

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

F.-J. DUARTE. — **Nouvelles tables de Log $n!$ à 33 décimales depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 3.000$.** Avec une Préface de M. R. de MONTESSUS DE BALLORE. — Un vol. gr. in-8° de XXIV-136 pages. Prix: 30 fr. fr.; Imprimerie Albert Kundig, Genève. Index generalis, Paris. 1927.

Voici un bel exemple de calculs numériques. Théoriquement, il ne semble point difficile de calculer des logarithmes de factorielles pourvu qu'on ait les logarithmes des nombres entiers consécutifs; on procédera par additions. Mais, si l'on veut un grand nombre de décimales exactes, il faudra se défier de l'accumulation des erreurs et être sûr aussi de l'exactitude des logarithmes des entiers. L'auteur s'est ici livré à de doubles vérifications; il nous réexpose brièvement les formules de calcul des tables ordinaires, non sans certaines simplifications ou artifices arithmétiques ingénieux. Il y a aussi des confrontations intéressantes avec la formule de Stirling.

Ces tables seront certainement de grande utilité pour le Calcul des Probabilités et la Théorie des Nombres, les curiosités de celle-ci devant être poursuivies par la voie purement numérique quand la voie fonctionnelle n'est plus utilisable.

L'ouvrage est imprimé avec luxe et netteté et il ne nous est pas indifférent qu'il fasse honneur à l'imprimeur de *L'Enseignement mathématique*.

A. BUHL (Toulouse).

M. WINANTS. — **Cours élémentaire d'Analyse infinitésimale**, à l'usage des futurs ingénieurs, professé à l'Institut Polytechnique de Glons-Liège. — Un volume in-4° lithographié de 382 pages. A. Pholien, Liège, 1927.

Il s'agit d'un Cours qui, en France, serait dit « de Mathématiques générales ». L'auteur, un des collaborateurs de *L'Enseignement mathématique*, nous fait part, dans une courte préface, d'un enthousiasme que toute l'œuvre confirme; il ne cherche qu'à rendre accessible aux praticiens la langue merveilleuse de l'Analyse infinitésimale et il y réussit admirablement. Le sujet est connu et tous ces cours destinés aux techniciens ont un air de famille; celui-ci est richement étoffé et constellé, avec la plus louable intention, des noms des grands géomètres français; ainsi la théorie des séries fait briller ceux de Cauchy et de d'Alembert cependant qu'aux infiniment petits sont rattachés deux théorèmes de Duhamel.

Les méthodes graphiques et les figures où l'on doit voir pour comprendre sont naturellement partout en grand honneur. Le calcul des dérivées, la délicate formation de celles-ci pour $\log x$ et a^x sont du dernier parfait; il y a trois méthodes différentes pour expliquer le signe moins de la dérivée de $\cos x$. Les fonctions circulaires inverses n'apparaissent point comme êtres accessoires; elles ont le nom caractéristique de fonctions *cyclométriques*.

Si le terme est peu usité, en France, il n'en est pas moins fort heureux.

La règle de dérivation des fonctions implicites est élégamment appliquée à la détermination des tangentes de l'hypocycloïde à quatre rebroussements.

Une belle place est faite à la Règle du Marquis de l'Hospital.

Beaucoup d'ingéniosité pour les maxima et les minima, points où les courbes n'ont pas toujours des tangentes parallèles à Ox , comme $y^3 = x^2$ en O . Et, à propos des fonctions de plusieurs variables, M. Winants fait des remarques, rappelle des expressions dues à des Français et que ceux-ci ignorent généralement; qui sait que l'usage des puissances symboliques dans le développement taylorien à plusieurs variables relevait, pour Edouard Lucas, de la sténographie ?

Relevons d'excellents passages sur la continuité, sur les flocons colloïdaux, de M. Jean Perrin, flocons dont les contours, à toute échelle révèlent toujours des anfractuosités éveillant l'idée des courbes sans tangentes. Plus loin viennent l'esquisse d'une théorie des cubiques, des symétries cristallographiques, des coniques osculatrices aux cubiques (Poncelet, Cremona), des roulettes, des ombilics. Aucune généralité n'est négligée et il y a partout de captivantes précisions.

En calcul intégral, les intégrales usuelles sont partagées en cinq familles. Les intégrales multiples sont peut-être un peu écourtées en ce qui concerne les formes de Stokes et de Green mais, après de nombreuses quadratures et rectifications de courbes planes, nous trouvons deux chapitres sur la cubature et sur la complanation d'aires gauches.

Signalons encore l'intégration par les séries, les séries de Fourier (toujours avec de remarquables graphiques), une théorie des quantités complexes d'après Houël et enfin une théorie, plus que complète et très physique, des équations différentielles élémentaires.

J'ai été un peu étonné d'une épigraphe mise en tête du volume et reprise dans une postface: La Physique est la Science; la Mathématique n'est que la langue de la Science (Félix Le Dantec).

M. Winants, j'ai insisté sur ce point, a eu le grand mérite d'emprunter beaucoup aux penseurs français, mais Le Dantec était-il indiqué ? Personnellement j'en doute. Ce biologiste a parlé très inconsidérément des hautes parties des mathématiques et notamment de certains résultats dus à Henri Poincaré, ce contre quoi j'ai cru de mon devoir de protester dans cette Revue même (T. XV, 1913, pp. 27 et 95). Il me semble que la Science a actuellement une allure qui s'accorde peu avec l'épigraphe ci-dessus. Peut-être allons-nous assister à une scission et devons-nous nous accommoder du développement d'une science technique ne voulant rien entendre des spéculations de la Physique théorique moderne qui seraient alors réservées aux seuls esprits philosophiques ? Si cet état de choses doit venir, je ne l'empêcherai point mais je le regretterai profondément.

Il est à peine besoin de dire que ces dernières lignes ne peuvent et ne doivent nuire en rien à l'exposé, si plein de talent, dû à M. Winants lui-même.

A. BUHL (Toulouse).

B. NIEWENGLOWSKI. — **Questions d'Arithmétique.** — Un vol. in-8° de VIII-226 pages. Prix: 15 francs. Vuibert, Paris, 1927.

Ce recueil contient des problèmes curieux et intéressants qui peuvent, à peu près tous, être résolus avec des connaissances d'arithmétique élémentaire. Au delà, on arrivera rapidement aux parties savantes de la Théorie

des Nombres et sans avoir alors besoin de faire de trop théoriques efforts. M. Niewenglowski nous invite à jouer avec les nombres comme le voulaient Bachet, sieur de Méziriac, et, plus récemment, Edouard Lucas.

L'ouvrage débute par de curieuses identités arithmétiques puis par des résolutions d'équations en nombres entiers; l'humour s'en mêle avec le problème des Hollandais achetant des cochons et permettant, à un observateur de cette opération commerciale, de repérer les femmes des acheteurs. Catalan a protesté contre cet énoncé, n'y voulant voir qu'un certain système d'équations; il a peut-être eu tort car ce n'est pas absolument rien que de mettre le problème en équations.

