus peut donc aussi s'énoncer comme suit :

THÉORÈME 1'. — *Si l'on construit les cercles ex-inscrits à un triangle ($A_1 B_1 C_1$) et les rayons aboutissant aux points de contact des côtés, les prolongements de ces trois rayons se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les centres (A, B, C) des cercles ex-inscrits (fig. 16).*

2° Abaissons, comme précédemment, de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle

des pieds des hauteurs et joignons les pieds aux sommets opposés de ce second triangle :

THÉORÈME 2. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne les pieds de ces perpendiculaires aux sommets opposés de ce dernier triangle, les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point (fig. 17).*

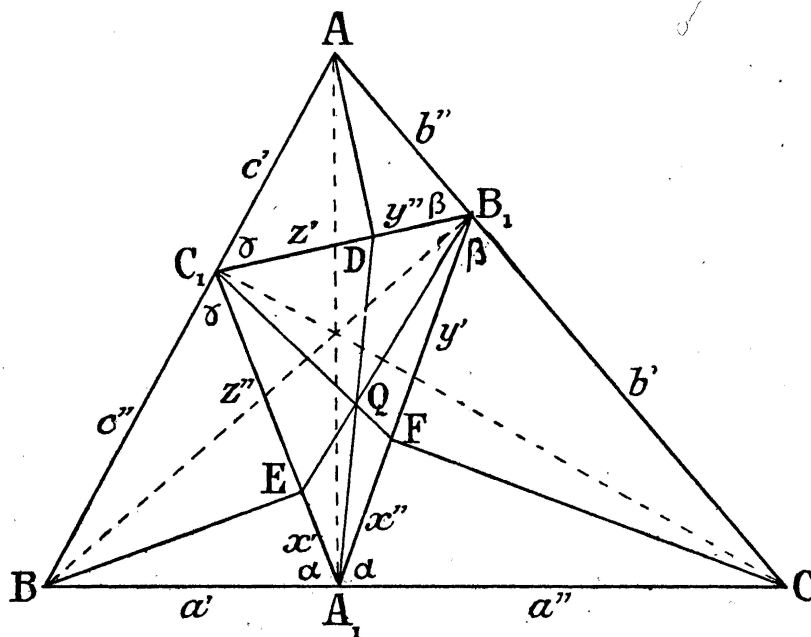


Fig. 17.

Démonstration.

$$\begin{aligned} x' &= a' \cos \alpha, & x'' &= a'' \cos \alpha, \\ y' &= b' \cos \beta, & y'' &= b'' \cos \beta, \\ z' &= c' \cos \gamma, & z'' &= c'' \cos \gamma. \end{aligned}$$

Mais

$$a' b' c' = a'' b'' c'' \text{ (Théorème de Ceva) .}$$

Donc

$$\underline{x' y' z' = x'' y'' z'' .} \quad (65)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites $A_1 D$, $B_1 E$ et $C_1 F$ se coupent en un même point Q . Ce point est le *cinquième point remarquable* du triangle des pieds des hauteurs.

Remarque. — De (55) $A_1 E = B_1 D$, $C_1 D = A_1 F$, $B_1 F = C_1 E$ résulte aussi $A_1 E \cdot C_1 D \cdot B_1 F = A_1 F \cdot B_1 D \cdot C_1 E$.

3° Menons les bissectrices des angles d'un triangle et joignons leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs aux sommets opposés de ce 2^{me} triangle :

THÉORÈME 3. — *Si l'on mène les bissectrices des angles d'un triangle jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne ces points d'intersection aux sommets opposés du second triangle, les trois transversales ainsi obtenues se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient G, N et T les points d'intersection des bissectrices avec les côtés respectifs a_1 , b_1 , c_1 (fig. 18) :

