

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 26 (1927)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES DÉPLACEMENTS ISOHODOÏQUES  
**Autor:** Hlavaty, V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21250>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

facilement d'après les inégalités (8) que l'on a une relation de la forme:

$$|\theta_2 - \theta_1| < kh^\mu$$

$k$  étant une constante,  $\mu$  un nombre positif compris entre 0 et 1. On aura donc aussi :

$$|\cos \theta_2 - \cos \theta_1| < kh^\mu \quad |\sin \theta_2 - \sin \theta_1| < kh^\mu$$

On montrerait facilement alors, en employant la méthode analogue à celle utilisée dans le cas d'une fonction d'une variable (*cf.* P. Montel, Sur les polynomes d'approximations. Bull. Soc. Math. Fran. 1918) qu'on peut former deux polynomes  $P_n(s)$  et  $Q_n(s)$  représentant respectivement  $u_0(s)$  et  $v_0(s)$  avec une approximation:

$$\rho < \frac{A}{n^{1+\alpha}}$$

Alors  $u_0(s)$  et  $v_0(s)$  admettent des dérivées  $u'_0(s)$ ,  $v'_0(s)$  continues.

## SUR LES DÉPLACEMENTS ISOHODOÏQUES

PAR

V. HLA V A T Y (Prague).

1. EXPOSITION<sup>1</sup>. Désignons par  $X'$  les  $n$  paramètres d'une variété à  $n (> 1)$  dimensions, par  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} (\neq \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu})$  les  $n^3$  paramètres de son déplacement, que nous désignons par  $L_n$ . Il est bien connu que pendant la transformation des paramètres  $X$  (au jacobien  $\Delta \neq 0$ )

$$X = X'(X) \tag{1}$$

les  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$  se transforment d'après

$$\Gamma_{\omega\pi}^{\nu} = \frac{\partial' X^{\nu}}{\partial X^{\omega}} \left( \frac{\partial X^{\lambda}}{\partial' X^{\omega}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial' X^{\pi}} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \frac{\partial^2 X^{\nu}}{\partial' X^{\omega} \partial' X^{\pi}} \right).$$

<sup>1</sup> Nous employons la symbolique de M. Schouten, exposée dans son livre *Der Ricci-Kalkül*. Berlin, 1924.

Il s'ensuit que la différence de deux paramètres des déplacements divers est un affineur

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + G_{\lambda\mu}^{\nu\lambda} \quad (2)$$

Ces équations définissent la transformation du déplacement. Si cette transformation conserve les lignes géodésiques, nous l'appelons transformation *isohodoïque*. Dans ce cas, il faut et il suffit que l'on ait

$$G_{\lambda\mu}^{\nu\lambda} + G_{\mu\lambda}^{\nu\lambda} = A_\lambda^\nu g_\mu + A_\mu^\nu g_\lambda ,$$

$g_\mu$  étant un vecteur arbitraire covariant et  $A_\lambda^\nu$  l'affineur-unité (Delta de Kronecker).

Les déplacements aux mêmes lignes géodésiques seront dits déplacements *isohodoïques*. On a donc une infinité de déplacements isohodoïques.

Nous nous proposons d'étudier le déplacement (désigné par  $*L_n$ , ou  $L'_n$ ) qui tout en ayant les mêmes lignes géodésiques que  $L_n$  ne dépend pas de la transformation (2). Mais on a deux cas à distinguer: Ou bien la différence

$$G_{\lambda\mu}^{\nu\lambda} - G_{\mu\lambda}^{\nu\lambda}$$

est de la forme

$$2G_{[\lambda\mu]}^{\nu\lambda} = G_{\lambda\mu}^{\nu\lambda} - G_{\mu\lambda}^{\nu\lambda} = A_\lambda^\nu h_\mu - A_\mu^\nu h_\lambda ,$$

$h_\mu$  étant un vecteur arbitraire covariant, ou bien cette différence est un affineur général. Nous étudierons tout d'abord le premier cas, où la transformation isohodoïque peut être écrite en général

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + p_\mu A_\lambda^\nu + q_\lambda A_\mu^\nu , \quad (2')$$

avec  $p_\mu$ ,  $q_\lambda$  vecteurs arbitraires covariants, et ensuite nous examinerons le cas plus général.

2. PARAMÈTRES DU DÉPLACEMENT  $*L_n$ . L'élimination de  $p_\mu$  et  $q_\lambda$  de (2') nous montre que les expressions  $\Phi_{\lambda\mu}^\nu$

$$\Phi_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{n^2 - 1} [A_\lambda^\nu (\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - n \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha) + A_\mu^\nu (\Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha - n \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha)] \quad (3)$$

ne dépendent pas de la transformation isohodoïque (2'). Les  $\Phi_{\lambda\mu}^\nu$  sont donc invariantes par rapport au choix des vecteurs  $p_\mu$  et  $q_\lambda$ .