Signalons les fameux nombres non premiers, tels

$$2^{32} + 1, \quad 2^{64} + 1$$

et l'étude de nombreux cas de divisibilité qui ne relèvent que d'identités algébriques très élémentaires. Il y a également de belles symétries du côté des nombres *cycliques* qui se reproduisent dans leurs multiples considérés consécutivement ou de deux en deux, de trois en trois, etc. Les progressions arithmétiques et géométriques se combinent très élégamment avec les propriétés de divisibilité. Les carrés, les cubes, les racines sont encore d'esthétiques prétextes d'analyse indéterminée. Les deux derniers chapitres, plus savants, ont trait aux théorèmes de Fermat et de Wilson ainsi qu'à l'équation de Pell.

Tout cela fait 260 problèmes non seulement captivants mais d'une indéniable valeur pédagogique, ce que prouvent les mentions indiquant les questions proposées comme sujets d'examens ou de concours; l'Agrégation figure dans ces mentions avec une question divisée ici en plusieurs autres et à laquelle M. Cartan a déjà consacré des développements publiés dans les *Nouvelles Annales*. Une fois de plus, M. Niewenglowski a prouvé que les jeux mathématiques côtoient vite la science profonde.

A. BUHL (Toulouse).

E. LAINÉ. — **Précis d'Analyse mathématique à l'usage des Candidats au Certificat de Calcul différentiel et intégral.** Tome II. Théorie des équations différentielles. Géométrie infinitésimale. Equations aux dérivées partielles. Avec la collaboration de G. BOULIGAND. — Un vol. de vi-316 pages et 41 figures. Prix: 40 francs. Vuibert, Paris, 1927.

Nous avons récemment examiné (p. 155) le Tome premier de ce Précis. Le Tome second suit avec une rapidité que bien des auteurs et des éditeurs devraient imiter; c'est une bonne fortune pour les étudiants de nos Facultés, ceux-ci se perdant souvent dans des ouvrages, magnifiques mais trop volumineux, d'où ils ne savent pas extraire les matières exigées au Certificat d'Analyse.

Les équations différentielles nous font débiter par des théorèmes d'existence, par des séries simples ou doubles accompagnées de séries majorantes. Les séries doubles recouvrent des quarts de plan que l'on peut recouvrir aussi d'aires quadrantales toujours comparables à des quarts de cercles tous centrés à l'origine de la série; c'est sans doute le moyen le plus pratique d'apparenter la série double à la série simple.

Des exemples très clairs nous familiarisent avec les points singuliers *fixes*

ou *mobiles*. Toute la science de M. Painlevé n'a pas épuisé les cas généraux mais rien de plus immédiat qu'une explication appuyée sur des cas particuliers bien choisis. Ainsi

$$x dx + y dy = 0 \quad \text{donne} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

d'où, en a , une singularité mobile pour y .

Une équation *linéaire* n'admet que des singularités fixes. Quant aux intégrales singulières, elles sont étudiées autant comme lieux de singularités que comme enveloppes.

La différentiation de l'équation générale $F(x, y, y') = 0$ montre dans quels cas cette opération est propre à des combinaisons favorables à l'intégration; l'équation de Clairaut ne se rattache à ces considérations que d'une manière très particulière.

L'équation de Riccati est immédiatement ramenée aux équations linéaires et l'équation de Laplace

$$(a_0 x + b_0) y'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_2 x + b_2) y = 0$$

prépare très heureusement les généralités du théorème de Fuchs.

En Géométrie infinitésimale, les méthodes vectorielles triomphent. Les symétries analytiques rapidement obtenues, en matière de courbure et de torsion des courbes gauches, suffiraient à justifier les dites méthodes. Considérations excellentes sur les développées des courbes gauches, développées qui deviennent des hélices quand la courbe initiale est plane. Toutes les enveloppes sont généralement considérées comme des lieux de caractéristiques. Les surfaces sont brillamment étudiées en coordonnées curvilignes; le théorème de Joachimstahl illustre maints problèmes de lignes de courbure et la courbure totale ne va point sans une belle analyse vectorielle propre à mettre en évidence son caractère invariant lors de la déformation. Il en va de même pour les développées des surfaces. Viennent ensuite les notions de courbure géodésique, de torsion relative, les congruences de droites et particulièrement les congruences de normales; la méthode vectorielle est propre à élémentariser tout cela.

Les surfaces dites autrefois *applicables* sont dites ici *isométriques*; elles sont suivies des transformations de contact, des complexes et des équations de Monge y associées.

Les formules de Green, d'Ostrogradsky, de Stokes, déjà construites dans le premier volume, sont reprises ici en notations vectorielles et M. Lainé termine son œuvre avec d'intéressantes pages sur les groupes continus immédiatement liés aux systèmes différentiels ordinaires.

Le livre V et dernier a trait aux équations aux dérivées partielles et est rédigé par M. Georges Bouligand qui, aux solutions à *fonctions arbitraires*, oppose bientôt les solutions à *conditions limites*. La fonction *préharmonique*, moyenne, en chaque nœud d'un quadrillage, de ses valeurs aux quatre nœuds voisins tend aisément vers la fonction harmonique du problème de Dirichlet brièvement analysé dans le cas du cercle.

Pour les équations du premier ordre, M. Bouligand remarque excellemment une chose que j'ai essayé de faire ressortir aussi dans le fascicule XVI du *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule consacré aux *Formules stokiennes*; c'est que l'espace vectoriel impose les symétries et les images

intuitives se rapportant à ces équations. Les conditions d'intégrabilité des systèmes, les associations de formes de Pfaff, même les caractéristiques prises d'abord tout autrement par Cauchy, tout cela relève des méthodes de Grassmann et de ses disciples, de multiplication et de dérivation *extérieures* selon M. E. Cartan, donc, en fin de compte, de la méthode vectorielle ouvrant alors franchement la voie aux théories tensorielles. L'ouvrage ne va pas jusque là mais il prépare fort bien cet aboutissement. Il se termine d'ailleurs par les équations de Monge-Ampère qui sont aussi les équations du second ordre le plus immédiatement susceptibles de générations de nature vectorielle.

Nombreux sont les exercices résolus et à résoudre (certains constituant une notable ouverture sur les fonctions elliptiques); l'instrument de travail est l'un des plus parfaits qui soient.

A. BUHL (Toulouse).

P.-C. DELENS. — **Méthodes et Problèmes des Géométries différentielles euclidienne et conforme** Préface de M. E. CARTAN. — Un vol. gr. in-8° de X-184 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1927.

Cet ouvrage rappelle celui de C. Burali-Forti et T. Boggio intitulé *Espaces courbes, Critique de la Relativité*, que nous avons analysé ici (T. XXIII, 1923, p. 334) et qui est d'ailleurs cité par M. Delens. Seulement le présent auteur n'éprouve point le besoin d'émettre une opinion relativiste; les magnifiques progrès de la géométrie dus, en grande partie, aux Théories einsteiniennes mais aussi à d'autres influences récemment examinées par M. G. Bouligand (*Revue Scientifique*, 8 octobre 1927) suffisent, en eux-mêmes, à des développements grandioses.