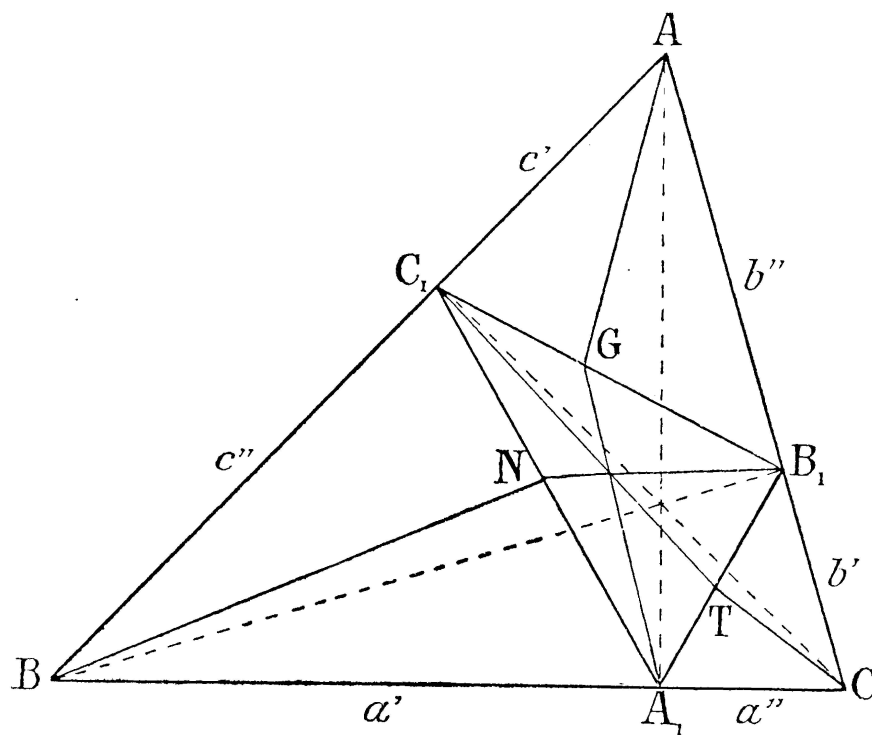


Fig. 18.

$$\Delta A_1 B_1 C \dots A_1 T : B_1 T = a'' : b' ,$$

$$\Delta B_1 C_1 A \dots B_1 G : C_1 G = b'' : c' ,$$

$$\Delta C_1 A_1 B \dots C_1 N : A_1 N = c'' : a' ,$$

d'où

$$A_1 T \cdot B_1 G \cdot C_1 N : A_1 N \cdot C_1 G \cdot B_1 T = a'' b'' c'' : a' b' c' .$$

Mais

$$a' b' c' = a'' b'' c'' .$$

Par suite

$$\underline{A_1 T \cdot B_1 G \cdot C_1 N = A_1 N \cdot C_1 G \cdot B_1 T.} \quad (66)$$

Remarque. — Ce théorème peut être *généralisé*: on peut remplacer les trois hauteurs du triangle donné par trois transversales quelconques AA' , BB' , CC' issues des sommets et se coupant en un même point: en menant les bissectrices des angles A , B , C jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle $A'B'C'$ et en joignant ces points aux sommets opposés A' , B' , C' , on obtient trois droites se coupant en un même point. (La démonstration est exactement la même.)

4° Construisons les hauteurs $A_1 D$, $B_1 E$, $C_1 F$ du triangle des pieds des hauteurs et joignons leurs pieds D , E , F aux sommets correspondants A , B , C du triangle donné (fig. 19):

