

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	26 (1927)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	LES FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLE, LES FONCTIONS DE POINT A VARIATION BORNÉE ET LA GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE A n DIMENSIONS
Autor:	Young, R. C.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-21248

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ADDENDUM

1^o La démonstration complète des propriétés énoncées dans le présent article prouvera sans doute par elle-même que toute fonction satisfaisant à l'équation (L), ne rentrant pas dans la catégorie particulière du théorème VI, est une fonction analytique de x, y, z, t .

2^o L'expression

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} - \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial \bar{Y}} \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} \frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{X} \partial Y} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial \bar{Y}} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \bar{X}},$$

dont il a été question au sujet du théorème VI, jouit de la même invariance que $\Delta\Delta u$ par rapport aux transformations analytiques de X et Y . Son annulation a la signification suivante: par tout point (X, Y) il passe une courbe analytique sur laquelle u est constant. Ces courbes dépendent de deux paramètres réels, mais non d'un paramètre complexe si $\Delta\Delta u$ n'est pas nul.

LES FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLE,
LES FONCTIONS DE POINT A VARIATION BORNÉE
ET LA GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE
A n DIMENSIONS

PAR

R. C. YOUNG (Cambridge).

1. — A la fin du Chapitre VI de sa monographie: « Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire », M. de la Vallée Poussin établit la proposition suivante, sous l'hypothèse d'un nombre quelconque, soit n , de dimensions:

Toute fonction de point $f(P)$, qui est continue et à variation bornée, définit une fonction $p(e)$, continue et additive, d'en-

semble (normal¹). Cette fonction est égale, pour chaque intervalle à n dimensions (« domaine rectangle ») à l'accroissement (n tuple) de $f(P)$ dans cet intervalle². Remarquons tout d'abord que la « continuité » de $p(e)$ définie au n° 82 de la dite monographie comme propriété de tendre vers zéro avec le diamètre de e , prend ici un caractère plus précis : $p(e)$ tend vers zéro avec le diamètre de la projection de e sur l'un des axes, ou, ce qui revient au même, s'annule identiquement dans chaque « plan » (à $(n - 1)$ dimensions) parallèle à l'un des plans de coordonnées. C'est ce caractère que nous pourrons, avantageusement, prendre comme définissant la continuité d'une fonction additive d'ensemble, au lieu du caractère moins précis, qui coïncide du reste avec celui-là au cas de l'espace linéaire. Nous pouvons remarquer de plus que la définition d'une fonction à variation bornée du n° 104 de la monographie fait coïncider une telle fonction quelconque avec la différence de deux fonctions quelconques à accroissements n tuples *toujours positifs ou nuls* (mais bornés). Or une fonction à accroissement n tuple borné et de signe invariable, définie dans un domaine rectangle quelconque, ne diffère d'une fonction monotone que par une somme de fonctions dépendant chacune de $(n - 1)$ coordonnées au plus³ — et ne contribuant en rien à la valeur de l'accroissement n tuple, c'est-à-dire à la fonction $p(e)$. Nous aurons donc avantage également à interpréter la désignation de *fonction à variation bornée* comme signifiant la différence de deux fonctions monotones, au sens défini dans notre précédente note, c'est-à-dire de fonctions dont *tous* les accroissements ont un même signe invariable⁴. Une fonction de n variables à variation bornée est alors à variation bornée par rapport à chaque groupe de k variables et pour chaque valeur des $(n - k)$ autres variables, maintenus fixes, $k = 1, 2, \dots, n$. Avec ces

¹ Nous allons omettre le qualificatif de « normal ». On sait que les ensembles « normaux » (relativement à une fonction additive) comprennent tous les ensembles mesurables B (voir au n° 80 de la monographie citée), les seuls qui possèdent une individualité définie par rapport à des considérations du genre qui vont suivre. *Dans la présente note, le symbole e et le mot ensemble représenteront toujours un ensemble mesurable B.*

² Définitions au n°s 2, 3 de ma note de l'*Enseignement Mathématique*, 1924-5, p. 79 et suivantes : « Les fonctions monotones et l'intégration dans l'espace à n dimensions ».

³ Valeurs de la fonction, affectées du signe + ou —, aux projections de P sur les côtés et « faces » de tous ordres du domaine rectangle.