Ceci est aussi naturellement très mêlé avec la Théorie des groupes et, les groupes les plus maniables, les plus immédiatement géométriques étant les groupes homographiques, le Calcul vectoriel, qui n'était guère autrefois qu'un calcul de translations et de rotations, a pu se hausser jusqu'aux homographies les plus étendues. Ce n'est pas tout. Il y a des espaces, d'ailleurs faciles à concevoir, dont les éléments sont des cercles et des sphères; les coordonnées y sont notamment pentasphériques mais, là encore, le Calcul géométrique pur peut s'introduire avec utilité et élégance.

Il n'est pas absolument aisé de bien préciser l'origine historique de tout ceci. Möbius et Grassmann furent prodigieux mais semblent déjà lointains. L'école italienne fut suivie par une école hollandaise (Schouten, Struik, Hlavaty); en France, M. Cartan semble avoir apporté des synthèses particulièrement remarquables par un maniement ingénieux et simple des formes de Pfaff liées par les opérations ultra-élémentaires de multiplication extérieure ou de dérivation extérieure, celle-ci revenant à la construction de formules stokiennes. Ces dernières formules, nées pour l'Electromagnétisme, triomphent maintenant en géométrie pure. Electromagnétisme équivaut à Géométrie et réciproquement. Ce qui prouve que toutes ces considérations sont vraiment des formes durables de la pensée humaine, c'est justement leur extrême généralité. Elles ne s'étudient pas sans peine mais, quand on est arrivé à les posséder, on constate avec surprise que tout ce que l'on savait auparavant de Géométrie, de Cinématique, de Mécanique, ..., ne fait plus l'effet que de bribes auxquelles on s'étonne d'avoir attaché tant d'importance.

La Science semble avoir des stades d'initiation non également accessibles

à tous; encore une fois, on ne parvient pas aux stades supérieurs sans effort mais les méthodes générales surgissent maintenant avec abondance; ceux qui ne se les assimileront pas devront se résigner à n'être que des personnages de second plan qui ne pourront même pas reprocher aux esprits généraux de s'entourer de mystère, puisque ces derniers s'ingénient, comme M. Delens, à se faire comprendre sous les formes les plus captivantes et les plus esthétiques.

N'oublions pas les importantes contributions à la Géométrie conforme dues à M. Vessiot; les propriétés les plus générales du groupe des transformations ponctuelles n'altérant pas les angles prolongent heureusement l'inversion et toute la géométrie pentasphérique de Gaston Darboux, avec un sentiment particulier de la théorie des surfaces que M. Delens a également retrouvé et très bien dépeint en formules condensées.

Nous n'avons point de raison d'être moins élogieux que M. Cartan ne l'a été dans sa préface; ceci est de la belle géométrie où il est curieux que l'on puisse s'inspirer jusqu'à un certain point de l'appareil projectif même dans des domaines non projectifs. Quel triomphe pour le symbolisme considéré autrefois comme une vaine floraison de notations.

A. BUHL (Toulouse).

G.-C. EVANS. — **The logarithmic Potential. Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems.** (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume VI). — Un volume gr. in-8° de VIII-150 pages. New-York, 1927.

Cet ouvrage, dédié à Vito Volterra, est aussi un hommage à l'Ecole mathématique française. Le problème de Dirichlet, dans le cas du cercle, est toujours appuyé sur l'intégrale de Poisson mais avec les extensions de la notion d'intégrale dues à Stieltjes et à M. Lebesgue. Et Stieltjes, s'il n'était point Français d'origine, appartient certainement à l'Ecole française par son esprit, par ses travaux côtoyant ceux d'Hermite et — ce que j'oublierai moins qu'un autre — par son professorat à l'Université de Toulouse, dans la chaire même où j'enseigne actuellement.

Toujours dans le livre de M. Evans, on rencontre, plus loin, des emprunts aux travaux de MM. Zaremba et Bouligand. Bien que le premier illustre actuellement l'Université de Cracovie, il me semble encore presque aussi compatriote que le second, tant il manie aisément notre langue et nos méthodes et tant d'ailleurs il a exercé en France même, avec le plus beau talent didactique. Enfin les idées directrices de l'ouvrage ont été résumées en des Notes publiées, en 1923, aux *Comptes rendus* de Paris.

L'intégrale de Poisson ne va point d'abord sans la série de Fourier, les perfectionnements de celle-ci dûs encore à M. Lebesgue, les finesses adjointes à la notion de continuité par M. Borel et le concept — encore borélien — de sommabilité ici transporté aux séries trigonométriques par M. Fejér.

Après le potentiel de simple couche sur le cercle on passe aisément au problème de Neumann circulaire avec des distinctions intéressantes entre les cas où la distribution massique a, ou non, un caractère physique; il y a des cas non physiques représentables cependant physiquement avec l'approximation qu'on voudra. On sait que c'est là l'un des moyens d'arriver à la représentation analytique approchée de fonctions non analytiques. Quelques

pages plus loin, nous retrouvons l'intégrale de Cauchy, ce qui paraît terminer la partie élémentaire de l'exposé.

Les problèmes aux limites fondamentaux, d'abord envisagés dans le domaine circulaire, sont maintenant repris dans des régions quelconques d'abord simplement connexes. La notion de représentation conforme est utilisée en premier lieu; elle peut changer un cercle en bien d'autres domaines mais, outre ce procédé global, elle donne de délicats procédés d'approche pour les points frontières dont les irrégularités possibles sont même alors susceptibles de certains classements (Osgood, Carathéodory, ...).

Aux domaines simplement circulaires, on peut adjoindre des domaines multiplement connexes limités par des cercles en nombre quelconque et disposés de manière non nécessairement symétrique; toutefois, le cas des régions annulaires est particulièrement élégant et conduit facilement à des systèmes d'équations de Fredholm.

Un dernier chapitre a trait aux questions récemment associées aux problèmes de Dirichlet et de Neumann, notamment à celles examinées par M. G. Bouligand dans le fascicule XI du *Mémorial des Sciences mathématiques*. On y retrouve aussi Poincaré, Harnack, Lusin et Priwaloff avec les considérations de singularités limites formant des ensembles de mesure nulle et finalement Hadamard avec les singularités situées sur la circonférence d'un cercle de convergence taylorien.

Le titre de l'œuvre annonçait un sujet touchant à beaucoup d'autres; M. Evans a résumé l'essentiel de ces diverses considérations avec de remarquables qualités de simplicité et d'homogénéité.

A. BUHL (Toulouse).

ERIC T. BELL. — **Algebraic Arithmetic**. (American mathematical Society, Colloquium Publications, Volume VII). — Un volume gr. in-8° de iv-180 pages. New-York, 1927.