Si le jacobien  $\Delta$  est *constant*, elles peuvent être considérées comme paramètres du déplacement  $*L_n$ . Mais nous admettons aussi les transformations plus générales, au jacobien-fonction des  $X^\nu$ . Dans ce cas, si  $g$  est une fonction qui pendant (1) se transforme d'après

$$'g = \Delta g \quad (4)$$

les expressions

$$*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Phi_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{n+1} \left( A_\lambda^\nu \frac{\partial}{\partial X^\mu} \log g + A_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial X^\lambda} \log g \right) \quad (5)$$

se transforment précisément comme  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ . On peut donc les prendre pour les paramètres du déplacement  $*L_n$ . En effet, ce déplacement est invariant par rapport aux transformations isohodoïques (2'). En désignant par  $P_\mu$ ,  $Q_\mu$  les vecteurs

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{1}{n^2 - 1} (\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - n \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha) + \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \log g \\ Q_\mu &= \frac{1}{n^2 - 1} (\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha - n \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) + \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \log g \end{aligned}$$

on peut écrire au lieu de (5)

$$*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + P_\mu A_\lambda^\nu + Q_\lambda A_\mu^\nu. \quad (5')$$

Pour trouver les affineurs du déplacement  $*L_n$ , on se sert de la règle suivante: *Etant donné un affineur-fonction de  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  du déplacement  $L_n$ , on obtient l'affineur correspondant de  $*L_n$  en y remplaçant  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  par  $*\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ .*

Ces affineurs sont naturellement indépendants de la transformation (2'). Nous les désignerons par un astérisque \* en haut à gauche.

3. FONCTION  $g$ . Une fonction qui se transforme d'après (4) est facile à trouver. On peut prendre pour  $g$  le produit d'une constante et de l'unique composante d'un  $n$ -vecteur arbitraire covariant, ou du déterminant des  $n^2$  composantes des  $n$  vecteurs covariants linéairement indépendants, ou enfin de la  $1/2^{\text{me}}$  puissance du déterminant d'un tenseur (affineur symétrique) covariant du second ordre. Mais en tout cas  $g$  n'est une fonction scalaire que si  $\Delta$  est constant, égal à 1. Pour trouver la diffé-

rentielle covariante  $\delta g$  (qui pour le cas  $\Delta = 1$  égale la différentielle ordinaire  $dg$ ), supposons  $g$  définie de la dernière manière, c'est-à-dire posons

$$g^2 = c \cdot \text{déterminant de } f_{\mu\lambda} ,$$

où  $f_{\mu\lambda}$  est un tenseur (affineur symétrique) arbitraire et  $c$  une constante quelconque. Si  $f_{\mu\lambda}$  est du rang  $n$  (ce que nous supposerons), on peut trouver le tenseur  $f^{\mu\lambda}$  au moyen de l'équation

$$f^{\alpha\gamma} f_{\alpha\mu} = A_\mu^\gamma .$$

Cela étant, on trouve

$$\begin{aligned} \delta g^2 &= 2g\delta g = g^2 f^{\mu\lambda} \delta f_{\mu\lambda} \\ &= g^2 f^{\mu\lambda} (df_{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha f_{\alpha\lambda} dX^\alpha - \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha f_{\mu\alpha} dX^\alpha) \\ &= d g^2 - dX^\alpha g^2 (\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha A_\alpha^\mu + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha A_\alpha^\lambda) \\ &= 2g(dg - \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha dX^\alpha g) . \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\delta g = dg - \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha dX^\alpha g .$$

Or, en désignant par  $*\delta$  le symbole de la différentiation covariante de  $*L_n$ , on peut écrire

$$*\delta g = dg - *I_{\alpha\alpha}^\alpha dX^\alpha g = 0 . \quad (6)$$

*La différentielle covariante de  $g$  dans  $*L_n$  est nulle.* Ce résultat est naturellement indépendant de la manière, dont  $g$  est définie.

Si  $\mathfrak{S}$  est une fonction qui se transforme comme  $g$ , on peut la « jauger » d'après le principe de M. Klein

$$\mathfrak{S} = s g , \quad (4')$$

où  $s$  est une fonction scalaire. Les expressions

$$+\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Phi_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{n+1} \left( A_{\lambda}^\nu \frac{\partial}{\partial X^\mu} \log \mathfrak{S} + A_{\mu}^\nu \frac{\partial}{\partial X^\lambda} \log \mathfrak{S} \right) \quad (7)$$

sont de même paramètres d'un déplacement linéaire. On a d'après (4') et (7)

$${}^+ \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = {}^* \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + s_\mu A_\lambda^\nu + s_\lambda A_\mu^\nu, \quad s_\mu^\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \frac{\partial}{\partial X^\mu} \log s. \quad (8)$$

Nous reviendrons encore sur ce sujet.