⁴ Loc. cit. n° 3.

conventions, la *continuité* de $p(e)$ résultera de la continuité de la *fonction à variation bornée* dont elle est déduite par l'intermédiaire de la propriété immédiate:

*Toute fonction continue à variation bornée a son accroissement n^{tuple} nul à l'intérieur de chaque intervalle à $k < n$ dimensions et en chaque point*¹.

2. — Les restrictions que M. de la Vallée Poussin faisait entrevoir, en terminant le chapitre cité, pour la généralisation aux fonctions *discontinues* à variation bornée ne subsistent pas à l'examen détaillé. On sait aujourd'hui que l'énoncé rappelé ci-dessus demeure vrai lorsqu'on y omet le terme *continu*, c'est-à-dire:

Toute fonction de point $f(P)$ à variation bornée définit une fonction $p(e)$ additive d'ensemble.

$p(e)$ est défini d'abord pour chaque intervalle ouvert à n dimensions, comme limite des accroissements n^{tuples} de $f(P)$ dans les intervalles d'une suite croissante tendant vers l'intervalle ouvert; en d'autres mots, on égale $p(e)$ sur les intervalles ouverts aux accroissements n^{tuples} de $f(P)$ à l'intérieur de ces intervalles; de là $p(e)$ se définit d'une façon unique et toujours possible sur chaque ensemble e , par une répétition finie ou transfinie de passages à la limite, identique à celle qui définit la mesure de l'ensemble en partant de la mesure des intervalles (méthode des suites monotones). La fonction $p(e)$ est donc, précisément, *l'intégrale par rapport à $f(P)$ de la fonction caractéristique de l'ensemble e* (égale à l'unité aux points de e et nulle ailleurs). En particulier, sur un intervalle ouvert à moins de n dimensions, $p(e)$ a pour valeur l'accroissement n^{tuple} de $f(P)$ à l'intérieur de cet intervalle et sa valeur sur un point unique est l'accroissement n^{tuple} de $f(P)$ en ce point. On appelle aussi $p(e)$ *l'accroissement total de $f(P)$ sur l'ensemble e* .

3. — L'accroissement total d'une fonction $f(P)$, discontinue et à variation bornée, sur les intervalles ouverts, et par là sur tout ensemble, — est entièrement défini par les valeurs limites

¹ Loc. cit. pp. 83, 84.

de $f(P)$ dans les quadrants ouverts en chaque point¹; la valeur réelle de $f(P)$ n'intervient que pour la définition de ces valeurs limites. La question se pose: Peut-on se donner les valeurs limites sans passer expressément par l'intermédiaire des valeurs réelles? A cause du numéro précédent, ce problème peut être envisagé comme faisant partie du suivant:

Etant donné une fonction $\varphi(e)$ additive d'ensemble, existe-t-il une fonction $f(P)$ à variation bornée à laquelle $\varphi(e)$ corresponde par le procédé du no 2?

En d'autres termes:

Toute fonction additive d'ensemble $\varphi(e)$ est-elle l'intégrale, par rapport à une fonction à variation bornée $f(P)$, de la fonction caractéristique de l'ensemble e , ou accroissement total de $f(P)$ sur e ?

C'est la réciproque généralisée du problème posé au no 97 de la monographie de M. de la Vallée Poussin, qui conduisait ensuite à l'énoncé rappelé au no 1 ci-dessus. La réponse est de nouveau affirmative, et établit l'équivalence complète entre les fonctions à variation bornée et les fonctions additives d'ensemble. Les considérations qui suivent rendent la démonstration immédiate.

4. — La fonction $\varphi(e)$ additive d'ensemble est la différence de deux fonctions additives, non négatives. Il suffit donc de considérer les fonctions additives d'ensemble, non-négatives. Nous démontrerons précisément:

Toute fonction p(e) additive d'ensemble, non-négative, coincide, dans un domaine borné donné quelconque, avec l'intégrale de la fonction caractéristique de e par rapport à une fonction monotone g(P) ou accroissement total de f(P) sur e.

$p(e)$ étant borné, il ne peut exister qu'un nombre fini de plans parallèles aux plans de coordonnées à l'intérieur desquels $p(e)$ ait des valeurs $\geq \varepsilon > 0$; par suite les plans, parallèles aux plans de coordonnées, à l'intérieur desquels $p(e)$ n'est pas identiquement nul, sont dénombrables. Il s'ensuit que l'on peut choisir une nouvelle origine de coordonnées (en maintenant la direction des axes) de façon que le domaine donné soit situé dans le quadrant

¹ Loc. cit. no 1, 3.

positif de sommet 0^1 et que $p(e)$ soit identiquement nul à l'intérieur de chacun des plans de coordonnées. En définissant $g(P)$ dans tout le quadrant positif de sommet 0, on l'aura alors, en particulier, définie dans le domaine donné.

