

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21251>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Remarque. — En appliquant ce théorème au cas où le triangle ABC donné est rectangle en A, on retrouve la relation connue :

$$\underline{h'^2 = a' \cdot a''}.$$

7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

1° Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal à la projection du côté correspondant du triangle donné sur la tangente en l'une de ses extrémités au cercle circonscrit à ce dernier triangle.

En effet (fig. 9) :

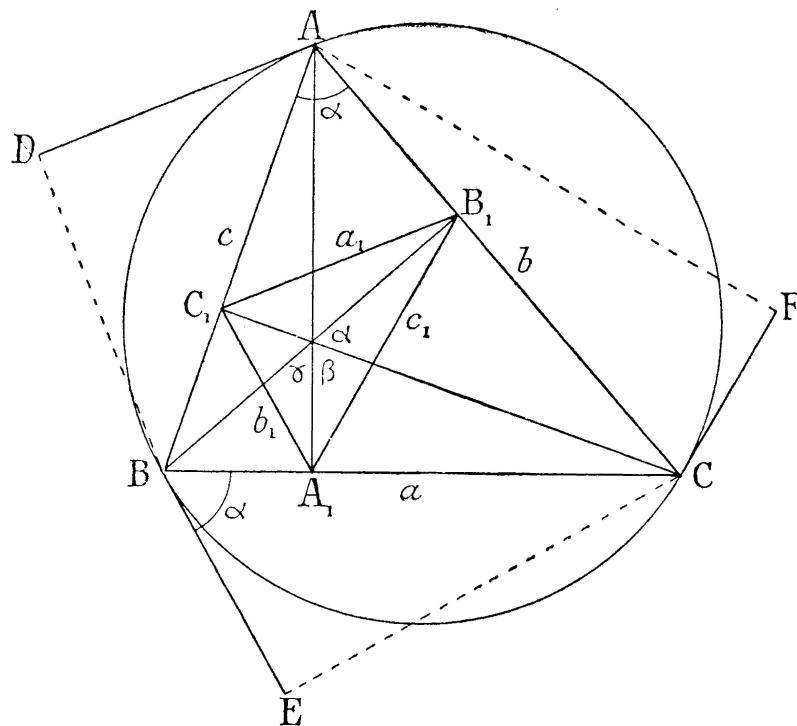


Fig. 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} BE = a \cos \alpha = a_1, \\ CF = b \cos \beta = b_1, \\ AD = c \cos \gamma = c_1. \end{array} \right. \quad (47)$$

2° La projection de chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé est égale à la somme des deux côtés non-correspondants du triangle des pieds des hauteurs.

Car on a, en désignant par GD la projection de a sur la tangente en A (fig. 10):

$$GD = GA + AD = b \cos \beta + c \cos \gamma ,$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} GD = b_1 + c_1 , \\ KE = c_1 + a_1 , \\ LF = a_1 + b_1 . \end{array} \right. \quad (48)$$

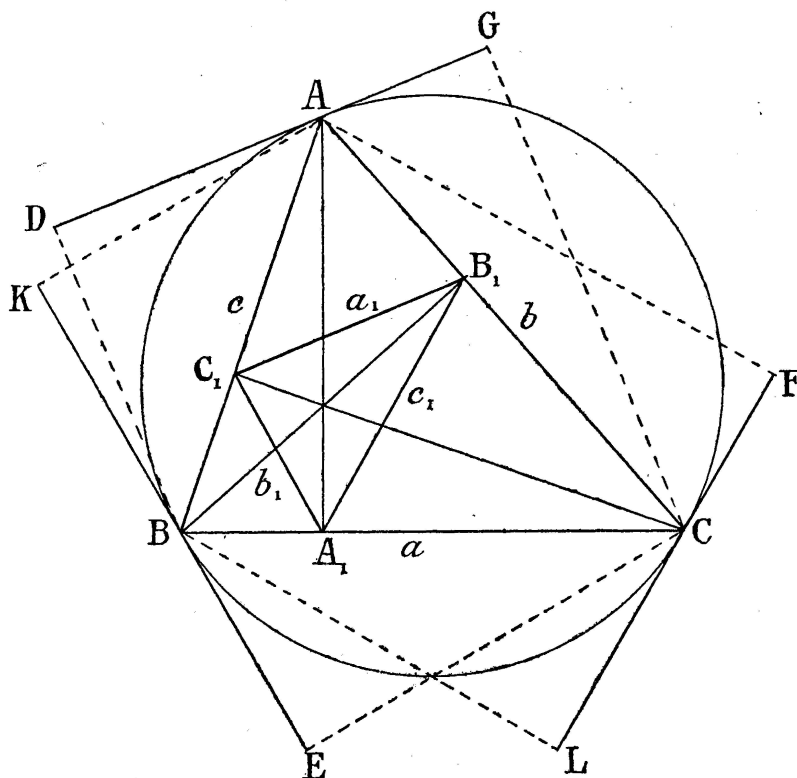


Fig. 10.

