

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Edm. Landau. — Vorlesungen über Zahlentheorie. 3 vol. in-8° à 20 M. le volume. Erster Band: Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie, 360 p. Zweiter Band: Aus der analytischen u. geometrischen Zahlentheorie, 308 p. Dritter Band: Aus der algebraischen Zahlentheorie und über die Fermatsche Vermutung, 341 p. — Les trois volumes reliés en un seul, 66 M.; Verlag S. Hirzel, Lei...

Autor: Mirimanoff, D.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

il montre, au contraire, le merveilleux caractère esthétique de toute la Science pour qui veut la voir d'un point de vue suffisamment élevé.

Notons l'hommage rendu à Charles Cailler, notre regretté collègue de Genève; il prouve à nouveau que la publication de l'*Introduction géométrique à la Mécanique* n'a pas été une œuvre vaine.

H. FEHR.

Edm. LANDAU. — **Vorlesungen über Zahlentheorie.** 3 vol. in-8° à 20 M. le volume. Erster Band: *Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie*, 360 p. Zweiter Band: *Aus der analytischen u. geometrischen Zahlentheorie*, 308 p. Dritter Band: *Aus der algebraischen Zahlentheorie und über die Fermatsche Vermutung*, 341 p. — Les trois volumes reliés en un seul, 66 M.; Verlag S. Hirzel, Leipzig, 1927.

Cet admirable ouvrage est, à quelques modifications près, la reproduction d'un cours sur la théorie des nombres que M. Landau a donné à l'Université de Göttingue pendant les années 1921-1924.

Écrit avec cet entrain et ce souci de la rigueur et de la précision extrêmes qui distinguent toutes les publications de M. Landau, il fera la joie des arithméticiens et contribuera à répandre parmi les jeunes le goût, devenu rare, des recherches arithmétiques. Car rien n'est passionnant comme cette course à travers un pays particulièrement beau avec un guide averti, qui, dans les parties les plus inaccessibles, a aidé à planter les premiers jalons et à tracer les premières voies.

On ne trouvera pas dans ce remarquable ouvrage un traité complet sur la théorie des nombres. Bien des théories et des questions isolées ont été laissées de côté. Mais les grands problèmes qui depuis Fermat ont fait le désespoir de tant d'arithméticiens, les théories nouvellement créées, à l'élaboration desquelles M. Landau a pris une part active lui-même, sont traités avec ampleur, et le lecteur est introduit dans les parties les plus belles de l'arithmétique moderne, à peine abordables il y a quelques années encore.

Il n'était certes pas facile d'exposer des recherches parfois très laborieuses des mathématiciens contemporains. Mais M. Landau réussit à les mettre à la portée des étudiants en fractionnant, suivant son habitude, les difficultés d'un raisonnement un peu long par une sorte de décomposition en éléments simples, que la pensée parcourt sans trop de fatigue.

Le premier volume débute par un exposé magistral des éléments de la théorie des nombres: théorie des congruences, résidus quadratiques, loi de réciprocité, équation de Pell. Le lecteur est initié aux belles méthodes arithmétiques créées par les géomètres du 18^{me} siècle et du commencement du 19^{me}. On sait qu'on n'a pas réussi à en tirer le fruit qu'on avait le droit d'espérer et que c'est surtout grâce à l'introduction des méthodes analytiques que depuis Dirichlet les progrès de l'arithmétique ont été si rapides.

Pour initier le lecteur à ces méthodes, M. Landau expose, en la simplifiant dans la mesure du possible, la belle démonstration du théorème sur la progression arithmétique que nous devons à Dirichlet, ainsi qu'un théorème très curieux de Brun sur les nombres premiers jumeaux, tels que 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, etc.

Et ce n'est qu'après une étude approfondie du problème classique de la représentation d'un nombre entier par une somme de deux, trois et quatre

carrés, cas particuliers du théorème de Waring, que l'auteur aborde la théorie des formes quadratiques et en particulier le problème difficile de la détermination des classes.