Cela fait, nous posons $g(P) = 0$ dans chacun des plans de coordonnées. A cause de 2, les valeurs limites de la fonction $g(P)$ monotone, supposée existante, sont alors déterminées dans les quadrants (ouverts) au voisinage de chaque point. Car en prenant, pour fixer les idées, le cas de deux dimensions, $g(P) = g(x, y)$, nous avons :

a) L'accroissement total de $g(x, y)$ à l'origine (valeur de $p(e)$ pour ce point) est nul. A fortiori, puisque $g(x, y)$ doit être monotone, les expressions symboliques

$$\begin{aligned} g(0+0, 0+0) &= g(0+0, 0+0) - g(0, 0+0) - g(0+0, 0) + g(0, 0) , \\ - g(0-0, 0+0) &= g(0, 0+0) - g(0-0, 0+0) - g(0, 0) + g(0-0, 0) , \\ - g(0+0, 0-0) &= g(0+0, 0) - g(0, 0) - g(0+0, 0-0) + g(0, 0-0) , \\ g(0-0, 0-0) &= g(0, 0) - g(0-0, 0) - g(0, 0-0) + g(0-0, 0-0) , \end{aligned}$$

(limites d'accroissements doubles de $g(x, y)$ et par conséquent non-négatives) dont la somme est égale à l'accroissement

total, $\Delta_{\substack{0+0, 0+0 \\ 0-0, 0-0}}(g)$, de $g(x, y)$ au point $(0, 0)$, sont nulles séparément.

C'est-à-dire que les valeurs limites de $g(x, y)$ au voisinage de l'origine sont toutes nulles.

b) De même, les expressions, où y a une valeur quelconque > 0 :

$$\begin{aligned} g(0+0, y \pm 0) &= g(0+0, y \pm 0) - g(0, y \pm 0) - g(0+0, 0 \mp 0) \\ &\quad + g(0, 0 \mp 0) , \\ - g(0-0, y \pm 0) &= g(0, y \pm 0) - g(0-0, y \pm 0) - g(0, 0 \mp 0) \\ &\quad + g(0-0, 0 \mp 0) , \end{aligned}$$

(limites d'accroissements doubles de $g(x, y)$ et par conséquent non-négatives) dont la somme, en prenant partout les signes supérieurs ou partout les signes inférieurs, est l'accroissement total de $g(x, y)$ sur l'intervalle $\{0, 0; 0, y\}$ de l'axe des y — fermé, au cas des signes supérieurs, ouvert, à celui des signes inférieurs

¹ Ensemble des points dont toutes les coordonnées u_i sont ≥ 0 , $i = 1, 2, \dots, n$.

— et par conséquent nulle — sont elles aussi nulles séparément. C'est-à-dire que les valeurs limites de $g(x, y)$ au voisinage d'un point de l'axe des y sont toutes nulles.

Et il en est de même, pareillement, au voisinage d'un point de l'axe des x .

c) Il en résulte immédiatement qu'on a, en supposant $x > 0$, $y > 0$:

$$g(x - 0, y - 0) = \Delta_{\substack{x-0, y-0 \\ 0+0, 0+0}}(g) \\ = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle ouvert } \{0, 0; x, y\}$$

$$g(x - 0, y + 0) - g(x - 0, y - 0) = \Delta_{\substack{x-0, y+0 \\ 0+0, y-0}}(g) \\ = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle ouvert } \{0, y; x, y\}$$

$$g(x + 0, y - 0) - g(x - 0, y - 0) = \Delta_{\substack{x+0, y-0 \\ x-0, 0+0}}(g) \\ = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle ouvert } \{x, 0; x, y\}$$

$$g(x + 0, y + 0) - g(x - 0, y + 0) - g(x + 0, y - 0) + g(x - 0, y - 0) \\ = \Delta_{\substack{x+0, y+0 \\ x-0, y-0}}(g) = \text{valeur de } p(e) \text{ sur le point } (x, y).$$

