Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS

Autor: Streit, Arnold

Kapitel: 4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21251

THÉORÈME. — *La somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets, — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné, — aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

La relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme suit (fig. 6 et 12):

Si du centre (M) *du cercle circonscrit à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, la somme des segments compris entre les côtés et la circonférence (circonscrite) est égale à la différence entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.*

4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

La figure (4) donne:

$$\left.\begin{aligned} AD &= c' \sin\gamma \\ BE &= c'' \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad AD + BE = c \sin\gamma \,,$$

$$\left.\begin{aligned} BE &= a' \sin\alpha \\ CF &= a'' \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad BE + CF = a \sin\alpha \,,$$

$$\left.\begin{aligned} CF &= b' \sin\beta \\ AD &= b'' \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad CF + AD = b \sin\beta \,,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$2(AD + BE + CF) = a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma \,.$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction des rayons R et r_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R\,, \quad a = 2R \sin\alpha\,, \quad b = 2R \sin\beta\,, \quad c = 2R \sin\gamma\,;$$

$$a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma = 2R[\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma]\,.$$

Or, d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1) . \tag{39}$$

Par suite

$$\underline{AD + BE + CF = 2R + r_1} , \tag{40}$$

c'est-à-dire

Théorème. — *La somme des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle donné augmenté du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

A, B, C étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs et AD, BE, CF leurs rayons, la relation ci-dessus peut s'écrire ($R = 2R_1$):

$$r_{a_1} + r_{b_1} + r_{c_1} = 4R_1 + r_1 ; \tag{40'}$$

$$\underline{r_a + r_b + r_c = 4R + r} . \tag{41}$$

Cette relation lie les rayons des cercles inscrit, circonscrit et ex-inscrits à un triangle. Elle peut s'énoncer comme suit:

Théorème. — *La somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle est égale au double diamètre du cercle circonscrit augmenté du rayon du cercle inscrit.*

5. — Distances du centre O du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs.

La fig. 7 (ou 12) donne:

$$OD + OE + OF = (OA + OB + OC) - (AD + BE + CF) .$$

Mais d'après (40)

$$AD + BE + CF = 2R + r_1 ,$$

et

$$OA + OB + OC = 3R .$$

Donc

$$OD + OE + OF = R - r_1 = 2R_1 - r_1 , \tag{42}$$

c'est-à-dire