Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES GÉODÉSIQUES DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES

Autor: Roussel, André

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-21249

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# SUR LES GÉODÉSIQUES DE CERTAINS ÉLÉMENTS LINÉAIRES

PAR

### André Roussel (Poitiers).

Le but de cet article est de montrer, qu'étant donné un élément linéaire:

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2$$
.

où les fonctions E, F, G sont continues, satisfont aux relations:

$$E > 0$$
  $EG - F^2 > 0$ ,  $G > 0$ , (1)

et à une condition de Lipschitz d'ordre arbitraire, il est toujours possible de définir une géodésique joignant deux points  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$  arbitraires qui jouira de la propriété suivante: elle admettra partout une tangente variant d'une façon continue.

Soit dans le plan des (u, v) un domaine D simplement connexe, limité par un contour  $\Gamma$  dont tous les points appartiennent à D. Prenons dans D deux points A et B, et considérons toutes les courbes rectifiables joignant A à B intérieures à D. Soit C l'une d'elle, s la longueur de l'arc allant de A à son point courant. Le problème que nous nous proposons consiste à chercher s'il existe une courbe  $C_0$  fournissant le minimum de l'intégrale:

$$J_{c} = \int_{c} \sqrt{E\left(\frac{du}{ds}\right)^{2} + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^{2}} ds$$

et à étudier ses propriétés. O  $J_c$  est semi-continue inférieure et la quantité sous le signe intégral est positive au sens strict. La

méthode directe d'Hilbert-Lebesgue  $^1$  et le théorème de M. Tonelli montrent immédiatement qu'il existe une courbe  $C_0$  rectifiable fournissant l'extremum cherché. Nous nous proposons de montrer, en outre, que  $C_0$  admet partout une tangente variant avec continuité pourvu que ni A ni B ne soient sur le contour  $\Gamma$  limitant D et soient assez près l'un de l'autre.

En vertu de (1) on pourra trouver trois nombres  $\mu, \nu, \xi$  tels que l'on ait dans D:

$$E>\mu>0$$
 ,  $\quad EG-F^2>\nu>0$  ,  $\quad G>\xi>0$  .

Or, nous avons:

$$\left|\frac{du}{ds}\right| \leq 1$$
,  $\left|\frac{dv}{ds}\right| \leq 1$ ;

il existera donc deux nombres positifs m et M tels que:

$$0 < m < \sqrt{Eu'^2 + 2Eu'v' + Gv'^2} < M$$
,

d'où, L étant la longueur de C,

$$mL < J_c < ML$$
; (2)

par suite, si  $\delta$  est la plus courte distance de A à  $\Gamma$ , en prenant B assez voisin de A pour que

$$AB < \frac{m}{M} \delta$$
 ,

on aura pour toute courbe C d'origine A et ayant au moins un point sur  $\Gamma$ :

$$J_{C} > J_{AB}$$
.

Il en résulte immédiatement que la courbe extrémale  $C_0$  joignant AB est toute entière intérieure au sens strict au domaine D. Nous nous placerons désormais dans ce cas. Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points de  $C_0$ . Nous avons:

$$J_{\underline{p_1p_2}} \ge J_{\underline{p_1p_2}}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Cf. Leonida Tonelli. Fundamenti di Calcolo delle Variazioni (t. I, p. 292 et t. II, p. 5 à 8), Zanichelli, éditeur. — Voir aussi: A. Roussel: Recherches sur le Calcul des Variations (Thèse), Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. V, pages 398 à 403 et p. 416 à 422.

et par suite, d'après (2):

 $M \times \text{corde } p_1 p_2 > m \times \text{arc } p_1 p_2$ 

ou:

$$\frac{\operatorname{arc} p_1 p_2}{\operatorname{corde} p_1 p_2} < \frac{M}{m} ; \qquad (3)$$

ceci posé, soit p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, p<sub>3</sub> trois points de C<sub>0</sub> d'abscisses

$$s_1 < s_2 < s_3$$
.

Soit  $(u_0, v_0)$  un point du segment de droite  $p_1$   $p_3$ . Posons:

$$E(u_0, v_0) = \alpha;$$
  $F(u_0, v_0) = \beta;$   $G(u_0, v_0) = \gamma$ .