D'où la détermination des valeurs limites de $g(x, y)$ dans les quadrants ouverts au voisinage de chaque point $x \geq 0, y \geq 0$:

$$g(x - 0, y - 0) = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle ouvert } \{0, 0; x, y\} \\ g(x - 0, y + 0) \\ = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle } \{0, 0; x, y\} \text{ ouvert sur le côté } \{0, x; x, y\} \\ g(x + 0, y - 0) \\ = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle } \{0, 0; x, y\} \text{ ouvert sur le côté } \{0, y; x, y\} \\ g(x + 0, y + 0) = \text{valeur de } p(e) \text{ sur l'intervalle fermé } \{0, 0; x, y\}$$

En passant du plan à l'espace à n dimensions, on ne rencontre qu'une complication un peu plus grande dans les symboles, à cause du plus grand nombre de coordonnées, qui exige en outre la considération successive des « plans » de coordonnées

des divers ordres, depuis les *axes* de coordonnées jusqu'aux plans de coordonnées proprement dits (à $n - 1$ dimensions), avant de conclure pour le point général P.

5. — Je dis que les formules exprimant les valeurs limites de $g(P)$, supposées existantes, comme valeurs de la fonction correspondante $p(e)$, définissent effectivement, lorsque $p(e)$ est donné *a priori* quelconque, les valeurs limites d'une fonction monotone nulle sur les plans de coordonnées.

En effet, la fonction $f(P)$, moyenne entre les 2ⁿ valeurs limites ainsi définies au voisinage de P, est monotone, et a pour valeur limite à l'intérieur d'un quadrant quelconque au voisinage de P, la valeur limite donnée correspondant à ce quadrant.

Si nous prenons de nouveau, pour fixer les idées, le cas $n = 2$, nous avons en effet

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \{ g(x - 0, y - 0) + g(x + 0, y + 0) + g(x + 0, y - 0) \\ + g(x - 0, y + 0) \},$$

où les expressions symboliques à l'intérieur de la parenthèse désignent les valeurs de $p(e)$ sur les intervalles $\{0, 0; x, y\}$ ouvert, fermé, ouvert sur le côté parallèle à $0x$, ouvert sur le côté parallèle à $0y$, passant par (x, y) ; les deux premières de ces valeurs de $p(e)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite de toutes; par conséquent:

$g(x, y)$ est comprise entre les valeurs de $p(e)$ sur l'intervalle ouvert et sur l'intervalle fermé $\{0, 0; x, y\}$.

Or, si $(x', y') \rightarrow (x, y)$ de façon monotone en demeurant dans le quadrant ouvert (++) , (+-) , (-+) , ou (- -) au point (x, y) , ces deux intervalles ont même limite¹ — l'intervalle

¹ Dans le premier et dernier cas, les suites d'intervalles sont monotones, et la vérification est immédiate; au 2^{me} et 3^{me} cas, on a recours à la définition générale de la limite d'une suite d'ensembles (de la Vallée Poussin, p. 9):

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} E_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n + E_{n+1} + \dots + E_{n+k} + \dots) \\ \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} E_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n E_{n+1} \dots E_{n+k} \dots)$$

Au 2^{me} cas, par exemple, $y_i < y, x_i > x$, la somme de tous les intervalles (ouverts ou fermés), $\{0, 0; x_{n+k}, y_{n+k}\}$ pour $k = 1, 2, \dots$ est comprise dans l'intervalle $\{0, 0; x_n, y\}$ ouvert sur le côté parallèle à $0x$, — qui a pour limite l'intervalle $\{0, 0; x, y\}$ ouvert sur ce même côté; le produit des mêmes intervalles contient l'intervalle fermé $\{0, 0; z, y_n\}$, qui tend vers le même intervalle $\{0, 0; x, y\}$ ouvert sur le côté parallèle à $0x$.

$\{0, 0; x, y\}$, fermé au premier cas, — ouvert sur le côté parallèle à $0x$ passant par (x, y) , au deuxième, — ouvert sur le côté parallèle à $0y$ passant par (x, y) , au troisième, — ouvert au quatrième ; les deux valeurs de $p(e)$, $g(x - 0, y - 0)$ et $g(x + 0, y + 0)$, ont donc même limite, — $g(x + 0, y + 0)$ au premier cas, — $g(x + 0, y - 0)$, au second, — $g(x - 0, y + 0)$, au troisième, — $g(x - 0, y - 0)$, au dernier. Donc $g(x, y)$ a effectivement les limites voulues à l'intérieur de chaque quadrant.

