**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 26 (1927)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES GÉODÉSIQUES DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES
**Autor:** Roussel, André
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-21249

# SUR LES GÉODÉSIQUES DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES

PAR

André Roussel (Poitiers).

---

Le but de cet article est de montrer, qu'étant donné un élément linéaire:

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2 ,$$

où les fonctions E, F, G sont continues, satisfont aux relations:

$$E > 0 \qquad EG - F^2 > 0 , \qquad G > 0 , \qquad (1)$$

et à une condition de Lipschitz d'ordre arbitraire, il est toujours possible de définir une géodésique joignant deux points $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ arbitraires qui jouira de la propriété suivante: *elle admettra partout une tangente variant d'une façon continue.*

Soit dans le plan des $(u, v)$ un domaine D simplement connexe, limité par un contour $\Gamma$ dont tous les points appartiennent à D. Prenons dans D deux points A et B, et considérons toutes les courbes rectifiables joignant A à B intérieures à D. Soit C l'une d'elle, $s$ la longueur de l'arc allant de A à son point courant. Le problème que nous nous proposons consiste à chercher s'il existe une courbe $C_0$ fournissant le minimum de l'intégrale:

$$J_c = \int_c \sqrt{E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\, ds$$

et à étudier ses propriétés. O $J_c$ est *semi-continue inférieure* et la quantité sous le signe intégral est positive au sens strict. La méthode directe d'Hilbert-Lebesgue [1] et le théorème de M. Tonelli montrent immédiatement qu'il existe une courbe $C_0$ rectifiable fournissant l'extremum cherché. Nous nous proposons de montrer, en outre, que $C_0$ admet partout une tangente variant avec continuité pourvu que ni A ni B ne soient sur le contour $\Gamma$ limitant D et soient assez près l'un de l'autre.

En vertu de (1) on pourra trouver trois nombres $\mu$, $\nu$, $\xi$ tels que l'on ait dans D:

$$E > \mu > 0 \ , \qquad EG - F^2 > \nu > 0 \ , \qquad G > \xi > 0 \ .$$

Or, nous avons:

$$\left|\frac{du}{ds}\right| \leqq 1 \ , \qquad \left|\frac{dv}{ds}\right| \leqq 1 \ ;$$

il existera donc deux nombres positifs $m$ et M tels que:

$$0 < m < \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} < M \ ,$$

d'où, L étant la longueur de C,

$$mL < J_C < ML \ ; \tag{2}$$

par suite, si $\delta$ est la plus courte distance de A à $\Gamma$, en prenant B assez voisin de A pour que

$$AB < \frac{m}{M}\delta \ ,$$

on aura pour toute courbe C d'origine A et ayant au moins un point sur $\Gamma$:

$$J_C > J_{AB} \ .$$

Il en résulte immédiatement que la courbe extrémale $C_0$ joignant AB est toute entière intérieure au sens strict au domaine D. Nous nous placerons désormais dans ce cas. Soient $p_1$ et $p_2$ deux points de $C_0$. Nous avons:

$$J_{\overline{p_1p_2}} \geqq J_{\smile{p_1p_2}}$$

---

[1] Cf. Leonida Tonelli. Fundamenti di Calcolo delle Variazioni (t. I, p. 292 et t. II, p. 5 à 8), Zanichelli, éditeur. — Voir aussi: A. Roussel: Recherches sur le Calcul des Variations (Thèse), *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, pages 398 à 403 et p. 416 à 422.

et par suite, d'après (2):

$$\mathrm{M} \times \text{corde } p_1 p_2 > m \times \text{arc } p_1 p_2$$

ou:

$$\frac{\text{arc } \widehat{p_1 p_2}}{\text{corde } p_1 p_2} < \frac{\mathrm{M}}{m} ; \tag{3}$$

ceci posé, soit $p_1$, $p_2$, $p_3$ trois points de $\mathrm{C}_0$ d'abscisses

$$s_1 < s_2 < s_3 .$$

Soit $(u_0, v_0)$ un point du segment de droite $p_1 p_3$. Posons:

$$\mathrm{E}(u_0, v_0) = \alpha ; \qquad \mathrm{F}(u_0, v_0) = \beta ; \qquad \mathrm{G}(u_0, v_0) = \gamma .$$