4. L'AFFINEUR  ${}^* S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ . On sait que la différence  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  est un affineur. Nous la désignerons avec M. Schouten par  $2S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) = \Gamma_{[\lambda\mu]}^\nu = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Si  $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{[\lambda} A_{\mu]}^\nu$ , nous disons que le déplacement est semi-symétrique, si  $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0$  nous disons le déplacement symétrique. En appliquant la règle que nous venons d'énoncer plus haut, on obtient l'affineur  ${}^* S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$

$${}^* S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = {}^* \Gamma_{[\lambda\mu]}^\nu = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + A_{[\lambda}^\nu P_{\mu]} + A_{[\mu}^\nu Q_{\lambda]}.$$

Mais comme on a

$$\begin{aligned} A_{[\lambda}^\nu P_{\mu]} + A_{[\mu}^\nu Q_{\lambda]} &= A_{[\lambda}^\nu (P_{\mu]} - Q_{\mu]}) = \frac{1}{n-1} (A_{[\lambda}^\nu \Gamma_{\mu]}^\alpha - \Gamma_{\mu}^{\alpha} A_{[\lambda}^\nu) = \\ &= \frac{1}{n-1} (A_{[\lambda}^\nu S_{\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} - A_{[\mu}^\nu S_{\lambda]}^{\cdot\cdot\alpha}) = \frac{2}{n-1} A_{[\lambda}^\nu S_{\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} \end{aligned}$$

on trouve

$${}^* S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{2}{n-1} A_{[\lambda}^\nu S_{\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} \quad (9)$$

Or, si  $L_n$  n'est pas (semi)-symétrique, le déplacement  ${}^* L_n$  n'est pas symétrique en général. Si  $L_n$  est semi-symétrique, on trouve

$${}^* S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = S_{[\lambda} A_{\mu]}^\nu + \frac{1}{n-1} (A_{[\lambda}^\nu S_{\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} - A_{[\mu}^\nu S_{\lambda]}^{\cdot\cdot\alpha}) = S_{[\lambda} A_{\mu]}^\nu + S_{[\mu} A_{\lambda]}^\nu = 0.$$

*Si  $L_n$  est semi-symétrique,  ${}^* L_n$  est symétrique.* Ce théorème peut être aussi énoncé d'une autre manière : *Chaque déplacement semi symétrique peut être transformé isohodoïquement en un déplacement symétrique.*

5. ISOMÉTRIE. La différentielle covariante d'un  $n$ -vecteur arbitraire  $U^{\nu_1 \dots \nu_n} = U^{[\nu_1 \dots \nu_n]}$  est

$$\delta U^{\nu_1 \dots \nu_n} = dU^{\nu_1 \dots \nu_n} + \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha U^{\nu_1 \dots \nu_n} dX^\mu .$$

Si  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont les symboles des différentielles covariantes aux directions diverses  $d_1 X^\mu$  et  $d_2 X^\mu$ , on trouve facilement

$$(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) U^{\nu_1 \dots \nu_n} = d_1 X^\mu d_2 X^\nu U^{\nu_1 \dots \nu_n} \left( \frac{\partial}{\partial X^\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha - \frac{\partial}{\partial X^\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha \right) .$$

C'est le changement subi par  $U^{\nu_1 \dots \nu_n}$ , si celui-ci décrit un contour fermé infiniment petit. On trouve facilement que  $\frac{\partial}{\partial X^\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha - \frac{\partial}{\partial X^\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha$  est un bivecteur (affineur alterné)

$$V_{\nu\mu} = - V_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial X^\mu} \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha - \frac{\partial}{\partial X^\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un  $n$ -vecteur (co- ou contre-variant) ne subisse aucun changement après avoir décrit un contour fermé infinitésimal est

$$V_{\nu\mu} = 0 .$$

Dans ce cas on dit que le déplacement est *isométrique*. Pour examiner, si  $*L_n$  est ou n'est pas isométrique, il faut connaître  $*\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha$

$$*\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\nu} \log g .$$

On a donc tout de suite

$$*V_{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial X^\mu} *\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha - \frac{\partial}{\partial X^\nu} *\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = 2 \frac{\partial^2 \log g}{\partial X^{[\mu} \partial X^{\nu]}} = 0 . \quad (10)$$

*Le déplacement  $*L_n$  est isométrique.* Ce théorème peut être énoncé d'une autre manière: *Chaque déplacement peut être transformé isohodoïquement en un déplacement isométrique.*

6. QUANTITÉ DE COURBURE. Désignons par  $\nabla_\mu$  resp.  $*\nabla_\mu$  les symboles de la dérivation covariante dans  $L_n$  resp.  $*L_n$ . Si  $v^\nu$  et  $w_\lambda$  sont deux vecteurs *indépendants* de  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  les affineurs