La démonstration au cas général de n dimensions est absolument semblable. $g(P)$ est toujours comprise entre les valeurs de $p(e)$ sur l'intervalle ouvert et sur l'intervalle fermé (OP) , et cela suffit pour lui donner les limites voulues au voisinage de P .

Il ne reste plus qu'à vérifier la monotonie de $g(P)$. Cela est immédiat.

a) On a, au cas $n = 2$, pour $0 \leq a < c, 0 \leq b < d$:

$$\Delta_{a, b}^{c, d}(g) = \frac{1}{4} \left\{ \Delta_{a+0, b+0}^{c+0, d+0}(g) + \Delta_{a+0, b-0}^{c+0, d-0}(g) + \Delta_{a-0, b+0}^{c-0, d+0}(g) + \Delta_{a-0, b-0}^{c-0, d-0}(g) \right\}$$

c'est-à-dire que l'accroissement de $g(x, y)$ dans un intervalle $\{a, b; c, d\}$ est moyenne entre quatre valeurs déterminées de $p(e)$; celle sur l'intervalle $\{a, b; c, d\}$ fermé sur les côtés passant par (c, d) , ouvert sur ceux passant par (a, b) , — ou brièvement, l'intervalle *ouvert en* (a, b) , *fermé en* (c, d) ; celle sur ce même intervalle, ouvert en (e, d) , fermé en (a, b) ; celle sur ce même intervalle, ouvert en (c, d) , fermé en (a, b) ; et celle sur ce même intervalle, ouvert en (c, b) , fermé en (a, d) ; $p(e)$ étant toujours non-négative, $\Delta_{a, b}^{c, d}(g)$ l'est aussi. L'accroissement double de $g(x, y)$ est donc bien ≥ 0 .

b) De plus les accroissements simples

$$g(a, d) - g(a, b) = g(a, d) - g(a, b) - g(o, d) + g(o, b)$$

$$g(c, b) - g(a, b) = g(c, b) - g(a, b) - g(c, o) + g(a, o)$$

sont également des accroissements doubles, dans les intervalles $\{0, b; a, d\}$ et $\{a, 0; c, b\}$ respectivement. Les accroissements simples sont donc eux aussi toujours ≥ 0 ; c'est-à-dire $g(x, y)$ est monotone dans le domaine donné.

Au cas général d'un nombre quelconque de dimensions, on considère séparément tous les accroissements k^{tuple} de $g(P)$, pour $k = 1, 2, \dots, n$. Chacun est en même temps accroissement n^{tuple} de $g(P)$, et celui-ci est moyenne entre 2^n valeurs déterminées de $p(e)$, sur des intervalles ouverts à un sommet, fermés au sommet opposé (c'est-à-dire ouverts sur les « faces » passant par le premier sommet). Ces valeurs sont non-négatives, il en est donc de même des accroissements de $g(P)$.

6. — A la question posée au n° 3 nous pouvons donc répondre comme suit :

On peut se donner les valeurs limites d'une fonction à variation bornée dans un domaine borné sans passer par l'intermédiaire des valeurs réelles en se donnant une fonction additive d'ensemble quelconque.

Une telle fonction d'ensemble est, il est vrai, définie le plus souvent par le procédé inverse, indiqué au n° 2, en partant des valeurs d'une *fonction d'intervalle* dite additive, c'est-à-dire d'un accroissement n^{tuple} de fonction à variation bornée dans l'intervalle (valeurs réelles). Mais ce procédé peut aussi s'appliquer en prenant pour point de départ non des *intervalles* (domaines rectangles), mais des domaines polygonaux simples d'une famille convenablement choisie, par exemple des domaines tétraédraux (triangles, sur le plan). Toute fonction non-négative, du type additif¹, de ces domaines, définit par le procédé des suites monotones une fonction d'ensemble additive, non-négative, et par là une fonction monotone.

7. — Il est clair cependant que si les notions de fonction additive d'ensemble et de fonction de point à variation bornée peuvent se dire théoriquement équivalentes, il n'en est pas moins plus simple de caractériser la position d'un point que de décrire un ensemble particulier, ainsi que nous avons pu nous rendre compte déjà au cas très élémentaire des intervalles semi-ouverts. On cherchera donc à donner aux valeurs limites d'une fonction à variation

¹ *Invariant par subdivision*, cf. Mémoire de l'auteur sur les fonctions d'intervalles dans l'espace à n dimensions présenté à la Math. Zeitschr. et non encore publié.

bornée une existence comme valeurs d'une *fonction de point* indépendamment des valeurs de $p(e)$ avec lesquelles nous les avons identifiées.

