

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	26 (1927)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor:	Streit, Arnold
Kapitel:	6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-21251

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.

D'après le *théorème du cosinus*, on a (fig. 8):

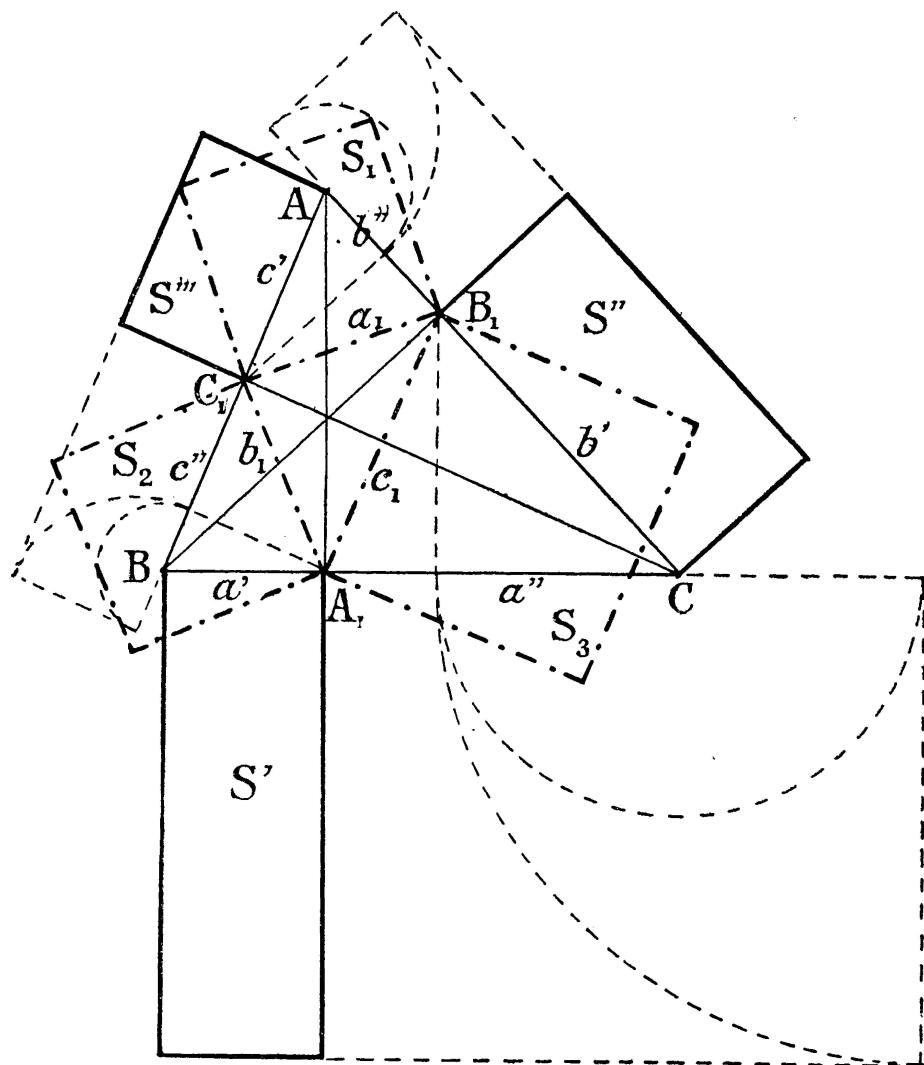


Fig. 8.

$$\Delta A B_1 C_1 \dots \quad a_1^2 = b''^2 + c'^2 - 2b''c' \cos \alpha ,$$

$$\Delta B C_1 A_1 \dots \quad b_1^2 = c''^2 + a'^2 - 2c''a' \cos \beta ,$$

$$\Delta C A_1 B_1 \dots \quad c_1^2 = a''^2 + b'^2 - 2a''b' \cos \gamma ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= (a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2) \\ &\quad - 2 \cdot [b''c' \cos \alpha + c''a' \cos \beta + a''b' \cos \gamma] . \end{aligned}$$

Or

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 . \quad (44)$$

Par suite

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2[b''c' \cos \alpha + c''a' \cos \beta + a''b' \cos \gamma] = \\ &= 2[(a'^2 - c''a' \cos \beta) + (b'^2 - a''b' \cos \gamma) + (c'^2 - b''c' \cos \alpha)]. \end{aligned}$$

Mais

$$\cos \beta = \frac{a'}{c}, \quad \cos \gamma = \frac{b'}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{c'}{b};$$