Désignons par $\lambda$ la distance de $p_1$ à $p_3$, et posons encore:

$$\mathrm{J}'_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2}\, ds .$$

A tout nombre positif $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre positif $\lambda_0$ tel que si

$$\lambda \leqq \lambda_0$$

on ait:

$$\begin{array}{ll} \left| \mathrm{J}_{\overline{p_1 p_2}} - \mathrm{J}'_{\overline{p_1 p_2}} \right| < k\lambda\varepsilon , & \left| \mathrm{J}_{\overline{p_2 p_3}} - \mathrm{J}'_{\overline{p_2 p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon , \\ \left| \mathrm{J}_{\overline{p_1 p_3}} - \mathrm{J}'_{\overline{p_1 p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon , & \left| \mathrm{J}_{\smile p_1 p_3} - \mathrm{J}'_{\smile p_1 p_3} \right| < k\lambda\varepsilon . \end{array} \tag{4}$$

cela résulte de la continuité de E, F, G et de l'inégalité (3). Désignons par $\theta_0$ l'angle de direction de la corde $p_1 p_3$. Nous allons comparer les intégrales:

$$\mathrm{J}'_{\smile p_1 p_3} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}'_{\overline{p_1 p_3}} .$$

Posons:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \frac{u'(\alpha \cos\theta_0 + \beta \sin\theta_0) + v'(\beta \cos\theta_0 + \gamma \sin\theta_0)}{\sqrt{\alpha \cos^2\theta_0 + 2\beta \cos\theta_0 \sin\theta_0 + \gamma \sin^2\theta_0}}\, ds .$$

On obtient cette intégrale en substituant au cône

$$z = \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2} ,$$

son plan tangent au point ($u' = \cos \theta_0$, $v' = \sin \theta_0$). Comme le cône tourne sa concavité vers les $z$ positifs, on aura:

$$J'_{C} \geqq I_{C} \quad \text{et} \quad J'_{\overline{p_1 p_3}} = I_{\overline{p_1 p_3}}$$

où dans I l'expression sous le signe intégral est une différentielle exacte. On aura donc:

$$J'_{\smile_\sigma} - J'_{\overline{p_1 p_3}} = J'_{\smile_\sigma} - I_{\overline{p_1 p_3}} = J'_{\smile_\sigma} - I_{\smile p_1 p_3} = \Delta \tag{5}$$

le notation $\overset{\smile}{\sigma}$ désignant *un arc quelconque* joignant $p_1$ à $p_3$. Nous allons d'abord établir la relation:

$$\Delta > k_1 \int_{\smile_\sigma} \sin^2 (\theta - \theta_0)\, ds \tag{6}$$

où $K_1$ désigne une constante numérique et $\theta$ ($s$) l'angle de direction de la tangente à $\overset{\smile}{\sigma}$ au point de cet arc d'abscisse curviligne $s$. Or on a une identité de la forme:

$$\Delta = \int_{\smile_\sigma} \Delta_1\, ds$$

et l'on voit immédiatement que l'on a:

$$\begin{aligned}\Delta_1 \geqq\ & k' (\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \gamma y'^2)(\alpha x_0'^2 + 2\beta x'_0 y'_0 + \gamma y_0'^2) \\ & - k\{x'(\alpha x'_0 + \beta y'_0) + y'(\beta x'_0 + \gamma y'_0)\}^2 \\ \equiv\ & A x'^2 + 2B x'y' + C y'^2 \equiv F(x', y')\end{aligned}$$

$$(x' = \cos \theta,\quad y' = \sin' \theta,\quad x'_0 = \cos \theta_0,\ y'_0 = \sin \theta_0)$$