Désignons par  $\lambda$  la distance de  $p_1$  à  $p_3$ , et posons encore:

$$J'_{c} = \int_{c} \sqrt{\alpha u'^{2} + 2 \beta u'v' + \gamma v'^{2}} ds$$
.

A tout nombre positif  $\epsilon$  on peut faire correspondre un nombre positif  $\lambda_0$  tel que si

$$\lambda \leq \lambda_0$$

on ait:

$$\left| \begin{array}{c} J_{\overline{p_1p_2}} - J'_{\overline{p_1p_2}} \right| < k\lambda\varepsilon , \qquad \left| \begin{array}{c} J_{\overline{p_2p_3}} - J'_{\overline{p_2p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon , \\ \left| J_{\overline{p_1p_3}} - J'_{\overline{p_1p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon , \qquad \left| J_{\overline{p_1p_3}} - J'_{\overline{p_1p_3}} \right| < k\lambda\varepsilon . \end{array} \right.$$

$$(4)$$

cela résulte de la continuité de E, F, G et de l'inégalité (3). Désignons par  $\theta_0$  l'angle de direction de la corde  $p_1 p_3$ . Nous allons comparer les intégrales:

$$J' \underbrace{\hspace{1cm}}_{p_1 p_3} \quad \text{et} \quad J' \underbrace{\hspace{1cm}}_{p_1 p_3} \ .$$

Posons:

$$I_{C} = \int \frac{u'(\alpha \cos \theta_{0} + \beta \sin \theta_{0}) + v'(\beta \cos \theta_{0} + \gamma \sin \theta_{0})}{\sqrt{\alpha \cos^{2} \theta_{0} + 2\beta \cos \theta_{0} \sin \theta_{0} + \gamma \sin^{2} \theta_{0}}} ds .$$

On obtient cette intégrale en substituant au cône

$$z = \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2},$$

son plan tangent au point  $(u' = \cos \theta_0, v' = \sin \theta_0)$ . Comme le cône tourne sa concavité vers les z positifs, on aura:

$$J'_{C} \geq I_{C}$$
 et  $J'_{p_1p_3} = I_{p_1p_3}$ 

où dans I l'expression sous le signe intégral est une différentielle exacte. On aura donc:

$$J'_{\sigma} - J'_{\overline{p_1 p_3}} = J'_{\sigma} - I_{\overline{p_1 p_3}} = J'_{\sigma} - I_{\overline{p_1 p_3}} = \Delta$$
 (5)

le notation  $\sigma$  désignant un arc quelconque joignant  $p_1$  à  $p_3$ . Nous allons d'abord établir la relation:

$$\Delta > k_1 \int_{\sigma} \sin^2 \left(\theta - \theta_0\right) ds \tag{6}$$

où  $K_1$  désigne une constante numérique et  $\theta$  (s) l'angle de direction de la tangente à  $\sigma$  au point de cet arc d'abscisse curviligne s. Or on a une identité de la forme:

$$\Delta = \int_{\underline{\cdot}} \Delta_{i} ds$$

et l'on voit immédiatement que l'on a:

$$\Delta_{1} \geq k' (\alpha x'^{2} + 2 \beta x' y' + \gamma y'^{2}) (\alpha x_{0}'^{2} + 2 \beta x'_{0} y'_{0} + \gamma y_{0}'^{2})$$

$$- k \{ x' (\alpha x'_{0} + \beta y'_{0}) + y' (\beta x'_{0} + \gamma y'_{0}) \}^{2}$$

$$\equiv A x'^{2} + 2B x' y' + C y'^{2} \equiv F(x', y')$$

$$(x' = \cos \theta, y' = \sin' \theta, x'_{0} = \cos \theta_{0}, y'_{0} = \sin \theta_{0})$$

Alors les relations:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x'^2}; \qquad B = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x' \delta y'}; \qquad C = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta y'^2}$$

donnent sans peine:

A = 
$$(\alpha \gamma - \beta^2) y_0'^2$$
,  
B =  $-(\alpha \gamma - \beta^2) x_0' y_0'$ ,  
C =  $(\alpha \gamma - \beta^2) x_0'^2$ ,

et:

 $F \,=\, k'\,(\alpha\,\beta\,-\,\gamma^2)\,[\cos^2\theta\,\sin^2\theta_0\,-\,2\,\sin\theta\,\sin\theta_0\,\cos\theta\cos\theta_0\,+\,\sin^2\theta\cos^2\theta_0] \ ,$ 

où:

$$F = k'(\alpha \beta - \gamma^2) \sin^2(\theta - \theta_0) . \qquad (k' > 0)$$

D'où l'inégalité (6), qui nous montre d'abord que l'intégrale J' prise le long de toute courbe joignant deux points est plus grande que si on la prend le long du segment de droite qu'ils limitent.

Nous avons donc:

$$J'_{p_1p_3} \ge J'_{p_1p_2} + J'_{p_2p_3} \quad \text{et:}$$

$$J'_{p_1p_3} - J'_{p_1p_3} \ge J'_{\sigma} - J'_{p_1p_3} = \Delta , \qquad (7)$$

en prenant pour  $\tilde{a}$  la ligne brisée  $p_1$   $p_2$   $p_3$ . Désignons par  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles de direction des côtés  $p_1$   $p_2$  et  $p_2$   $p_3$ . Il vient d'après (6):

$$\Delta \, \geq \, k_{\mathrm{l}} \, \sin^2(\theta_{\mathrm{l}} \, - \, \theta_{\mathrm{o}}) \, \times \, \overline{p_{\mathrm{l}} \, p_{\mathrm{l}}} \, + \, k_{\mathrm{l}} \, \sin^2(\theta_{\mathrm{l}} \, - \, \theta_{\mathrm{o}}) \, \times \, \overline{p_{\mathrm{l}} \, p_{\mathrm{l}}} \, \cdot \,$$

Revenons aux inégalités (4). Nous en tirons, en les comparant avec (7), la relation suivante:

$${\bf J}_{\overline{p_1p_3}}-{\bf J}_{\overline{p_1p_3}}>k_1\,\sin^2(\theta_1-\theta_0)\,.\,\,\overline{p_1p_2}\,+\,k_1\,\sin^2(\theta_2-\theta_0)\times\overline{p_2p_3}-2k\lambda_{\,\rm E}$$

le premier membre de cette inégalité est négatif; il en est donc de même du second et l'on en déduit:

$$\sin^{2}(\theta_{1} - \theta_{0}) < k'_{1} \frac{\lambda}{\overline{p_{1} p_{2}}} \varepsilon , \qquad (\lambda = \overline{p_{1} p_{3}})$$

$$\sin^{2}(\theta_{2} - \theta_{0}) < k'_{1} \frac{\lambda}{\overline{p_{2} p_{3}}} \varepsilon . \qquad (8)$$

Je dis alors que:

1º Si l'on a:

$$\frac{p_1 \, p_2}{p_2 \, p_3} < 1 \ ,$$

l'angle  $p_1p_3p_2$  tend vers zéro avec  $\lambda$ . 2º Si:

$$\frac{\overline{p_2 p_3}}{\overline{p_1 p_2}} < 1 ,$$

l'angle  $p_2 p_1 p_3$  tendra vers zéro avec  $\lambda$ .

3º Enfin s'il existe un nombre M donné une fois pour toutes tel que

$$\frac{1}{M} < \frac{\overline{p_1 p_3}}{\overline{p_1 p_2}} < M \quad , \tag{9}$$

les angles  $p_1p_3p_2$  et  $p_2p_1p_3$  tendent simultanément vers zéro. En effet la seconde inégalité (8) donne:

$$\sin^2 p_1 p_3 p_2 < k'_1 \frac{\overline{p_1 p_3}}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon < k'_1 \frac{\overline{p_1 p_2} + \overline{p_2 p_3}}{\overline{p_2 p_3}} \varepsilon < (k'_1 + 1) \varepsilon ,$$