3° Si l'on projette chaque côté du triangle donné sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé correspondant, la somme des trois projections est égale au double périmètre du triangle des pieds des hauteurs (fig. 10).

En additionnant membre à membre les trois égalités ci-dessus, on obtient en effet:

$$GD + KE + LF = 2u_1 . \quad (49)$$

4° Si l'on projette chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé correspondant, la somme des trois projections est égale au périmètre du triangle multiplié par le rapport du diamètre du cercle inscrit au rayon du cercle circonscrit (fig. 10).

Car la relation précédente peut s'écrire :

$$GD + KE + LF = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 2(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) .$$

Mais

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} = \frac{r}{R} . \quad (50)$$

Par suite

$$\underline{GD + KE + LF = (a + b + c) \frac{2r}{R} = u \cdot \frac{2r}{R} .} \quad (51)$$

5° Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet suivant, la somme des trois perpendiculaires est égale à la somme des diamètres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs (fig. 10).

Démonstration.

$$AF = b \sin \beta , \quad CE = a \sin \alpha , \quad BD = c \sin \gamma ;$$

$$AF + CE + BD = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma .$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R , \quad a = 2R \sin \alpha , \quad b = 2R \sin \beta , \quad c = 2R \sin \gamma ;$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2R [\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma] .$$

Or d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$\underline{a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1)} \quad (52)$$

et

$$\underline{AF + CE + BD = 2(2R + r_1) ,} \quad (53)$$

ou, en vertu de (40')

$$\underline{AF + CE + BD = d_{a_1} + d_{b_1} + d_{c_1} .} \quad (53')$$

6° La somme des projections des deux segments d'un côté du triangle donné sur les côtés adjacents du triangle des pieds des hauteurs est égale au troisième côté de ce dernier triangle.

En effet (fig. 4):

$$\begin{aligned} A_1 E &= a' \cos \alpha, & A_1 F &= a'' \cos \alpha, \\ A_1 E + A_1 F &= (a' + a'') \cos \alpha = a \cos \alpha = a_1; \\ \underline{A_1 E + A_1 F} &= \underline{a_1}, & \underline{B_1 F + B_1 D} &= \underline{b_1}, & \underline{C_1 D + C_1 E} &= \underline{c_1}. \end{aligned} \quad (54)$$

Remarque. — D'après les formules (55), on aurait d'emblée:

$$A_1 E = B_1 D, \quad A_1 F = C_1 D; \quad \text{donc} \quad A_1 E + A_1 F = a_1.$$

7^o a) On a (fig. 1):

$$\begin{aligned} a' &= c \cos \beta, \\ a' \cos \alpha &= (c \cos \alpha) \cos \beta, \\ \left\{ \begin{array}{l} a' \cos \alpha = b'' \cos \beta \\ b' \cos \beta = c'' \cos \gamma \\ c' \cos \gamma = a'' \cos \alpha \end{array} \right. &\text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 E = B_1 D, \\ B_1 F = C_1 E, \\ \underline{C_1 D = A_1 F}, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (55)$$

d'où

$$a' \cos \alpha + b' \cos \beta + c' \cos \gamma = a'' \cos \alpha + b'' \cos \beta + c'' \cos \gamma = \frac{u_1}{2}, \quad (56)$$

c'est-à-dire

Si l'on projette les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les hauteurs correspondantes sur les tangentes menées par les sommets respectifs au cercle circonscrit, les sommes des projections de trois segments non-consécutifs sont égales et ont pour valeur la moitié du périmètre du triangle des pieds des hauteurs.

De la relation précédente résulte

$$\underline{(a' - a'') \cos \alpha + (b' - b'') \cos \beta + (c' - c'') \cos \gamma = 0}. \quad (57)$$

b) Exprimons et comparons les segments $B_1 D$ et $C_1 X$ (fig. 11):

$$\begin{aligned} B_1 D &= b'' \cos \beta, \\ C_1 X &= i''' \cos (90 - \gamma) = i''' \sin \gamma. \end{aligned}$$

Or

$$i''' = s' \cos \beta = \frac{b''}{\sin \gamma} \cos \beta.$$

Remplaçons

$$C_1 X = b'' \cos \beta .$$

Par suite

$$\underline{B_1 D = C_1 X}, \quad \underline{C_1 Y = A_1 E}, \quad \underline{A_1 Z = B_1 F}. \quad (58)$$

On retrouve ainsi le *théorème connu* suivant:

Chaque côté d'un triangle est divisé par les points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit en trois segments dont les deux extrêmes sont égaux.

c) *Distances des points de contact des cercles inscrits et ex-inscrits* (fig. 11).