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 2 \cdot \left[\left(a'^2 \cos \beta \frac{c}{a'} - c''a' \cos \beta \right) + \left(b'^2 \cos \gamma \frac{a}{b'} - a''b' \cos \gamma \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(c'^2 \cos \alpha \frac{b}{c'} - b''c' \cos \alpha \right) \right] = \\ &= 2 \cdot [\cos \beta (a'c - a'c'') + \cos \gamma (b'a - b'a'') + \cos \alpha (c'b - c'b'')] = \\ &= 2 \cdot [\cos \beta a'(c - c'') + \cos \gamma b'(a - a'') + \cos \alpha c'(b - b'')] = \\ &= 2 \cdot [\cos \beta \cdot a'c' + \cos \gamma \cdot b'a' + \cos \alpha \cdot c'b'] ; \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 2a' (b' \cos \gamma) + 2b' (c' \cos \alpha) + 2c' (a' \cos \beta), \\ \underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} &= a' (2b' \cos \gamma) + b' (2c' \cos \alpha) + c' (2a' \cos \beta), \quad (45) \end{aligned}$$

ou

$$S_1 + S_2 + S_3 = S' + S'' + S''' . \quad (45')$$

Si l'on remplace, dans le cours des transformations, $(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ par $(a''^2 + b''^2 + c''^2)$ et si l'on prend:

$$\cos \beta = \frac{c''}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a''}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{b''}{c},$$

on est conduit au résultat suivant:

$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a'' (2b'' \cos \gamma) + b'' (2c'' \cos \alpha) + c'' (2a'' \cos \beta)} . \quad (46)$$

Les deux relations (45) et (46) donnent lieu au théorème suivant:

THÉORÈME. — *La somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la somme de trois rectangles dont les bases sont trois segments non consécutifs du triangle donné et les hauteurs les doubles projections sur ceux-ci des segments non consécutifs suivants respectifs.*

¹ Op. cité, p. 32 (formule 4).

Remarque. — En appliquant ce théorème au cas où le triangle ABC donné est rectangle en A, on retrouve la relation connue:

$$\underline{h'^2 = a' \cdot a''}.$$

7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

1^o *Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal à la projection du côté correspondant du triangle donné sur la tangente en l'une de ses extrémités au cercle circonscrit à ce dernier triangle.*

En effet (fig. 9):

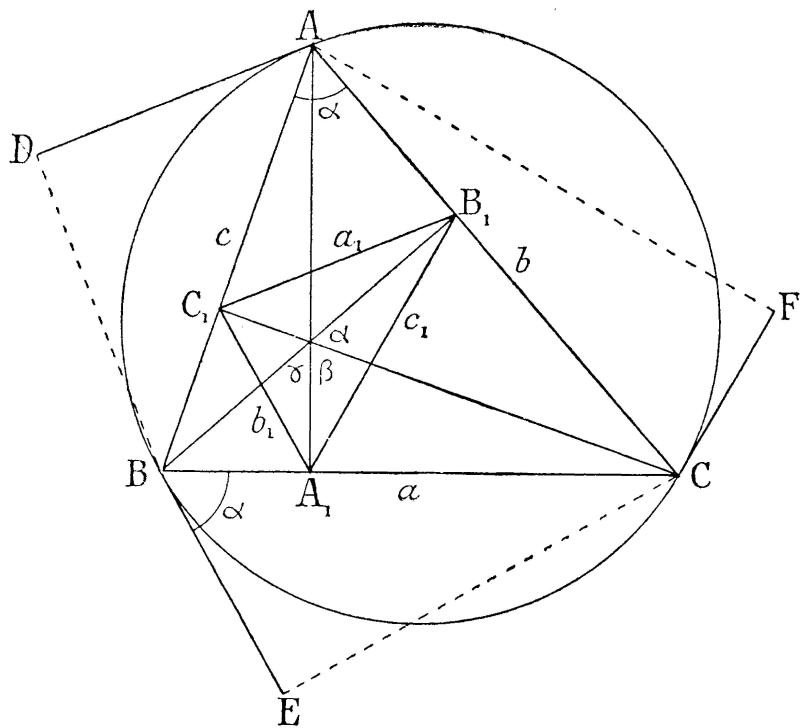


Fig. 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} BE = a \cos \alpha = a_1, \\ CF = b \cos \beta = b_1, \\ AD = c \cos \gamma = c_1. \end{array} \right. \quad (47)$$

2^o *La projection de chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé est égale à la somme des deux côtés non-correspondants du triangle des pieds des hauteurs.*