Ce beau volume pourrait être très médité en France où les travaux des Liouville, Hermite, Lucas, Appell, ... n'ont pas été sans conduire à une « arithmétique algébrique » mais sans que celle-ci ait été complètement dégagée de sa génération analytique ni préservée de l'oubli où elle s'effacerait actuellement si le présent ouvrage américain n'arrivait fort à propos.

Il semble bien qu'il n'y ait qu'une seule arithmétique, qu'une seule manière de se représenter des entiers et des propriétés d'entiers alors qu'il y a, au contraire, au moins théoriquement, une infinité d'algèbres, c'est-à-dire une infinité de manières d'assembler des symboles n'ayant, au premier abord, aucune valeur déterminée. Telle relation arithmétique peut alors devoir plus à telle algèbre qu'à telle autre, être d'une démonstration facile dans l'algèbre A et très difficile ou même impossible dans l'algèbre B. On conçoit que ce n'est pas peu de chose que de dominer toutes les algèbres possibles et de les faire intervenir, l'une ou l'autre, avec le maximum d'à-propos, dans une étude arithmétique. Et ceci fait concevoir aussi pourquoi la Théorie des Nombres passe ordinairement pour plus difficile que l'Algèbre; il faut entendre; plus difficile qu'une algèbre.

Les différentes variétés d'algèbre ici étudiées sont des constructions essentiellement symétriques et ne peuvent être autre chose; elles tiennent aux groupes, aux nombres complexes, aux matrices. L'algèbre P de la parité est particulièrement suggestive à cet égard. Les notions élémentaires de

fonction paire et impaire peuvent être étendues quant à des substitutions extrêmement générales sans que l'on cesse de percevoir, en P , des symétries de fonctions circulaires. Ensuite viennent les symétries de fonctions multiplement périodiques construites par quotients de fonctions θ ; on sait la richesse arithmétique de ces développements mais peut-être en voit-on ici la meilleure des explications non dans des aboutissements de transformations fonctionnelles mais dans les symétries matricielles qui ont rendu ces transformations possibles. Dès que l'Arithmétique s'élève tant soit peu, elle semble dissimuler de plus en plus l'origine de ses harmonies et il ne faut pas un minime pouvoir de pénétration pour projeter de la lumière sur cette origine.

Disons quelques mots des algèbres du type E qui sont de composition multiplicative et rappellent la multiplication extérieure ou le Calcul tensoriel. Plus généralement encore, les algèbres logiques qui ont donné naissance à la logistique sont à rattacher au programme précédent. Toutes ces constructions faites *in abstracto* n'ont jamais à être placées à des points de vue fonctionnels extérieurs à elles ; nées du symbolisme, elles peuvent engendrer tous leurs symboles pour lesquels, bien entendu, on prend souvent les notations exponentielles, trigonométriques, ... ordinaires. Et c'est alors un grand sujet d'étonnement que de constater que le symbolisme pratique et courant ne s'insère presque toujours que sous des formes imparfaites dans des ensembles théoriques dont toutes les parties ont cependant la même valeur logique. L'esprit courant, le sens dit commun sont loin de la logique complète.

Nous croyons en avoir assez dit pour montrer tout l'intérêt et toute l'originalité de l'œuvre de M. Eric T. Bell.

A. BUHL (Toulouse).

J. HORN. — **Gewöhnliche Differentialgleichungen** (Göschens Lehrbücherei). Zweite, völlig umgearbeitete Auflage, mit 4 Figuren. — Un volume gr. in-8° de VIII-200 pages. Prix ; M. 9, geb. 10.50. Walter de Gruyter und Co., Berlin, W 10, und Leipzig, 1927.

Le Professeur J. Horn, de l'Université technique de Darmstadt, est bien connu par ses ouvrages sur les équations différentielles publiés notamment dans la Collection Schubert. Ici, il nous explique, dans une brève préface, qu'il se proposait, depuis longtemps, de passer à la Collection Göschel avec un livre plus élémentaire. Il faut vraisemblablement entendre par là que les sujets sont moins nombreux mais ils sont toujours approfondis avec le même talent rigoureux et simple.

Un premier Chapitre traite des méthodes d'intégration immédiates et comprend les équations du second ordre que l'on peut ramener à celles du premier ordre. Nous passons ensuite (Ch. II) aux théorèmes d'existence et à la méthode des approximations successives, rapportée aux travaux de M. Emile Picard, ainsi qu'aux solutions singulières

Les méthodes d'approximation graphiques et numériques (Ch. III) sont très soignées, notamment celle de Runge et Kutta qui s'appuie, avec d'habiles simplifications, sur le développement taylorien et qui, appliquée à une équation de Bernoulli formellement intégrable, permet de comparer, de manière fort satisfaisante, l'intégration exacte et l'intégration approchée.

Les quatre figures du volume sont ici consacrées aux intégrations graphiques approximatives.

Les équations différentielles linéaires (Ch. IV) s'inspirent immédiatement des idées de Fuchs, de la notion de système fondamental de solutions éclaircie toutefois dans le cas des équations à coefficients constants. Suivent la méthode de la variation des constantes pour les équations à second membre et les applications aux théories oscillatoires. Les systèmes linéaires sont réunis immédiatement aux équations isolées.

Le Chapitre V étudie l'allure des courbes intégrales réelles d'équations linéaires de second ordre. En VI, on reprend l'équation du premier ordre dans le domaine complexe et, en VII, les équations linéaires, d'ordre quelconque, en ce même domaine. Avec les singularités de ces dernières, les théories de Fuchs reprennent le premier plan. La discussion de l'équation fondamentale déterminante est complète. Elle est suivie par l'équation du type de Fuchs en laquelle la dérivée d'ordre $n - k$ de y a un coefficient $\xi^{n-k} P_k(\xi)$ avec P série de puissances, type général qui comprend notamment l'équation de Gauss définissant la série hypergéométrique. On arrive de même à l'équation de Legendre. L'équation de Bessel joue le rôle d'un type singulier non fuchsien servant d'amorce à l'étude de cas singuliers analogues mais plus généraux.

Le Chapitre VIII étudie surtout les solutions d'équations différentielles comme fonctions de paramètres introduits dans ces équations. Le cas d'un seul paramètre, dans une seule équation, semble déjà avoir été traité de manière étendue, ne serait-ce que par M. Emile Picard, mais le cas de systèmes généraux dépendant de paramètres en nombre quelconque constitue une théorie mathématique se rattachant notamment à la Théorie des Groupes et pour laquelle il reste énormément à faire. Sachons particulièrement gré à l'auteur d'avoir au moins indiqué la question.

Quant aux singularités d'équations différentielles non linéaires elles sont surtout considérées sur l'équation aux dérivées partielles linéaire et sur les systèmes linéaires à seconds membres; signalons les *points-tourbillons*, entourés d'une infinité de courbes intégrales fermées, et les séries divergentes qui, vérifiant formellement une équation différentielle, sont souvent propres à mettre facilement en évidence quelque singularité de celle-ci.

