

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21251>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

THÉOREME. — *La somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets, — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné, — aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

La relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme suit (fig. 6 et 12):

Si du centre (M) du cercle circonscrit à un triangle ($A_1 B_1 C_1$) on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, la somme des segments compris entre les côtés et la circonférence (circonscrite) est égale à la différence entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.

4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

La figure (4) donne:

$$\left. \begin{array}{l} AD = c' \sin \gamma \\ BE = c'' \sin \gamma \end{array} \right\} AD + BE = c \sin \gamma ,$$

$$\left. \begin{array}{l} BE = a' \sin \alpha \\ CF = a'' \sin \alpha \end{array} \right\} BE + CF = a \sin \alpha ,$$

$$\left. \begin{array}{l} CF = b' \sin \beta \\ AD = b'' \sin \beta \end{array} \right\} CF + AD = b \sin \beta ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$2(AD + BE + CF) = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma .$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction des rayons R et r_1 :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R, \quad a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma;$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2R[\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma] .$$

Or, d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1) . \quad (39)$$

Par suite

$$\underline{AD + BE + CF = 2R + r_1} , \quad (40)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle donné augmenté du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

A, B, C étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs et AD, BE, CF leurs rayons, la relation ci-dessus peut s'écrire ($R = 2R_1$):

$$r_{a_1} + r_{b_1} + r_{c_1} = 4R_1 + r_1 ; \quad (40')$$

$$\underline{r_a + r_b + r_c = 4R + r} . \quad (41)$$

Cette relation lie les rayons des cercles inscrit, circonscrit et ex-inscrits à un triangle. Elle peut s'énoncer comme suit:

THÉORÈME. — *La somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle est égale au double diamètre du cercle circonscrit augmenté du rayon du cercle inscrit.*

5. — Distances du centre O du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs.

La fig. 7 (ou 12) donne:

$$OD + OE + OF = (OA + OB + OC) - (AD + BE + CF) .$$

Mais d'après (40)

$$AD + BE + CF = 2R + r_1 ,$$

et

$$OA + OB + OC = 3R .$$

Donc

$$OD + OE + OF = R - r_1 = 2R_1 - r_1 , \quad (42)$$

c'est-à-dire