On opérera, pour atteindre ce but, une sorte de décomposition sur les points « réels » de notre espace ordinaire, *en accordant une existence a priori aux points fictifs que l'on a déjà coutume de faire figurer, comme arguments symboliques, dans l'expression des valeurs limites*. Le point P de l'espace ordinaire ne figurera plus dans l'espace nouveau. A sa place se trouveront les 2^n points fictifs correspondant aux 2^n expressions symboliques que l'on peut déduire de

$$P = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

en ajoutant ou retranchant le symbole 0 à chacune des coordonnées u_i . Les « coordonnées » de ces points auront chacune pour « valeur » un symbole de la forme

$$u + 0 \quad \text{ou} \quad u - 0$$

représentant une *suite de nombres réels*. On passe donc des nombres réels à ces « valeurs » nouvelles par un procédé tout à fait analogue à celui qui fait passer *des nombres rationnels aux nombres réels*. La décomposition en question reviendra précisément à ne considérer comme « valeurs » *que les suites monotones* de nombres réels, comme précédemment on aura pris comme « nombres réels » *toutes les suites convergentes* de nombres rationnels.

8. — Nous posons les définitions suivantes :

Une « valeur » α est définie par¹ une suite monotone (bornée) de nombres réels, dont la limite unique est le *nombre réel correspondant à α* .

$\alpha_1 = \alpha_2$, si les deux suites définissant α_1 et α_2 ont même sens et même limite,

$\alpha_1 > \alpha_2 \}$, si la même relation a lieu entre les deux *nombres réels correspondants*,

¹ Suivant la terminologie habituelle, *est* Ce point de vue est admissible mathématiquement, sinon logiquement parlant. Les relations d'inégalité que nous imposons à α ne faisaient évidemment pas partie de notre notion des *suites monotones*, c'est donc bien en réalité un concept nouveau.

$\alpha_1 |>| \alpha_2$, si les deux suites définissant α_1 et α_2 ont même limite, mais sens opposés, descendant pour α_1 , ascendant pour α_2 .

$\alpha_1 |<| \alpha_2$, égale $\alpha_2 |>| \alpha_1$.

Si α est du type $u + 0$, il n'y a point de « valeur » $|>| \alpha$; si α est du type $u - 0$, il n'en est point qui soit $|<| \alpha$.

Les signes $=, >, <$, obéissent aux lois élémentaires habituelles de transitivité. Le signe $|>|$ joue le rôle d' = avec les signes $<$ et $>$, mais avec le signe $=$, il a prépondérance, comme les signes d'inégalité. Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha_1 |>| \alpha_2, \quad \alpha_2 > \alpha_3 &\text{ entraînent } \alpha_1 > \alpha_3 \\ \alpha_1 |>| \alpha_2, \quad \alpha_2 < \alpha_3 &\text{ entraînent } \alpha_1 < \alpha_3 \\ \alpha_1 |>| \alpha_2, \quad \alpha_2 = \alpha_3 &\text{ entraînent } \alpha_1 |>| \alpha_3 \end{aligned}$$

On ne pourra jamais avoir $\alpha_1 |>| \alpha_2, \alpha_2 |>| \alpha_3$ simultanément. Mais $\alpha_1 |>| \alpha_2, \alpha_2 |<| \alpha_3$ entraînent $\alpha_1 = \alpha_3$.

Les signes $>, |>|$, indiquent des *relations d'inégalité de même sens*; $<, |<|$ indiquent chacun une relation d'inégalité du sens opposé.

α est dit être *compris entre* α_1 et α_2 (au sens large) avec $\alpha_2 <, |<|$, ou $= \alpha_1$ — ce que nous écrivons $\alpha_2 |<=| \alpha_1$, si

$$\alpha_1 |<=| \alpha |<=| \alpha_2 .$$

Un « point » \mathfrak{A} du nouvel espace à n dimensions est défini par ses *coordonnées*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n .$$

Chaque « point » \mathfrak{A} représente une suite monotone (bornée)¹ de points réels et il lui *correspond* le point limite de cette suite. Deux points sont dits *homologues* (par rapport aux points réels correspondants) si les suites monotones qu'ils représentent ont même *sens*.