$*\nabla_\mu v^\nu$  et  $*\nabla_\mu w_\lambda$  ne dépendent pas de la transformation isohodique (2'). En appliquant la règle pour la formation des affineurs de  $*L_n$ , on obtient d'après (5')

$$*\nabla_\mu v^\nu = \nabla_\mu v^\nu + v^\nu P_\mu + A_\mu^\nu v^\lambda Q_\lambda, \quad *\nabla_\mu w_\lambda = \nabla_\mu w_\lambda - w_\lambda P_\mu - w_\mu Q_\lambda. \quad (11)$$

Ces formules nous seront utiles pour le calcul de la quantité de courbure du déplacement  $*L_n$ . Soit  $R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu}$  la quantité de courbure du déplacement original  $L_n$

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = \frac{\partial}{\partial X^\mu} \Gamma_{\lambda\omega}^\nu - \frac{\partial}{\partial X^\omega} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \Gamma_{\alpha\omega}^\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_{\lambda\omega}^\alpha.$$

On trouve facilement

$$R_{\omega\mu\alpha}^{\dots\alpha} = V_{\omega\mu}.$$

L'affineur  $R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu}$  intervient dans les identités de Ricci, généralisées par M. Schouten

$$2\nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} v^\nu = -R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} v^\lambda + 2S_{\omega\mu}^{\dots\alpha} \nabla_\alpha v^\nu, \quad 2\nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} w_\lambda = R_{\omega\mu\alpha}^{\dots\nu} w_\nu + 2S_{\omega\mu}^{\dots\alpha} \nabla_\alpha w_\lambda.$$

Or, en appliquant l'opérateur  $*\nabla_\omega$  à (11) et en alternant les indices  $\omega, \mu$  on obtient une relation entre  $R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu}$  et la quantité de courbure  $*R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu}$  de  $*L_n$ . En tenant compte de ce que cette relation est valable pour un vecteur arbitraire  $v^\nu$  (ou  $w_\lambda$ ) on parvient à

$$*R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} - 2A_\lambda^\nu p_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^\nu q_{\mu]\lambda} + 2*S_{\omega\mu}^{\dots\alpha} (A_\alpha^\nu Q_\lambda + A_\lambda^\nu P_\alpha) \quad (12)$$

avec

$$p_{\mu\lambda} = \nabla_\mu P_\lambda - P_\mu Q_\lambda,$$

$$q_{\mu\lambda} = \nabla_\mu Q_\lambda - P_\mu Q_\lambda \left( = p_{\mu\lambda} - \frac{2}{n-1} \nabla_\mu S_{\lambda\alpha}^{\dots\alpha} \right).$$

La sommation d'après  $\lambda = \nu$  nous apprend

$$0 = *V_{\omega\mu} = V_{\omega\mu} - 2np_{[\omega\mu]} + 2q_{[\mu\omega]} + 2*S_{\omega\mu}^{\dots\alpha} (Q_\alpha + nP_\alpha), \quad (13)$$

tandis que la sommation d'après  $\omega = \nu$  nous donne

$$*R_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha} = *R_{\mu\lambda} = R_{\mu\lambda} - 2p_{[\lambda\mu]} + (n-1)q_{\mu\lambda} + 2*S_{\lambda\mu}^{\dots\alpha} P_\alpha \\ (R_{\mu\lambda} = R_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha}). \quad (14)$$

Ces formules nous permettent d'éliminer  $p_{\mu\lambda}$  et  $q_{\mu\lambda}$  de (12)–(14). En introduisant les affineurs

$$\begin{aligned} P_{[\omega\mu]} &= \frac{1}{n^2 - n - 2} \left( \frac{n-1}{2} V_{\omega\mu} + R_{[\omega\mu]} \right), \\ Q_{\mu\lambda} &= -\frac{1}{n-1} [R_{\mu\lambda} + 2P_{[\mu\lambda]}] \end{aligned}$$

et les affineurs correspondants  $*P_{[\omega\mu]}$ ,  $*Q_{\mu\lambda}$ , l'élimination de  $p_{\mu\lambda}$  et  $q_{\mu\lambda}$  nous donne

$$*R_{\omega\mu\lambda}^{***} - 2A_{\lambda}^{\gamma} *P_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^{\gamma} *Q_{\mu]\lambda} = R_{\omega\mu\lambda}^{***} - 2A_{\lambda}^{\gamma} P_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^{\gamma} Q_{\mu]\lambda} + 2F_{\omega\mu\lambda}^{***}$$

(15)

L'affineur

$$F_{\omega\mu\lambda}^{***} = Q_{\alpha} \left( A_{\lambda}^{\alpha} *S_{\omega\mu}^{**} + \frac{1-n}{n^2 - n - 2} A_{\lambda}^{\gamma} *S_{\omega\mu}^{*\alpha} - \frac{2}{n^2 - n - 2} A_{[\omega}^{\gamma} *S_{\mu]\lambda}^{*\alpha} \right)$$

ne s'annule pas en général pour  $*S_{\mu\lambda}^{**} \neq 0$ .