or il est clair que l'angle  $p_1$   $p_3$   $p_2$  est aigu puisque  $\overline{p_1}$   $p_2$  est plus petit que  $\overline{p_2}$   $p_3$ . Donc  $p_1$   $p_3$   $p_2$  tend bien vers zéro. La démonstration du second cas est alors identique à la précédente. Passons au cas où les inégalités (9) sont satisfaites. Le système (8) montre alors que sin  $p_1$   $p_3$   $p_2$  et sin  $p_2$   $p_1$   $p_3$  tendent simultanément vers zéro, et notre proposition sera établie si nous montrons qu'aucun des deux angles  $p_1$   $p_3$   $p_2$  et  $p_2$   $p_1$   $p_3$  n'est obtus quand  $p_1$   $p_3$  =  $\lambda$  est assez petit. En effet, dans le cas contraire, si nous considérons l'intégrale

$$J' = \int \sqrt{\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2} ds ,$$

il est clair que sa valeur le long du contour  $p_1$   $p_2$   $p_3$  dépassera sa valeur le long de  $p_1$   $p_3$  d'une quantité du même ordre de grandeur que  $\lambda$ , qui par suite ne pourra devenir négative quand on en retranchera un infiniment petit du second ordre  $2K \lambda \varepsilon$ . Ceci posé nous allons montrer que  $C_0$  admet partout une tangente variant avec continuité. Soit en effet M,  $M_1$ ,  $M_2$  trois points de  $C_0$  d'abscisses curvilignes respectivement égales à s, s-h, s+h; désignons par  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  les angles de direction des côtés  $M_1M$ ,  $MM_2$ . La différence:  $|\theta_2-\theta_1|$  tend vers zéro avec h ainsi qu'il résulte de l'inégalité (3) et de ce que nous venons de voir plus haut.

Faisons maintenant intervenir l'hypothèse faite au début, et qui porte que les fonctions E, F, G satisfont chacune à une condition de Lipschitz d'ordre arbitraire:  $0 < \alpha_i \le 1$ . On voit

facilement d'après les inégalités (8) que l'on a une relation de la forme:

$$|\theta_2 - \theta_1| < kh^{\mu}$$

k étant une constante,  $\mu$  un nombre positif compris entre 0 et 1. On aura donc aussi :

$$|\cos\,\theta_2 - \cos\,\theta_1| < kh^\mu \qquad |\sin\,\theta_2 - \sin\,\theta_1| < kh^\mu$$

On montrerait facilement alors, en employant la méthode analogue à celle utilisée dans le cas d'uue fonction d'une variable (cf. P. Montel, Sur les polynomes d'approximations. Bull. Soc. Math. Fran. 1918) qu'on peut former deux polynomes  $P_n(s)$  et  $Q_n(s)$  représentant respectivement  $u_0(s)$  et  $v_0(s)$  avec une approximation:

$$\rho < \frac{\Lambda}{n^{1+\alpha}}$$

Alors  $u_0(s)$  et  $v_0(s)$  admettent des dérivées  $u_0'(s)$ ,  $v_0'(s)$  continues.

## SUR LES DÉPLACEMENTS ISOHODOÏQUES

PAR

## V. HLAVATÝ (Prague).

1. Exposition 1. Désignons par X' les n paramètres d'une variété à n(>1) dimensions, par  $\Gamma'_{\lambda\mu}(\not=\Gamma'_{\mu\lambda})$  les  $n^3$  paramètres de son déplacement, que nous désignons par  $L_n$ . Il est bien connu que pendant la transformation des paramètres X (au jacobien  $\Delta \neq 0$ )

$$X = X(X) \tag{1}$$

les  $\Gamma'_{\lambda\mu}$  se transforment d'après

$${}^{\prime}\Gamma^{\varrho}_{\omega\pi} = \frac{\delta^{\prime}X^{\varrho}}{\delta X^{\nu}} \left( \frac{\delta X^{\lambda}}{\delta^{\prime}X^{\omega}} \frac{\delta X^{\mu}}{\delta^{\prime}X^{\pi}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\delta^{2} X^{\nu}}{\delta^{\prime}X^{\omega} \delta^{\prime}X^{\pi}} \right).$$

<sup>1</sup> Nous employons la symbolique de M. Schouten, exposée dans son livre Der Ricci-Kalkül. Berlin, 1924.