

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 9. — Produits égaux (fig. 14).
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21251>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

centre M' est le point milieu de la distance des centres H et M des cercles inscrit et circonscrit (fig. 12 et 13).

Le triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$ étant un triangle quelconque, la 11^{me} propriété est aussi applicable au triangle donné ABC .

9. — Produits égaux (fig. 14).

THÉORÈME 1. — *Si des sommets du triangle des pieds des hauteurs on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle donné, les produits de trois perpendiculaires de même sens sont égaux (fig. 14).*

Démonstration.

$$\begin{aligned} A_1 G &= c_1 \sin \beta, & A_1 K &= b_1 \sin \gamma, \\ B_1 I &= a_1 \sin \gamma, & C_1 M &= a_1 \sin \beta, \\ C_1 J &= b_1 \sin \alpha, & B_1 L &= c_1 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Par suite

$$\underline{\underline{A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J = A_1 K \cdot C_1 M \cdot B_1 L}}. \quad (61)$$

THÉORÈME 2. — *Le produit des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des distances de même sens des sommets du triangle des pieds des hauteurs aux côtés du triangle donné (fig. 14):*

$$\underline{\underline{AD \cdot BE \cdot CF = A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J \left(= \frac{s^2}{r_1} \right)}}. \quad (62)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} AD &= c' \sin \gamma, & A_1 G &= a'' \sin \gamma, \\ BE &= a' \sin \alpha, & B_1 I &= b'' \sin \alpha, \\ CF &= b' \sin \beta, & C_1 J &= c'' \sin \beta, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$AD \cdot BE \cdot CF = a' b' c' (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)$$

et

$$A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J = a'' b'' c'' (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma).$$

Mais, d'après le théorème de Ceva

$$a' b' c' = a'' b'' c'' .$$

Donc

$$AD \cdot BE \cdot CF = A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J (= A_1 K \cdot C_1 M \cdot B_1 L) .$$

THÉORÈME 3. — *Le produit des trois côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit de trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés du triangle donné (fig. 14):*

$$\underline{a_1 b_1 c_1 = a' b' c'} (= a'' b'' c'') . \quad (63)$$

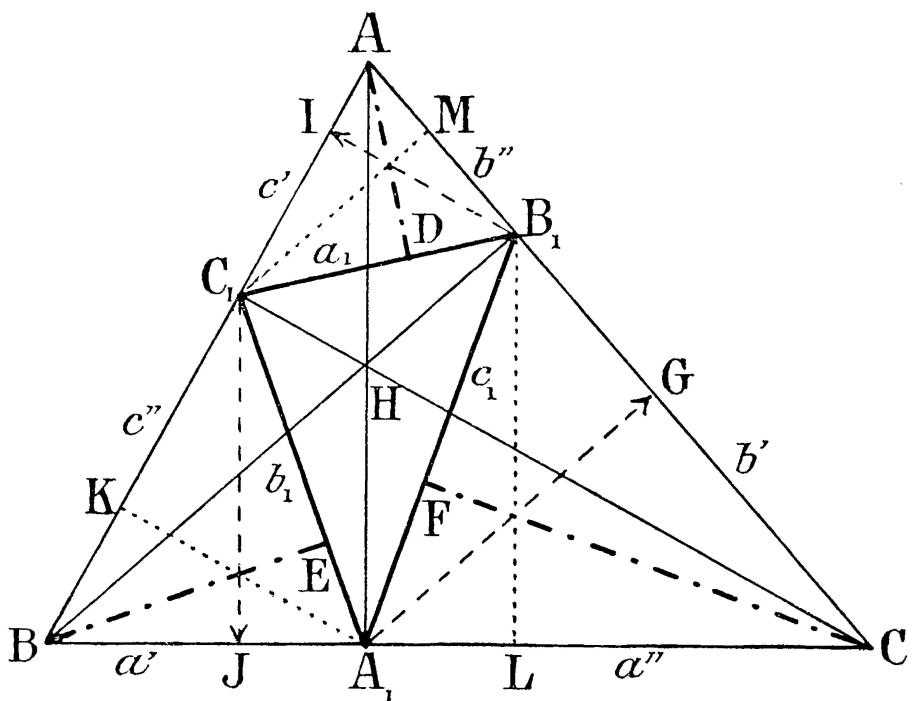


Fig. 14.

Démonstration.

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos \alpha , & a' &= c \cos \beta , \\ b_1 &= b \cos \beta , & b' &= a \cos \gamma , \\ c_1 &= c \cos \gamma , & c' &= b \cos \alpha . \end{aligned}$$

Par suite

$$a_1 b_1 c_1 = a' b' c' .$$

Remarque. — Ce théorème peut aussi être démontré au moyen des triangles semblables AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 .

THÉORÈME 4. — *Le produit de deux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des deux segments qui concourent avec eux (fig. 14).*

Démonstration.

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta BC_1A_1 :$$

$$a_1 : c' = c'' : b_1 ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 b_1 = c' c'' , \\ b_1 c_1 = a' a'' , \\ c_1 a_1 = b' b'' . \end{array} \right. \quad (64)$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1° Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs :

THÉORÈME 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD ; \quad \text{mais} \quad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 ; \quad \text{de même} \quad BO \perp b_1 \quad \text{et} \quad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1 , b_1 , c_1 passent donc par O.

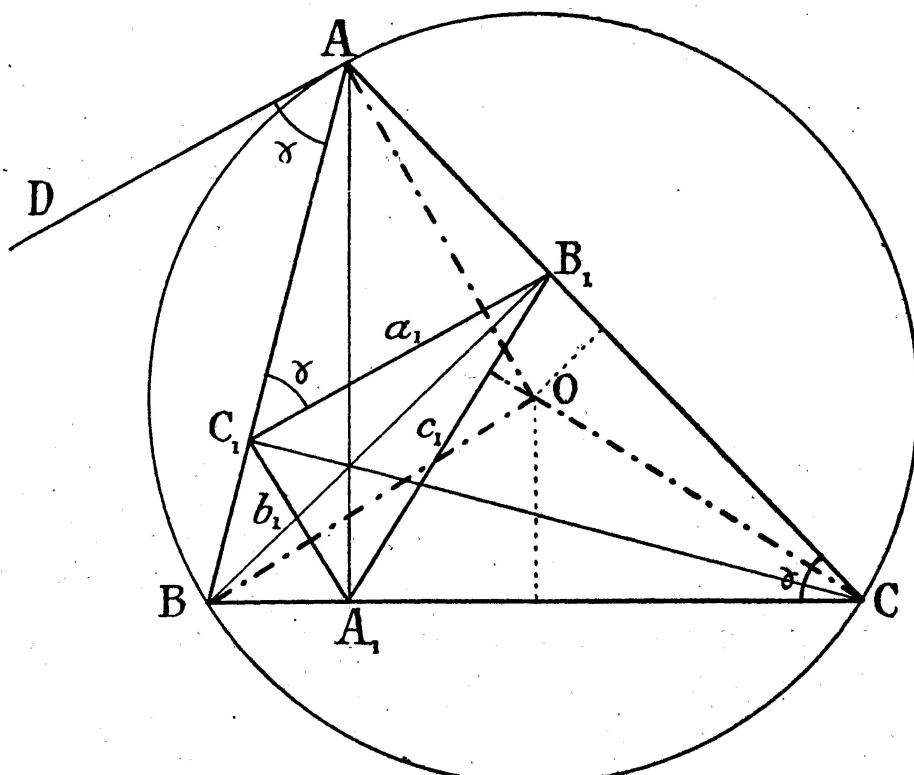


Fig. 15.