Il s'ensuit le théorème suivant pour  $n \neq 1, 2$ :

*En général l'affineur*

$$W_{\omega\mu\lambda}^{***} = R_{\omega\mu\lambda}^{***} - 2A_{\lambda}^{\gamma} P_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^{\gamma} Q_{\mu]\lambda}$$

*n'est invariant par rapport aux transformations isohodoïques (2')* que si  $L_n$  est (semi-)symétrique.

REMARQUE. Ce théorème n'est valable que pour les transformations isohodoïques non-spéciales. Parce que l'affineur

$$F_{\omega\mu\lambda}^{***\alpha} = A_{\lambda}^{\alpha} *S_{\omega\mu}^{**} + \frac{1-n}{n^2 - n - 2} A_{\lambda}^{\gamma} *S_{\omega\mu}^{*\alpha} - \frac{2}{n^2 - n - 2} A_{[\omega}^{\gamma} *S_{\mu]\lambda}^{*\alpha}$$

est invariant par rapport à (2'), il s'ensuit que  $F_{\omega\mu\lambda}^{***} = F_{\omega\mu\lambda}^{***\alpha} Q_{\alpha}$  se transforme d'après

$$\bar{F}_{\omega\mu\lambda}^{***} = F_{\omega\mu\lambda}^{***} - F_{\omega\mu\lambda}^{***\alpha} q_{\alpha}.$$

Cette équation nous permet de trouver le mode de transformation de l'affineur  $W_{\omega\mu\lambda}^{***}$  correspondant à (2')

$$\bar{W}_{\omega\mu\lambda}^{***} = W_{\omega\mu\lambda}^{***} + 2F_{\omega\mu\lambda}^{***\alpha} q_{\alpha}.$$

Or, l'affineur  $W_{\omega\mu}^{\nu}$  est invariant par rapport aux transformations isohodoïques

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + p_{\mu} A_{\lambda}^{\nu}, \quad (2'')$$

même si  $*S_{\omega\mu}^{\nu} \neq 0$ . Le sens géométrique de cette transformation est bien évident. Si  $\bar{\delta}$  désigne le symbole de la différentielle covariante appartenant à (2''), la différence vectorielle

$$\bar{\delta}_{\nu} - \delta_{\nu}, \quad \bar{\delta}_{\omega\lambda} - \delta_{\omega\lambda}$$

est toujours dans la direction du vecteur  $\nu^{\omega}(\omega_{\lambda})$  arbitraire.

**7. DÉPLACEMENT SEMI-SYMÉTRIQUE.** Supposons que  $L_n$  soit semi-symétrique. Dans ce cas les équations (12) et (15) se simplifient

$$*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - 2A_{\lambda}^{\nu} p_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^{\nu} (p_{\mu]\lambda} - \nabla_{\mu} S_{\lambda}) \quad (12')$$

$$*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - 2A_{\lambda}^{\nu} *P_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^{\nu} *Q_{\mu]\lambda} = R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - 2A_{\lambda}^{\nu} P_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^{\nu} Q_{\mu]\lambda}. \quad (15')$$

On pourrait se demander si dans ce cas, il peut résulter le déplacement  $*L_n$  à courbure nulle? ( $*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = 0$ ). Pour pouvoir répondre affirmativement à cette question, il suffit évidemment de démontrer que les équations

$$\frac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = A_{\lambda}^{\nu} p_{[\omega\mu]} - A_{[\mu}^{\nu} (p_{\mu]\lambda} - \nabla_{\mu} S_{\lambda}) \quad (16)$$

$$p_{\mu\lambda} = \nabla_{\mu} P_{\lambda} - P_{\mu} Q_{\lambda} \quad (17)$$

ne sont pas incompatibles. Nous le démontrons en suivant un procédé analogue à celui dont M. Schouten s'est servi pour résoudre le problème: « Peut-on transformer isohodoïquement un déplacement *affine* en un déplacement projectif-euclidien ? » En tenant compte de (16), on trouve la condition d'intégrabilité complète de (17)

$$S_{\lambda} p_{[\omega\mu]} + S_{[\omega} p_{\mu]\lambda} = \nabla_{[\omega} p_{\mu]\lambda} \quad (18)$$