Dirichlet en a donné une solution d'une élégance rare, à l'aide d'une méthode analytique admirable, dont le lecteur, déjà préparé par l'étude de la progression arithmétique, saisira toute la beauté. Est-il possible d'arithmétiser, du moins partiellement, l'étude de ces problèmes ? Comme le fait remarquer M. Landau, des conséquences arithmétiques très simples, déjà indiquées par Dirichlet, découlent de ses formules finales, par exemple celle-ci : pour tout nombre premier p de la forme $4k + 3$, le nombre des résidus quadratiques compris entre 0 et p est supérieur au nombre des résidus compris entre $\frac{p}{2}$ et p . Or, personne n'a réussi jusqu'à présent à donner

de cette proposition si simple une démonstration purement arithmétique.

Le reste du volume est consacré à l'étude de deux grands problèmes : ceux de Goldbach et de Waring.

Un nombre entier pair est-il toujours décomposable en une somme de deux nombres premiers ? Goldbach le croyait. On le croit encore aujourd'hui, il est probable même que pour tout nombre pair > 2 l'assertion de Goldbach est également vraie au sens moderne (l'unité n'étant pas regardée comme un nombre premier).

La démonstration de cette proposition, en supposant qu'elle soit vraie, nous échappe encore et l'on est même porté à penser, avec M. Landau, que dans l'état actuel de la science, l'assertion de Goldbach peut être considérée comme indémontrable.

Récemment, MM. Hardy et Littlewood ont abordé ce problème à l'aide de méthodes nouvelles qu'ils ont introduites avec succès dans la théorie additive des nombres. S'ils ne sont pas arrivés à démontrer l'assertion de Goldbach, du moins ont-ils réussi à la relier asymptotiquement à d'autres propositions, indémontrées comme elle, dont les mathématiciens se sont beaucoup occupés depuis Riemann.

Il faut savoir gré à M. Landau d'avoir su mettre à la portée des jeunes les résultats des recherches profondes et laborieuses des analystes anglais, tâche ardue, à laquelle il était particulièrement bien préparé. Toute cette partie de l'ouvrage et la plupart de celles qui suivent portent la trace profonde de ses travaux personnels.

Mais passons au théorème de Waring sur la représentation des nombres entiers par une somme de $k^{\text{ièmes}}$ puissances, auquel M. Landau avait consacré lui-même des travaux importants, mais dont une démonstration générale n'a été donnée qu'en 1909 par M. Hilbert, démonstration aussitôt reprise, simplifiée et prolongée par les géomètres d'aujourd'hui.

C'est encore les recherches récentes de MM. Hardy et Littlewood (1922-1925) que M. Landau expose dans cette partie de son ouvrage. On sait que les mathématiciens anglais ont non seulement retrouvé le grand théorème de Waring-Hilbert, mais que leurs méthodes ont permis, entre autres résultats nouveaux, de donner une formule asymptotique importante pour le nombre de représentations d'un entier par une somme de $k^{\text{ièmes}}$ puissances.

Que la longueur des démonstrations, inévitable dans ces sortes de problèmes, ne décourage pas les jeunes lecteurs de l'ouvrage de M. Landau. Les perspectives nouvelles qui s'ouvriront devant eux leur feront vite oublier les fatigues de l'ascension.

En 1824, M. Winogradoff a publié une démonstration nouvelle sensiblement plus courte, mais lacunaire, du théorème de Waring-Hilbert, dont M. Landau, après l'avoir rétablie, a réussi à tirer une relation asymptotique extrêmement curieuse.

C'est par l'étude de ces recherches que se termine le premier volume. Je tiens à ajouter, pour donner une idée de la longueur du chemin parcouru, que ce volume contient 366 théorèmes et lemmes.

La première partie du second volume est consacrée à l'étude de quelques problèmes fondamentaux de la théorie analytique des nombres, surtout à celle du grand problème des nombres premiers. Dans cette partie de l'arithmétique, l'emploi de l'analyse est imposé par la nature même des problèmes que l'on y traite. Des méthodes analytiques singulièrement profondes ont dû être créées pour vaincre les difficultés qui s'opposaient à leur solution. A ce point de vue l'histoire du problème des nombres premiers, retracée à grands traits par M. Landau dans cet ouvrage et dans ses publications antérieures, est particulièrement intéressante. Déjà pressentie par Gauss vers 1793 et rendue probable par les travaux de Tchebycheff, l'expression asymptotique de $\pi(x)$ (nombre des nombres premiers $\leq x$) n'a pu être rigoureusement établie sous sa forme la plus simple qu'en 1896 par MM. de la Vallée-Poussin et Hadamard, grâce aux méthodes analytiques puissantes introduites dans l'intervalle par Cauchy, Weierstrass et Riemann. Depuis 1896 des progrès nouveaux ont été réalisés dans cette voie. M. Landau fait connaître l'expression asymptotique de $\pi(x)$ obtenue par M. de la Vallée-Poussin en 1899 et celle toute récente et plus précise encore donnée en 1924 par M. Littlewood. M. Landau réussit à les établir d'une manière beaucoup plus simple, sans s'appuyer sur certaines propriétés de la fonction de Riemann utilisées par MM. de la Vallée-Poussin et Littlewood. Sa méthode lui fournit en même temps des expressions asymptotiques analogues de la fonction plus générale $\pi(x; k, l)$, dont la première avait été donnée par l'auteur en 1909.