Notons que l'ouvrage rend volontiers hommage aux géomètres français; outre Emile Picard, nous y trouvons Goursat, Jordan, Serret, Painlevé, Vessiot. Il continuera de jouir d'un très légitime succès dans tous les pays de belle culture mathématique.

A. BUHL (Toulouse).

G. JULIA. — **Cours de Cinématique**, rédigé par J. DIEUDONNÉ. — Un volume in-8° de VIII-150 pages et 52 figures. Prix: 25 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1927.

Le géomètre proprement dit n'est point, chez M. Gaston Julia, inférieur à l'analyste. Il nous donne ici de la belle cinématique vectorielle qui conduit, par exemple, aux finesses de la théorie du trièdre mobile et qui pourrait conduire aussi bien, quoiqu'il ne s'occupât point de la chose, aux développements de l'Electromagnétisme de Maxwell. Le théorème qui caractérise le mouvement d'un solide veut que deux points M , N , en mouvement, aient des vitesses à projection égales sur la droite MN . Les distributions de

vitesses à un instant donné et la notion générale de mouvement hélicoïdal tangent constituent une étude *différentielle* du mouvement complétée plus tard par une étude *intégrale*. L'accélération de Coriolis avoisine des formules de Bour évoquant déjà le trièdre susmentionné et la géométrie des courbes et des surfaces prend naturellement la forme cinématique avec les méthodes de Poincaré et de Roberval. Le trièdre à sommet fixe, les équations de Riccati y associées, apparaissent plus simplement que dans les *Surfaces* de G. Darboux; la géométrie cinématique plane avec ses questions de courbure, la formule d'Euler-Savary, les constructions appropriées sont discutées jusque dans les cas singuliers qui mettent les généralités en défaut.

Signalons encore la double génération des épicycloïdes donnée par Cremona. On sait et d'ailleurs on comprend aisément que la cinématique du plan se transporte sur la sphère; quant au mouvement le plus général d'un solide, il donne lieu à une géométrie réglée déjà mise en évidence par MM. Appell et Picard dans leurs Thèses publiées il y a maintenant un demi-siècle. Il y a là de beaux complexes, surtout des complexes linéaires et des cubiques gauches à génération immédiate. La vive intelligence de M. Gaston Julia est allée à tout ceci très simplement, sans formules encombrantes ou asymétriques. Le rédacteur, M. Jean Dieudonné, a élégamment suivi une telle inspiration et, à côté de la *Cinématique* de M. G. Kœnigs, nous avons maintenant un résumé brillant et clair, très géométrique, bien qu'il soit dû à un Maître ès considérations fonctionnelles des plus transcendantes et des plus abstraites.

A. BUHL (Toulouse).

G. RÉMOUNDOS. — **Extension aux Fonctions algébroides multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXIII). — Un fascicule gr. in-8° de 66 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1927.

Il y a certainement encore maintenant d'excellents mathématiciens auxquels la notion de fonction algébroïde n'est point familière. La définition est cependant simple et prolonge de la manière la plus naturelle celle de la fonction algébrique. Soit l'équation

$$u^n + A_1(z) u^{n-1} + A_2(z) u^{n-2} + \dots + A_n(z) = 0.$$

Si les A sont des polynômes, elle définit u comme fonction algébrique de z ; la fonction algébroïde apparaît quand les A sont des fonctions méromorphes de z . On voit que, pour $n = 1$, la fonction algébroïde est naturellement méromorphe. Naturellement aussi, il y a des algébroides entières correspondant aux A fonctions entières.

Les théorèmes qui limitent les modules des fonctions entières ou méromorphes, ou expriment des lois de croissance exponentielle approchées, ou interdisent certaines racines ou certains systèmes de racines à des équations de nature entière ou méromorphe, tous ces théorèmes, dis-je, qui sont à la gloire de l'Ecole française (E. Picard, E. Borel) se généralisent pour les fonctions algébroides. Et la généralisation est aisée, symétrique, esthétique; cette affirmation ne diminue en rien le mérite de géomètres comme M. Rémoundos mais elle montre, une fois de plus, combien les premiers théorèmes de M. Emile Picard, qui datent maintenant d'un demi-siècle, tenaient

profondément au mécanisme primordial et intime de la théorie des fonctions. Il y a plus. Les extensions algébroides ne vont pas sans identités linéaires et exponentielles, généralement impossibles sans évanouissement complet, absolument analogues à celles introduites par Hermite, Lindemann, Hilbert, dans la Théorie des Nombres, pour étudier des non algébricités telles celles de e et π . Au fond, c'est toujours l'impossibilité de certaines équations qui est en jeu mais la théorie des fonctions algébroides paraît précisément être ce qu'il y a de mieux et de plus général, à l'heure actuelle, pour étudier et dominer de haut ces impossibilités. Les formules de l'ouvrage sont fort simples, le sujet ayant autant de naturel que de profondeur.

A. BUHL (Toulouse).

N.-E. NÖRLUND. — **Sur la « Somme » d'une fonction** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXIV). — Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1927.

Autre fascicule de belle et compréhensive intuition. Si, ω étant infiniment petit, on cherche à résoudre l'équation à fonction inconnue f ,

$$f(x + \omega) - f(x) = \omega \varphi(x)$$

on est évidemment dans le cas de l'intégration ordinaire. La « Somme » de $\varphi(x)$ apparaît, au contraire, lorsque ω est fini. On est alors en présence d'une équation linéaire aux différences et d'une des plus élégantes qui soient. M. Nörlund est un spécialiste des ces théories; rappelons qu'il est l'auteur d'un gros volume de *Vorlesungen über Differenzenrechnung* que nous avons eu le plaisir d'analyser ici-même (T. XXV, 1926, p. 145) et qui développe déjà grandement l'idée de « Somme ». Sur ce point le *Mémorial* servira d'introduction particulièrement heureuse.

Le symbole ordinaire d'intégration est ici remplacé par un S plus général mais que l'on traite, autant que possible, de la même manière. Les polynomes de Bernoulli s'imposent pour « Sommer » des polynomes quelconques; il faut les généraliser pour « Sommer » une fonction entière de nature transcendante d'où des fonctions considérées par Hurwitz, Appell et une élégante intégrale complexe imaginée par Guichard. Plus généralement encore, la fonction f peut être prise égale à une série de terme général de la forme $\varphi(x + n\omega)$, la divergence étant combattue par l'adjonction d'une certaine intégrale définie et de facteurs exponentiels; cette méthode, dans le cas où $\varphi(x)$ égale $1/x$, conduit à d'importants développements étudiés par Legendre, Poisson et Gauss. La « Somme » de $\log x$ conduit aisément à $\log \Gamma(x)$ et aux propriétés de la fonction Γ . Tout ceci s'étend élégamment au cas où x et ω sont complexes d'où de très intéressantes considérations de non uniformité par rapport à ω . Enfin les méthodes de « Somme » peuvent être considérablement variées comme l'a, par exemple, montré Hilb en ramenant nombre d'équations aux différences finies à des équations différentielles. N'oublions pas que le sujet remonte à Abel, à ce génial adolescent qui ne sut concevoir que de belles et grandes choses et voyons aussi, dans la présente théorie, un aboutissement spécial et des plus curieux du Calcul des Intégrales définies.