Pour  $n \neq 2$  cette équation est une conséquence de (16). En effet, l'identité de M. Bianchi, généralisée par M. Schouten

$$\nabla_{[\xi} R_{\omega\mu]\lambda}^{\nu} = - 2S_{[\omega\mu}^{\alpha} R_{\xi]\alpha\lambda}^{\nu}$$

nous donne

$$A_{\lambda}^{\nu} (2S_{[\omega} p_{\xi\mu]} - \nabla_{[\xi} p_{\mu]\omega}) + A_{[\mu}^{\nu} (S_{\omega} p_{\xi]\lambda} + \nabla_{\xi} p_{\omega]\lambda} + p_{\omega\xi} S_{\lambda}) = 0.$$

On en déduit moyennant la sommation d'après  $\lambda = \nu$

$$2S_{[\omega\mu]} p_{\mu\nu} = \nabla_{[\nu} p_{\omega\mu]} . \quad (19)$$

D'autre part, la sommation d'après  $\omega = \nu$  nous donne

$$2S_{[\lambda} p_{\nu\mu]} - \nabla_{[\nu} p_{\mu\lambda]} = \frac{n-2}{3} (\nabla_{[\mu} p_{\nu]\lambda]} - S_\lambda p_{[\mu\nu]} + S_{[\nu} p_{\mu]\lambda]})$$

ou bien, en tenant compte de (19) pour  $n \neq 2$

$$\nabla_{[\mu} p_{\nu]\lambda]} = S_\lambda p_{[\mu\nu]} + S_{[\nu} p_{\mu]\lambda]}$$

C'est précisément l'équation (18). On voit donc que l'équation (16) pour  $n \neq 2$  nous représente la condition nécessaire et suffisante pour que s'annule la quantité de courbure  $*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$ . Mais si (16) est valable et seulement dans ce cas, on a

$$P_{[\omega\mu]} = p_{[\omega\mu]} , \quad Q_{\mu\lambda} = q_{\mu\lambda} \quad (= p_{\mu\lambda} - \nabla_\mu S_\lambda) .$$

Il s'ensuit pour  $n \neq 2$ :

*Pour qu'on obtienne le déplacement  $*L_n$  à courbure nulle, il est nécessaire et suffisant que s'annule l'affineur*

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - 2A_\lambda^\nu P_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^\nu Q_{\mu]\lambda]} .$$

Ce n'est que dans ce cas que l'on a

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = *R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = 0 .$$

Il nous reste le cas exclu  $n = 2$ . Dans ce cas l'équation (16) peut être toujours résolue d'après  $p_{ab}$  ( $a, b = 1, 2$ ), mais (18) n'est pas en général la conséquence de (16). L'affineur  $*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$  ne s'annule donc que si (16), (17) et (18) sont satisfaites.

8. AFFINEURS ABSOLUS.  $*L_n$  n'est pas l'unique déplacement isohodoïque avec  $L_n$  qui soit indépendant de (2'). L'équation

$${}^+ \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = {}^* \Gamma_{\lambda\mu}^\nu + s_\lambda A_\mu^\nu + s_\mu A_\lambda^\nu , \quad \left( s_\nu = \frac{1}{n+1} \nabla_\mu \log s \right) \quad (8)$$

nous apprend qu'il y en a une infinité, selon le choix de la fonction  $s$ . La quantité de courbure  ${}^+ R_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$  d'un tel déplacement

se calcule par analogie comme la quantité de courbure du déplacement  $*L_n$ :

$${}^+R_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu} = {}^*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu} + 2A_{[\omega}^{\nu} s_{\mu]\lambda} + 2{}^*S_{\omega\mu}^{\nu\nu} s_{\lambda}, \quad s_{\mu\lambda} = {}^*\nabla_{\mu} s_{\lambda} - s_{\mu} s_{\lambda}. \quad (20)$$

La sommation d'après  $\omega = \nu$  nous donne

$${}^+R_{\mu\lambda} = {}^*R_{\mu\lambda} + (n-1)s_{\mu\lambda}. \quad (21)$$

L'élimination de  $s_{\mu\lambda}$  de (20) et (21) nous conduit à l'équation

$${}^+R_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu} - \frac{2}{n-1}A_{[\omega}^{\nu} {}^*R_{\mu]\lambda} = {}^*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu} - \frac{2}{n-1}A_{[\omega}^{\nu} {}^*R_{\mu]\lambda} + 2{}^*S_{\omega\mu}^{\nu\nu} s_{\lambda}.$$

Or, si  $L_n$  est (semi-)symétrique, l'affineur

$${}^*U_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu} = {}^*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu} - \frac{2}{n-1}A_{[\omega}^{\nu} {}^*R_{\mu]\lambda}$$

ne dépend pas du vecteur  $s_{\mu}$  dans  $*L_n$  et par cette raison même est indépendant du choix de la fonction  $g$ . Un tel affineur sera dit affineur *absolu*. Ce qui est curieux, c'est que de tels affineurs sont exprimables au moyen de  $\Phi_{\lambda\mu}^{\nu}$  comme si  $\Phi_{\lambda\mu}^{\nu}$  étaient les paramètres du déplacement. Nous en donnons trois exemples différents:

1<sup>o</sup>  $*S_{\lambda\mu}^{\nu\nu}$  est un affineur absolu. En effet, on a

$${}^*S_{\lambda\mu}^{\nu\nu} = {}^*\Gamma_{[\lambda\mu]}^{\nu} = {}^+\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Phi_{[\lambda\mu]}^{\nu}.$$

2<sup>o</sup> De même l'affineur  $*V_{\omega\mu}$  est un affineur absolu comme on déduit facilement

$$\begin{aligned} {}^*V_{\omega\mu} &= \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} {}^*\Gamma_{\alpha\omega}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\omega}} {}^*\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} {}^+\Gamma_{\alpha\omega}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\omega}} {}^+\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = \\ &= \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \Phi_{\alpha\omega}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\omega}} \Phi_{\alpha\mu}^{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

3<sup>o</sup> Pour exprimer  $*U_{\omega\mu\lambda}^{\nu\nu}$  avec  $\Phi_{\lambda\mu}^{\nu}$ , posons

$$\gamma_{\mu} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g, \quad \gamma_{\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \gamma_{\lambda} - \Phi_{\lambda\mu}^{\alpha} \gamma_{\alpha} - \gamma_{\mu} \gamma_{\lambda},$$

$$\rho_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \Phi_{\lambda\omega}^{\nu} - \frac{\partial}{\partial X^{\omega}} \Phi_{\lambda\mu}^{\nu} - \Phi_{\alpha\omega}^{\nu} \Phi_{\lambda\mu}^{\alpha} + \Phi_{\alpha\mu}^{\nu} \Phi_{\lambda\omega}^{\alpha}.$$

Cela étant la quantité de courbure  $*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$  est

$$*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \rho_{\omega\mu\lambda}^{\nu} + 2A_{[\omega}^{\nu}\gamma_{\mu]\lambda} + 2*S_{\omega\mu}^{\nu}\gamma_{\lambda}, \quad (22)$$

d'où l'on déduit par la sommation d'après  $\omega = \nu$

$$*R_{\mu\lambda} = \rho_{\mu\lambda} + (n-1)\gamma_{\mu\lambda}, \quad \rho_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \rho_{\mu\lambda}. \quad (23)$$

L'élimination de  $\gamma_{\mu\lambda}$  de (22) et (23) nous donne

$$*R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - \frac{2}{n-1}A_{[\omega}^{\nu}*R_{\mu]\lambda} = \rho_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - \frac{2}{n-1}A_{[\omega}^{\nu}\rho_{\mu]\lambda} + 2*S_{\omega\mu}^{\nu}\gamma_{\lambda}$$

et pour  $L_n$  (semi-)symétrique

$$*U_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \rho_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - \frac{2}{n-1}A_{[\omega}^{\nu}\rho_{\mu]\lambda}.$$

Mais il faut remarquer que les expressions  $\gamma_{\mu}$ ,  $\gamma_{\mu\lambda}$ ,  $\rho_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$ ,  $\rho_{\mu\lambda}$  ne sont affineurs que si le jacobien  $\Delta$  est constant.

9. DÉPLACEMENT  $L'_n$ . Décomposons les paramètres  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$  de  $L_n$ :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + S_{\lambda\mu}^{\nu}, \quad {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu})$$

et désignons par  ${}^0L_n$  le déplacement affine, fixé par  ${}^0\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ . Si  ${}^0R_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$  est sa quantité de courbure, on trouve facilement

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = {}^0R_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - S_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$$

avec

$$\frac{1}{2}S_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \nabla_{[\mu}S_{\omega]\lambda}^{\nu} + S_{\omega\mu}^{\alpha}S_{\alpha\lambda}^{\nu} + S_{\lambda[\mu}^{\alpha}S_{\omega]\alpha}^{\nu}.$$

Cela posé, on peut étudier le déplacement isohodoïque avec  $L_n$  qui est invariant par rapport à la transformation du déplacement

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + A_{\lambda}^{\nu}g_{\mu} + A_{\mu}^{\nu}g_{\lambda} + G_{[\lambda\mu]}^{\nu}, \quad (G_{[\lambda\mu]}^{\nu} \text{ = affneur non-spécial}). \quad (24)$$