Les chapitres suivants sont consacrés à une étude approfondie de la fonction de Riemann et des problèmes qui s'y rattachent.

C'est pour la première fois, si je ne me trompe, que les recherches provoquées par le fameux mémoire de Riemann sont exposées d'une manière aussi complète. Le grand « Handbuch » de M. Landau ne va pas au delà de 1908 et depuis cette époque la théorie de la fonction de Riemann a fait des progrès considérables. Bien des démonstrations ont été simplifiées par M. Landau lui-même, des propriétés nouvelles inattendues ont été révélées par MM. Bohr, Landau, Hardy et Littlewood, et si l'on n'a pas encore réussi à établir la fameuse assertion de Riemann, nous savons maintenant que la

fonction de Riemann a une infinité de zéros situés sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ (théorème de Hardy, dont MM. Hardy et Littlewood ont donné récemment une démonstration particulièrement simple et belle). M. Franel a réussi, d'autre part, à relier l'assertion de Riemann à la théorie des suites de Farey. Tous ces beaux résultats sont établis à l'aide de méthodes dont on ne saurait assez admirer l'ingéniosité et la profondeur.

C'est à l'étude de quelques-uns des grands problèmes de la théorie géométrique des nombres qu'est consacré le reste de ce volume.

Quelle est l'expression asymptotique du nombre des points à coordonnées entières intérieurs à un domaine ?

M. Landau se borne à l'étude de ce problème fondamental et de quelques questions connexes, en s'arrêtant surtout sur le fameux problème du cercle. On sait qu'une première approximation avait déjà été donnée par Gauss, mais des résultats plus précis, parfois déconcertants, n'ont été obtenus que dans ces dernières années. Ici encore la part de M. Landau a été des plus considérables. Non seulement il a réussi à perfectionner des méthodes déjà connues, comme celles de Piltz et de Pfeiffer, mais il en a créé de nouvelles. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de M. Landau un exposé magistral des résultats obtenus dans cette voie depuis Gauss jusqu'à Voronoï et les géomètres contemporains, parmi lesquels il faut citer en première ligne, à côté de M. Landau, MM. Sierpinski, Hardy, van der Corput, Winogradoff et Jarnik.

Mais passons au volume III, consacré à cette admirable théorie des nombres algébriques que nous devons à Kummer et à Dedekind et qui trouve encore son origine dans les travaux de Gauss, en particulier dans sa théorie de la composition des formes quadratiques.

Quelles sont les lois de cette arithmétique nouvelle ?

M. Landau nous l'apprend, après avoir montré sur des exemples simples que les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique classique ne s'appliquent pas toujours aux nombres nouveaux. Dans les domaines plus larges qu'on est conduit à envisager ici, la divisibilité semble n'obéir à aucune loi, et il fallait le génie de Kummer et de Dedekind pour introduire l'ordre et l'harmonie dans ce désordre apparent. M. Landau consacre plusieurs chapitres du plus haut intérêt à l'étude des corps algébriques et à la théorie des idéaux de Dedekind, qu'il simplifie et modernise de la manière la plus heureuse. Il introduit en passant les notions si importantes de nombres et de corps algébriques relatifs, sur lesquelles il aura à s'appuyer dans l'étude du dernier théorème de Fermat.

La beauté et l'importance des conceptions de Dedekind éclatent dans la théorie des corps quadratiques, qui forme le sujet des trois chapitres suivants. M. Landau souligne le parallélisme qui subsiste entre cette théorie et celle des formes quadratiques, parallélisme qui éclaire d'un jour nouveau la théorie classique de Gauss.