Alors les relations:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\ ; \qquad B = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}\ ; \qquad C = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$$

donnent sans peine:

$$\begin{aligned} A &= (\alpha\gamma - \beta^2) y_0'^2\ , \\ B &= -(\alpha\gamma - \beta^2) x_0' y_0'\ , \\ C &= (\alpha\gamma - \beta^2) x_0'^2\ , \end{aligned}$$

et:

$$F = k'(\alpha\beta - \gamma^2)\,[\cos^2\theta \sin^2\theta_0 - 2 \sin\theta \sin\theta_0 \cos\theta \cos\theta_0 + \sin^2\theta \cos^2\theta_0]\ ,$$

où:

$$F = k'(\alpha\beta - \gamma^2) \sin^2(\theta - \theta_0) . \qquad (k' > 0)$$

D'où l'inégalité (6), qui nous montre d'abord que l'intégrale J' prise le long de toute courbe joignant deux points est plus grande que si on la prend le long du segment de droite qu'ils limitent.

Nous avons donc:

$$J'_{\smile p_1 p_3} \geqq J'_{\overline{p_1 p_2}} + J'_{\overline{p_2 p_3}} \qquad \text{et:}$$

$$J'_{\smile p_1 p_3} - J'_{\overline{p_1 p_3}} \geqq J'_{\smile\sigma} - J'_{\overline{p_1 p_3}} = \Delta , \qquad (7)$$

en prenant pour $\smile_\sigma$ la ligne brisée $p_1 p_2 p_3$. Désignons par $\theta_1$ et $\theta_2$ les angles de direction des côtés $p_1 p_2$ et $p_2 p_3$. Il vient d'après (6):

$$\Delta \geqq k_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_0) \times \overline{p_1 p_2} + k_1 \sin^2(\theta_2 - \theta_0) \times \overline{p_2 p_3} \cdot$$

Revenons aux inégalités (4). Nous en tirons, en les comparant avec (7), la relation suivante:

$$J_{\smile p_1 p_3} - J_{\overline{p_1 p_3}} > k_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_0) \cdot \overline{p_1 p_2} + k_1 \sin^2(\theta_2 - \theta_0) \times \overline{p_2 p_3} - 2k\lambda\varepsilon$$

le premier membre de cette inégalité est négatif; il en est donc de même du second et l'on en déduit:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2(\theta_1 - \theta_0) &< k'_1 \frac{\lambda}{\overline{p_1 p_2}} \varepsilon , \qquad (\lambda = \overline{p_1 p_3}) \\ \sin^2(\theta_2 - \theta_0) &< k'_1 \frac{\lambda}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon . \end{aligned} \right\} \qquad (8)$$

Je dis alors que:

1° Si l'on a:

$$\frac{\overline{p_1 p_2}}{\overline{p_2 p_3}} < 1 ,$$

l'angle $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ tend vers zéro avec $\lambda$.

2° Si:

$$\frac{\overline{p_2 p_3}}{\overline{p_1 p_2}} < 1 ,$$

l'angle $\widehat{p_2 p_1 p_3}$ tendra vers zéro avec $\lambda$.

3° Enfin s'il existe un nombre M donné une fois pour toutes tel que

$$\frac{1}{M} < \frac{\overline{p_1 p_3}}{\overline{p_1 p_2}} < M , \tag{9}$$

les angles $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ et $\widehat{p_2 p_1 p_3}$ tendent simultanément vers zéro.