Un *intervalle* (\mathfrak{AB}) est l'ensemble de tous les «points» du nouvel espace dont les $i^{\text{èmes}}$ coordonnées sont *comprises entre* les

¹ Nous sous-entendrons ce qualificatif dans la suite. On convient habituellement, dans les considérations de cette sorte, de restreindre le domaine d'étude à un domaine borné donné à l'avance.

$i^{\text{èmes}}$ coordonnées des deux points donnés \mathcal{A} et \mathcal{B} . Lorsqu'il y a égalité entre k des coordonnées de \mathcal{A} et les k coordonnées correspondantes de \mathcal{B} , l'intervalle est dit à $n - k$ dimensions. Les 2^{n-k} « points » de $(\mathcal{A}\mathcal{B})$, dont chaque coordonnée égale la coordonnée correspondante de \mathcal{A} ou de \mathcal{B} , sont appelés les *sommets* de $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

Un *quadrant de sommet* \mathcal{A} est l'ensemble de tous les « points » \mathcal{B} tels que les relations d'inégalités entre les $i^{\text{èmes}}$ coordonnées de \mathcal{B} et de \mathcal{A} aient un *sens donné* pour chaque i .

Les accroissements d'une *fonction de « point »* dans cet espace sont définis par les mêmes formules, déduites par induction des cas $n = 1, n = 2, \dots$, que les accroissements d'une fonction de point ordinaire. L'accroissement k^{tuple} d'une telle fonction de « point » dans un intervalle donné à k dimensions est la somme de 2^k termes, valeurs de la fonction, affectées de signes déterminés, aux 2^k sommets de l'intervalle.

La fonction sera dite *monotone* si tous ses accroissements ont un même signe invariable.

Une suite de « points »

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n,$$

est dite *monotone* (et bornée) si la suite des points « réels » correspondants est monotone (et bornée). Elle a pour *limite, par définition*, le « point » \mathcal{A} défini par cette dernière suite de points réels.

Une suite quelconque aura pour *limites* les limites de ses suites partielles monotones, et sera *convergente* si toutes ses limites coïncident. Une suite monotone est en particulier convergente.

Les *valeurs limites* d'une fonction $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ au voisinage d'un « point » \mathcal{A}_0 sont alors les limites de ses valeurs aux points de suites convergentes, à limite \mathcal{A}_0 ¹. La fonction est dite *continue en* \mathcal{A}_0 si toutes ses limites au voisinage de \mathcal{A}_0 coïncident. Elle est dite *continue* si elle est continue au voisinage de tout point.

Avec ces conventions, la propriété fondamentale des valeurs limites de fonctions monotones ordinaires peut s'énoncer comme suit :

¹ Un « point » \mathcal{A}_0 peut être limite de suites monotones d'un sens déterminé et unique. Les suites convergentes à limite \mathcal{A}_0 sont composées de telles suites monotones, c'est-à-dire se trouvent chacune, à partir d'un certain point, dans un quadrant déterminé de sommet \mathcal{A}_0 .

Une fonction de point du nouvel espace, représentant les valeurs limites d'une fonction monotone de l'espace ordinaire, est une fonction monotone et continue.

Réiproquement, nous aurons maintenant le

THÉORÈME. — *Toute fonction de « point », monotone et continue, du nouvel espace, représente les valeurs limites d'une fonction monotone ordinaire.*

Il suffit de prendre, comme valeur de $f(P)$, la moyenne des valeurs de la fonction donnée aux 2^n « points » correspondants à P . Lorsque P' , en restant dans un quadrant donné de sommet P , décrit une suite monotone à limite P , les 2^n « points » correspondants décrivent des suites (monotones) à même limite, soit le « point » \mathcal{A}_0 du nouvel espace défini par la suite que décrit P' . Les valeurs de la fonction donnée $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ aux 2^n points correspondants à P' tendent donc vers la même limite, $\mathcal{F}(\mathcal{A}_0)$; et il en est de même de leur moyenne $f(P)$. $\mathcal{F}(\mathcal{A}_0)$ est donc la valeur limite voulue de $f(P)$. D'autre part, un accroissement quelconque de $f(P)$ est moyenne entre 2^n accroissements de la fonction donnée; ce sont les accroissements de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ dans les 2^n intervalles du nouvel espace dont les (2^k) sommets sont chaque fois les points *homologues* correspondants aux (2^k) sommets « réels » de l'intervalle considéré dans l'espace ordinaire. Les accroissements de $f(P)$ ont donc bien tous même signe, qui est le signe des accroissements de la fonction donnée $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