Soit $b_1 < a_1 < c_1$. En tenant compte des relations (55) et (58), on a:

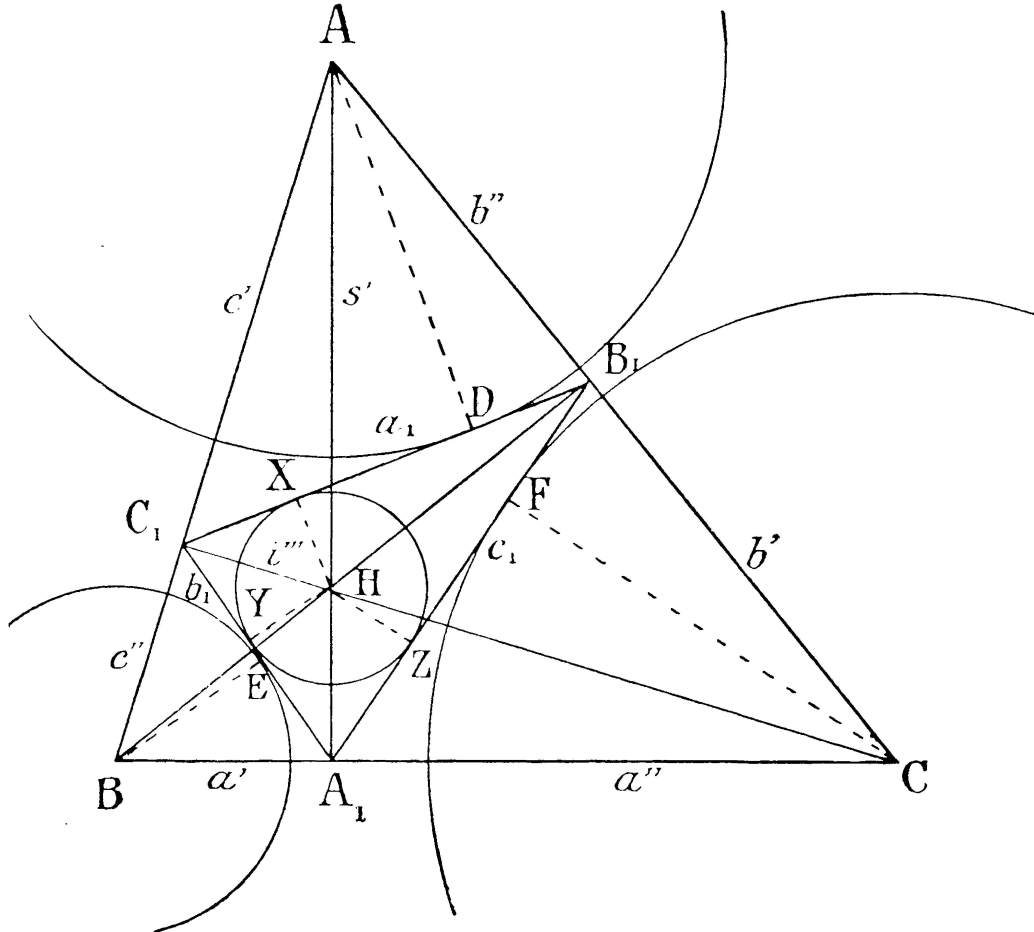


Fig. 11.

$$\begin{aligned} XD &= C_1 D - C_1 X = A_1 F - C_1 Y = A_1 F - A_1 E = \\ &= (A_1 F + FB_1) - (A_1 E + EC_1) = c_1 - b_1 ; \\ \underline{XD = c_1 - b_1}, \quad \underline{YE = c_1 - a_1}, \quad \underline{ZF = a_1 - b_1}, \end{aligned} \quad (59)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *Sur chaque côté d'un triangle, la distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit est égale à la différence des deux autres côtés.*

Relation entre ces trois distances.

$$YE + ZF = c_1 - b_1 .$$

Donc

$$\underline{XD = YE + ZF} , \quad (60)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit sur le côté moyen d'un triangle est égale à la somme de leurs distances sur les deux autres côtés.*

8. — Autres propriétés (fig. 12).

1° Les hauteurs d'un triangle étant les bissectrices des angles du triangle des pieds des hauteurs, leur point d'intersection H est le centre du cercle inscrit dans ce dernier triangle. En outre, les angles B_1 et C_1 du quadrilatère AB_1HC_1 par exemple étant droits, ce quadrilatère est inscriptible. Donc :

Les cercles circonscrits aux triangles aux sommets passent par l'orthocentre H du triangle donné, c'est-à-dire par le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs¹.

2° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné.*

Car les segments supérieurs des hauteurs sont les diamètres de ces cercles.

3° Les pieds des hauteurs d'un triangle, les points milieu des côtés et les points milieu des segments supérieurs des hauteurs sont situés, comme on sait, sur un même cercle appelé « *cercle des neuf points* ». Ce dernier n'est donc autre que le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs. Par suite :

Le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs passe par les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets.

¹ Si le triangle donné est obtusangle (par exemple ACH, fig. 11), l'orthocentre (B) est alors le centre d'un des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs ($A_1B_1C_1$) correspondant.