En effet la seconde inégalité (8) donne:

$$\sin^2 \widehat{p_1 p_3 p_2} < k'_1 \frac{\overline{p_1 p_3}}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon < k'_1 \frac{\overline{p_1 p_2} + \overline{p_2 p_3}}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon < (k'_1 + 1) \varepsilon ,$$

or il est clair que l'angle $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ est aigu puisque $\overline{p_1 p_2}$ est plus petit que $\overline{p_2 p_3}$. Donc $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ tend bien vers zéro. La démonstration du second cas est alors identique à la précédente. Passons au cas où les inégalités (9) sont satisfaites. Le système (8) montre alors que $\sin \widehat{p_1 p_3 p_2}$ et $\sin \widehat{p_2 p_1 p_3}$ tendent simultanément vers zéro, et notre proposition sera établie si nous montrons qu'aucun des deux angles $\widehat{p_1 p_3 p_2}$ et $\widehat{p_2 p_1 p_3}$ n'est obtus quand $\overline{p_1 p_3} = \lambda$ est assez petit. En effet, dans le cas contraire, si nous considérons l'intégrale

$$J' = \int \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2}\, ds ,$$

il est clair que sa valeur le long du contour $p_1 p_2 p_3$ dépassera sa valeur le long de $\overline{p_1 p_3}$ d'une quantité du même ordre de grandeur que $\lambda$, qui par suite ne pourra devenir négative quand on en retranchera un infiniment petit du second ordre $2K\lambda\varepsilon$. Ceci posé nous allons montrer que $C_0$ admet partout une tangente variant avec continuité. Soit en effet M, $M_1$, $M_2$ trois points de $C_0$ d'abscisses curvilignes respectivement égales à $s$, $s - h$, $s + h$; désignons par $\theta_1$, $\theta_2$ les angles de direction des côtés $M_1 M$, $MM_2$. La différence: $|\theta_2 - \theta_1|$ tend vers zéro avec $h$ ainsi qu'il résulte de l'inégalité (3) et de ce que nous venons de voir plus haut.

Faisons maintenant intervenir l'hypothèse faite au début, et qui porte que les fonctions E, F, G satisfont chacune à une condition de Lipschitz d'ordre arbitraire: $0 < \alpha_i \leqq 1$. On voit facilement d'après les inégalités (8) que l'on a une relation de la forme:

$$|\theta_2 - \theta_1| < kh^{\mu}$$

$k$ étant une constante, $\mu$ un nombre positif compris entre 0 et 1. On aura donc aussi :

$$|\cos \theta_2 - \cos \theta_1| < kh^{\mu} \qquad |\sin \theta_2 - \sin \theta_1| < kh^{\mu}$$

On montrerait facilement alors, en employant la méthode analogue à celle utilisée dans le cas d'uue fonction d'une variable (*cf.* P. Montel, Sur les polynomes d'approximations. Bull. Soc. Math. Fran. 1918) qu'on peut former deux polynomes $P_n(s)$ et $Q_n(s)$ représentant respectivement $u_0(s)$ et $v_0(s)$ avec une approximation:

$$\rho < \frac{A}{n^{1+\alpha}}$$

Alors $u_0(s)$ et $v_0(s)$ admettent des dérivées $u_0'(s)$, $v_0'(s)$ continues.

---

# SUR LES DÉPLACEMENTS ISOHODOÏQUES

PAR

V. Hlavatý (Prague).

---

1. Exposition[1]. Désignons par $X^{\nu}$ les $n$ paramètres d'une variété à $n(> 1)$ dimensions, par $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(\neq \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})$ les $n^3$ paramètres de son déplacement, que nous désignons par $L_n$. Il est bien connu que pendant la transformation des paramètres X (au jacobien $\Delta \neq 0$)

$$X = X('X) \tag{1}$$

les $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ se transforment d'après

$$'\Gamma^{\rho}_{\omega\pi} = \frac{\partial 'X^{\rho}}{\partial X^{\nu}}\left(\frac{\partial X^{\lambda}}{\partial 'X^{\omega}}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial 'X^{\pi}}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 X^{\nu}}{\partial 'X^{\omega}\,\partial 'X^{\pi}}\right).$$

[1] Nous employons la symbolique de M. Schouten, exposée dans son livre *Der Ricci-Kalkül*. Berlin, 1924.