A. BUHL (Toulouse).

G. DARMOIS. — **Les équations de la Gravitation einsteinienne** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat ; fasc. XXV). — Un fascicule gr. in-8° de 48 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1927.

C'est un fascicule de bien grand intérêt que celui que publie aujourd'hui M. Georges Darmois. Les équations de la Gravitation selon Einstein furent d'abord traitées par des procédés plus géniaux que méthodiques et l'on pouvait même craindre qu'en certains endroits, la complexité de l'armature analytique ne dissimulât quelque désaccord avec des théorèmes d'existence fondamentaux et classiques. Cette crainte apparaît maintenant comme vaine : les équations générales d'Einstein se rapprochent, de plus en plus, dans les cas maniables, des équations de propagation des mouvements ondulatoires et les cas d'intégrabilité s'accordent avec les généralités relatives aux caractéristiques et bicaractéristiques des équations aux dérivées partielles, en toute conformité avec les résultats généraux dûs à MM. Hadamard et Vessiot. C'est surtout ce que nous montre M. Darmois dans les trois premiers chapitres de son exposé.

Le Chapitre IV explique, d'une manière vraiment lumineuse, le rôle des célèbres équations

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = k T_{ik} .$$

Le tenseur T_{ik} n'est qu'un modèle plus ou moins maniable de la matière. On sait l'accorder, de mieux en mieux, avec les anciennes conceptions de la Mécanique des milieux continus.

Le Chapitre V traite de la matière dans le champ qu'elle crée ; il y a ici un délicat problème de raccordement. C'est déjà très bien, évidemment, que d'expliquer des effets gravitationnels extérieurs à des corps matériels mais il n'y a aucun pouvoir explicatif dans le mot *matière* ; il faut, pour ainsi dire, prolonger l'analyse gravitationnelle dans celle-ci et nous connaissons d'autant mieux la matière que nous serons capables d'analyser des phénomènes de gravitation de plus en plus complexes. Le Chapitre VI et dernier nous montre qu'à cet égard nous savons encore peu de chose. Après le corps d'épreuve de Schwartzschild qui subit le champ sans le modifier, nous avons eu les ds^2 einsteiniens dans les champs newtoniens (Levi-Civita) puis les champs à symétrie axiale (Weyl, Chazy) ; le problème des deux corps est encore à peu près vierge. Toutefois M. De Donder semble avoir construit tout récemment d'intéressants ds^2 pour le problème des n corps. La loi d'Einstein paraît toujours plus redoutable que celle de Newton mais que de profondeurs insoupçonnées ne promet-elle pas de révéler.

A. BUHL (Toulouse).

G. DARMOIS. — **Statistique mathématique**. Préface de M. Huber, Directeur de la Statistique générale de la France. Encyclopédie scientifique publiée sous la direction du Dr Toulouse. Bibliothèque de Mathématiques appliquées. Directeur M. d'Ocagne. — Un vol. in-16 (18 × 11) de xxiv-364 pages et 29 figures. Prix : 32 francs. G. Doin et C^{ie}. Paris, 1928.

Le souple talent de M. Georges Darmois passe des équations d'Einstein à une partie fort différente de la Science, encore que les méthodes statistiques aient à jouer un rôle de plus en plus grand en Physique. C'est comme

Professeur à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris qu'il nous expose des théories qui, en France, semblent neuves sur bien des points.

La Statistique sert forcément de base au Calcul des Probabilités, car dénombrer des épreuves c'est faire de la statistique, mais les dénombrements, très simples dans le jeu de pile ou face, exigent des méthodes indéfiniment variables et les procédés d'approximation les plus divers quand on se trouve en présence des séries phénoménales naturelles. On a beaucoup épilogué pour savoir jusqu'à quel point la méthode probabilitaire pouvait s'accorder avec la réalité: les faits d'observation sont-ils assimilables à des tirages de boules effectués hors d'une urne? La réponse à une telle question ne saurait être tranchante et immédiate. Tout dépend de la manière et de l'habileté avec lesquelles on interrogera l'urne infiniment complexe dont parlait Quételet, dans sa *Physique sociale*, urne qui est la Nature. Voilà une première et très générale conception de la Statistique.

Pour s'accorder avec le nouvel ensemble de doctrines, le Calcul des Probabilités est ici remanié et présenté sous des aspects particulièrement intéressants. A la notion d'espérance mathématique est associée celle de variable aléatoire; le langage de la statique (masses, moments, ...) est des plus commodes quant à l'examen de la distribution de grandeurs aléatoires associées et ceci conduit rapidement aux inégalités de Tchebichef, à la déviation, à la loi des grands nombres, au théorème de Jacques Bernouilli, toutes choses dont la simplicité apparaît particulièrement à la clarté des méthodes modernes. Les variables aléatoires peuvent devenir continues, d'où la loi normale de Laplace-Gauss si bien reprise par M. Paul Lévy. Avec les épreuves grandement répétées apparaît la conception de *moyenne des valeurs expérimentales*, moyenne ordinairement stable et due à l'existence d'une probabilité.

Les *courbes de fréquence* représentent généralement des fonctions approchées, à variables essentiellement réelles. Karl Pearson en considéra sept types. Les fonctions eulériennes, les séries de Fourier et, plus généralement, les séries à fonctions orthogonales normées fournissent de précieux instruments de représentation.

La détermination approximative du contenu d'une urne par une exploration *partielle* de cette urne est le problème fondamental de la statistique pratique. Dans la réalité, il arrive souvent que les tirages ne peuvent être considérés comme indépendants l'un de l'autre; les séries ont des coefficients spéciaux de *dispersion*, de *divergence* et c'est ici qu'intervient notamment le tirage par *grappes* de Borel. Le grand intérêt de toutes ces questions est encore dépassé avec la Théorie de la Corrélation, théorie déjà assez implicitement mêlée à ce qui précède mais que M. Darmois ne met très explicitement en évidence qu'avec son Chapitre VI et qui forme alors à peu près la seconde moitié du livre.

Dire que des séries de faits naturels sont en corrélation, c'est parler un langage assez clair par lui-même, mais il convenait de le préciser, de le rendre apte à la formulation mathématique. La corrélation est une correspondance fonctionnelle qui a l'indétermination du probable, son caractère *stochastique*; ce mot nouveau, l'invocation continuelle des travaux de Pearson incitent à penser que c'est là que nous sommes dans un modernisme pas encore très bien acclimaté en France. Il importe d'y venir et c'est pourquoi le présent livre sera d'une très grande utilité.