On déduit de cette équation

$$\begin{aligned} G_{[\lambda\mu]}^{\nu} &= \bar{S}_{\lambda\mu}^{\nu} - S_{\lambda\mu}^{\nu} \\ g_{\mu} &= \frac{1}{n+1}[\bar{\Gamma}_{\omega\mu}^{\omega} - \bar{S}_{\omega\mu}^{\omega} - \Gamma_{\omega\mu}^{\omega} + S_{\omega\mu}^{\omega}] = \\ &\quad \frac{1}{n+1}[\bar{\Gamma}_{\mu\omega}^{\omega} - \bar{S}_{\mu\omega}^{\omega} - \Gamma_{\mu\omega}^{\omega} + S_{\mu\omega}^{\omega}]. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans (24), on trouve que les expressions

$$\Lambda_{\lambda\mu}^{\nu} = {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \frac{1}{n+1} A_{\lambda}^{\nu} {}^0\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} - \frac{1}{n+1} A_{\mu}^{\nu} {}^0\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}$$

sont invariantes par rapport aux transformations (24). Il s'ensuit que les expressions

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Lambda_{\lambda\mu}^{\nu} + \frac{1}{n+1} \left( A_{\lambda}^{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g + A_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial X^{\lambda}} \log g \right) \quad (25a)$$

peuvent être prises comme paramètres du déplacement cherché. Nous le désignerons par  $L'_n$ . On peut aussi écrire

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \frac{1}{n+1} \left[ A_{\lambda}^{\nu} \left( {}^0\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g \right) + A_{\mu}^{\nu} \left( {}^0\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\lambda}} \log g \right) \right] \quad (25b)$$

ou bien, en désignant par  $M_{\mu}$  le vecteur

$$M_{\mu} = - \frac{1}{n+1} \left( {}^0\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g \right)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + 2A_{(\lambda}^{\nu} M_{\mu)} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + A_{\lambda}^{\nu} M_{\mu} + A_{\mu}^{\nu} M_{\lambda} - S_{\lambda\mu}^{\nu} . \quad (25c)$$

Ce déplacement est symétrique et de plus isométrique. C'est ce que l'on voit aussitôt en cherchant  $\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}$  d'après (25b)

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = {}^0\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} - \frac{n}{n+1} \left( {}^0\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g \right) -$$

$$+ \frac{1}{n+1} \left( {}^0\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g \right) = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \log g .$$

Si  $\nabla'_{\mu}$  est le symbole de la dérivée covariante dans  $L'_n$ , on a pour un vecteur arbitraire  $v^{\nu}$  ou  $w_{\nu}$ ,

$$\nabla'_{\mu} v^{\nu} = \nabla_{\mu} v^{\nu} + v^{\nu} M_{\mu} + v^{\lambda} (A_{\mu}^{\nu} M_{\lambda} - S_{\lambda\mu}^{\nu}) ,$$

$$\nabla'_{\mu} w_{\lambda} = \nabla_{\mu} w_{\lambda} - w_{\lambda} M_{\mu} - w_{\mu} M_{\lambda} + S_{\lambda\mu}^{\nu} w_{\nu} .$$

Ces équations nous permettent de trouver la quantité de courbure  $R'_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$  de  $L'_n$ .

On obtient après un calcul facile

$$R'_{\omega\mu} = {}^0R_{\omega\mu\lambda} - 2A_\lambda^\nu m_{[\omega\mu]} + 2A_{[\omega}^\nu m_{\mu]\lambda}, \quad (26)$$

où

$$m_{\mu\lambda} = \nabla_\mu M_\lambda - M_\mu M_\lambda - S_{\mu\lambda}^\alpha M_\alpha.$$

L'élimination de  $m_{\mu\lambda}$  de l'équation (26) nous conduit à l'affineur

$${}^0R_{\omega\mu\lambda} - \frac{1}{n+1} A_\lambda^\nu {}^0V_{\omega\mu} - \frac{2}{n-1} A_{[\omega}^\nu \left( {}^0R_{\mu]\lambda} + \frac{1}{n+1} {}^0V_{\mu]\lambda} \right)$$

qui est invariant par rapport aux transformations (24).

Prague, septembre 1926.

## SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS

PAR

Arnold STREIT, Dr Phil. (Berne).

### INTRODUCTION.

Dans les développements, nous avons surtout utilisé des procédés trigonométriques. Ceux-ci nous ont permis de découvrir un certain nombre de théorèmes et quelques relations trigonométriques.

*Notations.* — Nous désignerons les sommets du triangle donné par A, B, C; les côtés opposés par  $a, b, c$ ; les angles correspondants par  $\alpha, \beta, \gamma$ ; les hauteurs par  $h', h'', h'''$ , leurs segments supérieurs par  $s', s'', s'''$  et les segments inférieurs par  $i', i'', i'''$ ; les segments déterminés par les hauteurs sur les côtés respectifs par  $a', a'', b', b'', c', c''$ ; le rayon du cercle inscrit par  $r$ , celui du cercle circonscrit par R et ceux des cercles ex-inscrits par  $r_a, r_b, r_c$ ; le périmètre par  $u$  et la surface par S.