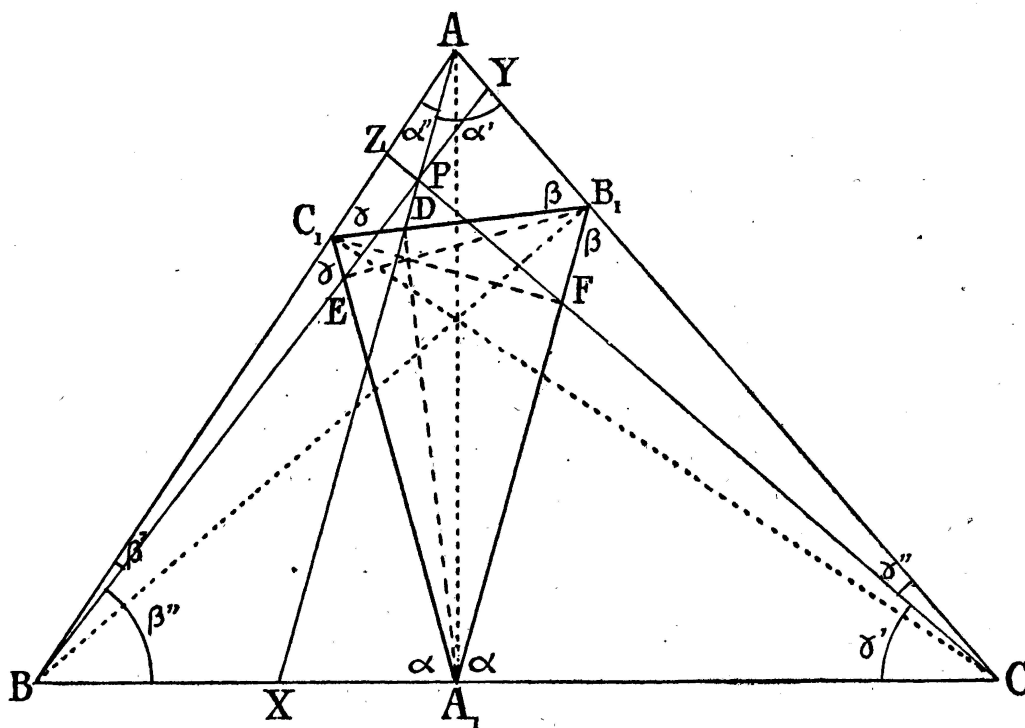


Fig. 19.

THÉORÈME 4. — *Les droites de jonction des sommets d'un triangle aux pieds des hauteurs correspondantes du triangle des pieds des hauteurs se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient X , Y , Z les points d'intersection de ces droites de jonction avec les côtés respectifs a , b , c . En appli-

quant le théorème du sinus aux six triangles

$CFA_1, CFB_1, ADB_1, ADC_1, BEC_1, BEA_1$, on obtient

$$1) A_1F : CF = \sin \gamma' : \sin \alpha ; \quad 2) CF : B_1F = \sin \beta : \sin \gamma'' ;$$

$$3) B_1D : AD = \sin \alpha' : \sin \beta ; \quad 4) AD : C_1D = \sin \gamma : \sin \alpha'' ;$$

$$5) C_1E : BE = \sin \beta' : \sin \gamma ; \quad 6) BE : A_1E = \sin \alpha : \sin \beta'' .$$

$$1) \cdot 2) \dots A_1F : B_1F = \sin \beta \sin \gamma' : \sin \alpha \sin \gamma'' ,$$

$$3) \cdot 4) \dots B_1D : C_1D = \sin \gamma \sin \alpha' : \sin \beta \sin \alpha'' ,$$

$$5) \cdot 6) \dots C_1E : A_1E = \sin \alpha \sin \beta' : \sin \gamma \sin \beta'' ,$$

d'où

$$\alpha) A_1F \cdot B_1D \cdot C_1E : A_1E \cdot C_1D \cdot B_1F = \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' : \sin \alpha'' \sin \beta'' \sin \gamma'' .$$

Appliqué aux six triangles CZA, CZB, AXB, AXC, BYC, BYA, le théorème du sinus donne

$$1)' AY : BY = \sin \beta' : \sin \alpha ; \quad 2)' BY : CY = \sin \gamma : \sin \beta'' ;$$

$$3)' CX : AX = \sin \alpha' : \sin \gamma ; \quad 4)' AX : BX = \sin \beta : \sin \alpha'' ;$$

$$5)' BZ : CZ = \sin \gamma' : \sin \beta ; \quad 6)' CZ : AZ = \sin \alpha : \sin \gamma'' .$$

$$1)' \cdot 2)' \dots AY : CY = \sin \gamma \sin \beta' : \sin \alpha \sin \beta'' ,$$

$$3)' \cdot 4)' \dots CX : BX = \sin \beta \sin \alpha' : \sin \gamma \sin \alpha'' ,$$

$$5)' \cdot 6)' \dots BZ : AZ = \sin \alpha \sin \gamma' : \sin \beta \sin \gamma'' ,$$

d'où

$$\beta) AY \cdot CX \cdot BZ : AZ \cdot BX \cdot CY = \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' : \sin \alpha'' \sin \beta'' \sin \gamma'' .$$

De $\alpha)$ et $\beta)$ résulte

$$AY \cdot CX \cdot BZ : AZ \cdot BX \cdot CY = A_1F \cdot B_1D \cdot C_1E : A_1E \cdot C_1D \cdot B_1F = 1 ,$$

car, d'après le théorème de Ceva appliqué aux hauteurs A_1D , B_1E et C_1F :

$$A_1F \cdot B_1D \cdot C_1E = A_1E \cdot C_1D \cdot B_1F .$$

Donc

$$\underline{AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot CX \cdot BZ} . \quad (67)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites AX , BY , CZ se coupent en un même point P .