Un des concepts fondamentaux de la corrélation est celui de *régression*

ou tendance vers le retour aux moyennes; il y a des coefficients et des moments de corrélation, des fonctions caractéristiques à plusieurs variables, des schèmes de régression particulièrement simples quand ils peuvent être linéaires. Sauf dans le cas linéaire, il convient de distinguer un *rapport* et un *coefficient* de corrélation.

C'est surtout la Théorie de la Corrélation qui pose, pour l'urne, le problème d'existence. Elle nous force aussi à nous interroger sur les procédés de tirage; elle nous incite à varier ceux-ci dans certaines directions méthodiques. La variation de certains coefficients ne se fait pas toujours à l'intérieur d'une même formule; elle peut conduire à changer celle-ci et même toute une méthode. Gauss et Bravais semblent avoir perçu quelque chose de la corrélation mais c'est encore Pearson qui montre la profonde différence de leurs conceptions d'avec le point de vue actuel qui n'apparaît guère qu'avec Galton. Les formes quadratiques, la géométrie à n dimensions interviennent comme dans les schèmes universels de la plus rigoureuse Physique mathématique et il n'y a pas lieu de s'en étonner, le probable et le corrélatif faisant aussi partie de notre représentation de l'Univers.

En Statistique, l'esprit de finesse et l'esprit de géométrie, opposés l'un à l'autre par Pascal, doivent obligatoirement faire bon ménage et le bel ouvrage de M. Darmois exercera certainement l'un et l'autre.

Il est intéressant de noter que, sans qu'il y ait eu la moindre entente pour cela, *L'Enseignement Mathématique* publie, dans le présent fascicule (p. 287) un article de M. D. Mirimanoff où il s'agit de travaux de Statistique mathématique dûs à M. de Montessus de Ballore. Si nous sommes bien informés, ce dernier savant prépare aussi un ouvrage sur la question. Celle-ci, de multiples façons, est donc indéniablement à l'ordre du jour.

A. BUHL (Toulouse).

P. BARBARIN. — **La Géométrie non-euclidienne.** Troisième édition suivie de Notes sur La Géométrie non-euclidienne dans ses rapports avec la Physique mathématique par A. BUHL (Collection *Scientia*). — Un vol. in-8° de 176 pages, 31 figures et 7 planches hors texte. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Cette troisième édition prouve assez l'intérêt d'un sujet que M. Barbarin a eu le grand mérite de traiter une première fois, voici presque trente ans, alors que les théories einsteiniennes n'avaient encore point vu le jour. Le rôle fut vraiment celui d'un précurseur. Et ce n'est pas rien que d'avoir écrit, à la fin du siècle dernier, soit avec le talent d'un géomètre capable de suivre Félix Klein, soit avec le pressentiment de ce que M. Elie Cartan appelle « le contre-coup formidable produit en Géométrie par la Relativité généralisée (voir ci-dessus, p. 200).

Il s'agit d'abord de géométrie non-euclidienne première manière, de celle dans laquelle on admet tous les postulats habituels, sauf celui de la parallèle unique. Alors trois types d'algorithmes sont admissibles, généralement caractérisés par les noms de Riemann, Euclide, Lobatchewsky. Le point de vue est aussi philosophique que possible; l'œuvre d'Euclide est, plus que jamais, admirée et mise en valeur. On cherche seulement à la mettre à sa véritable place dans un ensemble plus général de concepts et de constructions. Insistons sur ce dernier mot; toute droite construite n'est euclidienne

que par un passage à la limite qui lui donne une ténuité, une homogénéité parfaites, lesquelles faisaient dire à Euclide qu'une telle droite repose également sur tous ses éléments. C'est du pur idéalisme. Les généralisations sont encore très idéales mais leur plasticité augmente leur importance et elles s'insèrent de plus en plus dans le réel. Le présent ouvrage a ainsi élargi la place attribuée aux constructions non-euclidiennes et l'auteur a même écrit un chapitre très original, reflétant ses travaux personnels, sur la quadrature du cercle qui, dans un espace paramétrique convenable, peut recevoir diverses solutions élémentaires.

Les opinions et controverses touchant la géométrie non-euclidienne semblent aujourd'hui superflues; aussi M. Barbarin ne leur attribue-t-il qu'un rôle historique. Et l'histoire, dans ce volume, si elle ne joue pas un rôle prédominant, n'en est pas moins traitée de façon fort intéressante. Elle est appuyée par des planches photographiques fixant les traits de Nicolas Lobatchewsky, Bernhard Riemann, Adrien-Marie Legendre, Joseph-Marie De Tilly et Wolfgang Bolyai Farkas, père de Jean Bolyai, duquel n'existe aucun portrait. Une première planche donne un fac-similé des *Eléments* d'Euclide, une dernière représente la pseudo-sphère de Beltrami; le souci esthétique, si nettement apparent dans l'exposé géométrique, l'est tout autant dans le choix et la présentation de ces images.

Les quatre Notes ajoutées par M. A. Buhl visent à la pangéométrie. La première nous familiarise, en effet, avec la multiplication et la dérivation *extérieures*; elle met le lecteur en possession de l'essentiel quant aux méthodes de Grassmann si bien continuées, en France, à l'heure actuelle, par M. Elie Cartan. Il n'y a guère de concepts géométriques inaccessibles pour elles.

La seconde Note est cependant assez particulière mais elle rapproche, avec un haut intérêt, l'Electromagnétisme de Maxwell et la Géométrie de Cayley. On voit que ce sont là deux disciplines absolument identiques qui s'accrochent des mêmes développements et des mêmes notations.

La troisième Note expose brièvement la Géométrie différentielle de Riemann poursuivie jusque par delà le parallélisme de M. Levi-Civita, jusqu'aux espaces de groupes de M. Cartan, jusqu'à l'Univers à cinq dimensions de Schrödinger, De Donder, Ehrenfest, De Broglie, ...

La quatrième expose la Géométrie de la Lumière rattachée au simple espace cayleyen. Le bon sens reprend ses droits même avec la contraction de Lorentz, même avec la dilatation du temps d'Einstein; ce ne sont là que des faits *perspectifs*, analogues à ceux qui, dans la perspective du dessin le plus banal, semblent modifier angles et distances.

Suivant les idées de M. Buhl, tout ceci est d'une homogénéité absolue; les géométries, les théories einsteiniennes, se construisent à partir des principes les plus simples du Calcul intégral, notamment à partir de l'identité

$$\int_C X dY = \int_A dX dY ,$$

en laquelle la science de l'Espace peut trouver ses premiers concepts d'*aire* A et de *ligne* C lui servant de frontière. Et comme des notions géométriques aussi élémentaires sont bien forcément celles d'où part aussi M. Barbarin dans la première partie de l'ouvrage, il s'ensuit que celui-ci est, dans son ensemble, parfaitement coordonné et cohérent. Il n'oppose pas des théories nouvelles à des théories millénaires sous une forme quelque peu agressive:

il montre, au contraire, le merveilleux caractère esthétique de toute la Science pour qui veut la voir d'un point de vue suffisamment élevé.