9. — On comparera la démonstration ci-dessus, simple, directe et générale, avec la démonstration des nos 5 et 6, qui suit absolument le même ordre d'idées. On verra combien nos conventions géométriques simplifient l'exposition et détruisent les ambiguïtés. Les intervalles semi-ouverts qui interviennent au cours du raisonnement sur $p(e)$ ne sont autre chose que les intervalles proprement dits (c'est-à-dire fermés) de notre nouvel espace; un cas tel que, par exemple, un intervalle comprenant toute sa frontière sauf au seul point, qui ne se prête pas à la comparaison directe (quoiqu'un tel intervalle soit toujours décomposable en une somme d'intervalles pour lesquels il y a correspondance immédiate), n'a trouvé aucune place explicite dans notre raisonnement sur $p(e)$; mais faute d'une nomenclature

appropriée, nous étions obligés de décrire les intervalles semi-ouverts intervenant, comme de simples sous-ensembles d'intervalles fermés, et de prendre le cas $n = 2$ pour pouvoir préciser un peu leur définition.

On comprendra aussi le relief pour ainsi dire tangible que notre mode de représentation donne aux propriétés essentielles des fonctions monotones avec les considérations inévitablement abstraites d'une multiplicité de valeurs limites au voisinage de points de discontinuité plus ou moins bien déterminés. Nous avons déjà remarqué que ce sont ces valeurs limites qui importent dans la théorie de ces fonctions. Il apparaîtra donc, en fin de compte, que les points « réels » auxquels nous avons coutume de rattacher notre théorie des fonctions ont beaucoup moins de « réalité » que les points « fictifs » que nous leur avons substitués pour commodité de représentation.

L'espace « réel » est un échafaudage indispensable à la construction de notre espace, comme le système des nombres fractionnaires à la construction du système réel. Une fois le nouveau système, le nouvel espace, *rendu existant*, celui qui a servi à son évolution, perd de sa réalité. (Dès lors, on pourra commencer par définir directement les valeurs « α » en partant des nombres rationnels, soit comme suites monotones (ce qui représente la moitié du nombre réel défini comme suite d'intervalles rationnels encastrés), soit comme ensemble des nombres rationnels d'un côté d'une section de Dedekind, mais en utilisant la *dissymétrie* que l'on néglige lorsqu'on définit le nombre réel de la sorte.) Nous « retrouvons » les nombres rationnels parmi les nombres réels ; mais c'est par une identification axiomatique et purement conventionnelle, d'un type tel que la science mathématique semble pouvoir admettre le plus souvent sans inconvénients, tandis que la logique pure, en l'imitant, rencontre des obstacles et contradictions sans fin. Le caractère particulier de la généralisation que nous voulions souligner (car elle existe, bien qu'incomplètement dégagée, du moment où les fonctions discontinues entrent en ligne de compte), c'est que les points réels se « retrouvent » aussi dans l'espace décomposé, mais non plus comme « points » au sens nouveau; chaque groupe de 2ⁿ « points » correspondant au même point réel de l'espace

primitif¹ peut être envisagé comme *constituant* ce point même, ou du moins le concept qui va le remplacer entièrement. Une fonction de point de l'espace ordinaire devient une fonction de ce groupe de «points» et, comme telle, peut être envisagée directement en son milieu nouveau.

L'idée de procéder, pour la considération spéciale des fonctions monotones, à une modification de structure de notre espace, m'est apparue sous la forme ci-dessus incidemment au printemps 1926 (et fut alors communiquée au Professeur Hobson à Cambridge), en même temps que le problème général de simplifier la manipulation de fonctions données, et celles de limites dites indéterminées, en élevant le degré d'abstraction des notions sous-jacentes.

On songera naturellement à la simplification résultant; d'une façon tout à fait analogue, dans le traitement des fonctions algébriques, par l'introduction des surfaces de Riemann. Outre l'application que nous en faisons dans la présente note et dans un travail, en cours de préparation, sur les fonctions à limites unilatérales uniques, l'idée en question servira assurément à d'autres buts et dans d'autres domaines, dans la suite.

¹ Ou encore, leur *moyenne*, au sens de Grassmann.