Un paragraphe intéressant, sans lien apparent avec la théorie des nombres algébriques, est intercalé par M. Landau dans l'un des premiers chapitres de ce volume. Ce paragraphe, un peu long et assez difficile à lire, est consacré au théorème de Thue précisé par Siegel et aux propositions si curieuses de Landau-Ostrowski et de Pólya qui s'y rattachent, propositions relativement peu connues encore, malgré le grand intérêt qu'elles présentent. Dans un autre paragraphe, intercalé dans le même chapitre, le lecteur trouvera une démonstration élégante de la transcendance des nombres e et π .

Le reste du volume est consacré au dernier théorème de Fermat.

Dans ce domaine les résultats les plus brillants ont été obtenus par Kummer, à l'aide d'une méthode célèbre qui repose sur la théorie des nombres idéaux, à laquelle le théorème de Fermat a du reste servi de prétexte. M. Landau établit ici le résultat principal obtenu par le grand géomètre allemand, dont la démonstration complète n'a été exposée qu'une seule fois, avant M. Landau, par M. Hilbert dans son « *Zahlbericht* », où elle est rattachée à des théories plus générales. Le point délicat de l'analyse de Kummer est une propriété très curieuse des unités du corps envisagé dans cette théorie, qu'ordinairement on se borne à énoncer, mais que M. Landau

établit rigoureusement, en simplifiant dans la mesure du possible les raisonnements de Kummer et de M. Hilbert.

Depuis Kummer l'étude de l'équation de Fermat a fait l'objet de nombreuses recherches. Dans ses leçons, M. Landau se borne à établir le fameux critère de Wieferich et les critères analogues que M. Furtwängler a réussi à déduire de la loi de réciprocité d'Eisenstein, et dans le dernier chapitre il fait connaître un théorème intéressant de M. Vandiver.

Nous voici arrivés au terme de notre voyage. Est-il besoin de dire combien cet ouvrage si vivant, où à chaque page éclate la science la plus profonde et la plus sûre, pourra nous être utile ? En montrant ce qui a été fait et ce qu'il reste à faire, il facilitera singulièrement l'étude des grands problèmes de l'arithmétique moderne, et qui sait si, grâce à lui, un avenir prochain n'apportera pas les solutions qui nous échappent encore.

D. MIRIMANOFF (Genève).

E. LANDAU. — **Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.** Zweite auflage. — 1 vol. in-8°, VII-147 p.; M. 6,40; B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1927.

Dans cet excellent petit livre, dont la première édition a paru en 1917, M. Landau, rappelons-le, a pour but de mettre à la portée des étudiants les éléments de la théorie des nombres algébriques de Dedekind et d'autre part de faire connaître aux jeunes les points essentiels de la théorie analytique des idéaux, en particulier son beau théorème des idéaux premiers qu'il a découvert en 1903.

Très clair et facile à lire, ce volume ne suppose chez le lecteur aucune préparation spéciale.

La seconde édition qui vient de paraître marque un progrès notable sur la première. Le lecteur n'est plus renvoyé au grand « Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen » du même auteur; des démonstrations plus simples, parfois entièrement nouvelles, sont données de certaines propositions de la partie analytique du livre, notamment d'un théorème classique de M. Hadamard, et les indications bibliographiques sont complétées. Nous pouvons recommander vivement ce petit volume aux lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*.

D. MIRIMANOFF (Genève).

L. BIEBERBACH. — **Lehrbuch der Funktionentheorie.** Band II: *Moderne Funktionentheorie*. — 1 vol. in-8°, VII-366 pages; relié M. 20; Verlag B.G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1927.

Après une très intéressante « Theorie der Differentialgleichungen » dont la première édition a été analysée ici-même, M. Bieberbach nous offre aujourd'hui le second volume, impatientement attendu, de son « Lehrbuch der Funktionentheorie », consacré à la théorie moderne des fonctions d'une variable complexe. Nous avons déjà dit le vif plaisir que nous avons eu à lire le premier volume de cet ouvrage, paru il y a six ans environ. Le second nous apporte une synthèse originale des recherches modernes sur la théorie des fonctions. C'est, si je ne me trompe, pour la première fois que paraît un exposé aussi complet des théories nouvelles, dont la plupart ont vu le