Notons l'hommage rendu à Charles Cailler, notre regretté collègue de Genève; il prouve à nouveau que la publication de l'*Introduction géométrique à la Mécanique* n'a pas été une œuvre vaine.

H. FEHR.

Edm. LANDAU. — **Vorlesungen über Zahlentheorie.** 3 vol. in-8° à 20 M. le volume. Erster Band: *Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie*, 360 p. Zweiter Band: *Aus der analytischen u. geometrischen Zahlentheorie*, 308 p. Dritter Band: *Aus der algebraischen Zahlentheorie und über die Fermatsche Vermutung*, 341 p. — Les trois volumes reliés en un seul, 66 M.; Verlag S. Hirzel, Leipzig, 1927.

Cet admirable ouvrage est, à quelques modifications près, la reproduction d'un cours sur la théorie des nombres que M. Landau a donné à l'Université de Göttingue pendant les années 1921-1924.

Écrit avec cet entrain et ce souci de la rigueur et de la précision extrêmes qui distinguent toutes les publications de M. Landau, il fera la joie des arithméticiens et contribuera à répandre parmi les jeunes le goût, devenu rare, des recherches arithmétiques. Car rien n'est passionnant comme cette course à travers un pays particulièrement beau avec un guide averti, qui, dans les parties les plus inaccessibles, a aidé à planter les premiers jalons et à tracer les premières voies.

On ne trouvera pas dans ce remarquable ouvrage un traité complet sur la théorie des nombres. Bien des théories et des questions isolées ont été laissées de côté. Mais les grands problèmes qui depuis Fermat ont fait le désespoir de tant d'arithméticiens, les théories nouvellement créées, à l'élaboration desquelles M. Landau a pris une part active lui-même, sont traités avec ampleur, et le lecteur est introduit dans les parties les plus belles de l'arithmétique moderne, à peine abordables il y a quelques années encore.

Il n'était certes pas facile d'exposer des recherches parfois très laborieuses des mathématiciens contemporains. Mais M. Landau réussit à les mettre à la portée des étudiants en fractionnant, suivant son habitude, les difficultés d'un raisonnement un peu long par une sorte de décomposition en éléments simples, que la pensée parcourt sans trop de fatigue.

Le premier volume débute par un exposé magistral des éléments de la théorie des nombres: théorie des congruences, résidus quadratiques, loi de réciprocité, équation de Pell. Le lecteur est initié aux belles méthodes arithmétiques créées par les géomètres du 18^{me} siècle et du commencement du 19^{me}. On sait qu'on n'a pas réussi à en tirer le fruit qu'on avait le droit d'espérer et que c'est surtout grâce à l'introduction des méthodes analytiques que depuis Dirichlet les progrès de l'arithmétique ont été si rapides.

Pour initier le lecteur à ces méthodes, M. Landau expose, en la simplifiant dans la mesure du possible, la belle démonstration du théorème sur la progression arithmétique que nous devons à Dirichlet, ainsi qu'un théorème très curieux de Brun sur les nombres premiers jumeaux, tels que 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, etc.

Et ce n'est qu'après une étude approfondie du problème classique de la représentation d'un nombre entier par une somme de deux, trois et quatre

carrés, cas particuliers du théorème de Waring, que l'auteur aborde la théorie des formes quadratiques et en particulier le problème difficile de la détermination des classes.

Dirichlet en a donné une solution d'une élégance rare, à l'aide d'une méthode analytique admirable, dont le lecteur, déjà préparé par l'étude de la progression arithmétique, saisira toute la beauté. Est-il possible d'arithmétiser, du moins partiellement, l'étude de ces problèmes ? Comme le fait remarquer M. Landau, des conséquences arithmétiques très simples, déjà indiquées par Dirichlet, découlent de ses formules finales, par exemple celle-ci : pour tout nombre premier p de la forme $4k + 3$, le nombre des résidus quadratiques compris entre 0 et p est supérieur au nombre des résidus compris entre $\frac{p}{2}$ et p . Or, personne n'a réussi jusqu'à présent à donner

de cette proposition si simple une démonstration purement arithmétique.

Le reste du volume est consacré à l'étude de deux grands problèmes : ceux de Goldbach et de Waring.

Un nombre entier pair est-il toujours décomposable en une somme de deux nombres premiers ? Goldbach le croyait. On le croit encore aujourd'hui, il est probable même que pour tout nombre pair > 2 l'assertion de Goldbach est également vraie au sens moderne (l'unité n'étant pas regardée comme un nombre premier).

La démonstration de cette proposition, en supposant qu'elle soit vraie, nous échappe encore et l'on est même porté à penser, avec M. Landau, que dans l'état actuel de la science, l'assertion de Goldbach peut être considérée comme indémontrable.

Récemment, MM. Hardy et Littlewood ont abordé ce problème à l'aide de méthodes nouvelles qu'ils ont introduites avec succès dans la théorie additive des nombres. S'ils ne sont pas arrivés à démontrer l'assertion de Goldbach, du moins ont-ils réussi à la relier asymptotiquement à d'autres propositions, indémontrées comme elle, dont les mathématiciens se sont beaucoup occupés depuis Riemann.

Il faut savoir gré à M. Landau d'avoir su mettre à la portée des jeunes les résultats des recherches profondes et laborieuses des analystes anglais, tâche ardue, à laquelle il était particulièrement bien préparé. Toute cette partie de l'ouvrage et la plupart de celles qui suivent portent la trace profonde de ses travaux personnels.

Mais passons au théorème de Waring sur la représentation des nombres entiers par une somme de $k^{\text{ièmes}}$ puissances, auquel M. Landau avait consacré lui-même des travaux importants, mais dont une démonstration générale n'a été donnée qu'en 1909 par M. Hilbert, démonstration aussitôt reprise, simplifiée et prolongée par les géomètres d'aujourd'hui.

C'est encore les recherches récentes de MM. Hardy et Littlewood (1922-1925) que M. Landau expose dans cette partie de son ouvrage. On sait que les mathématiciens anglais ont non seulement retrouvé le grand théorème de Waring-Hilbert, mais que leurs méthodes ont permis, entre autres résultats nouveaux, de donner une formule asymptotique importante pour le nombre de représentations d'un entier par une somme de $k^{\text{ièmes}}$ puissances.

Que la longueur des démonstrations, inévitable dans ces sortes de problèmes, ne décourage pas les jeunes lecteurs de l'ouvrage de M. Landau. Les perspectives nouvelles qui s'ouvriront devant eux leur feront vite oublier les fatigues de l'ascension.

En 1824, M. Winogradoff a publié une démonstration nouvelle sensiblement plus courte, mais lacunaire, du théorème de Waring-Hilbert, dont M. Landau, après l'avoir rétablie, a réussi à tirer une relation asymptotique extrêmement curieuse.

C'est par l'étude de ces recherches que se termine le premier volume. Je tiens à ajouter, pour donner une idée de la longueur du chemin parcouru, que ce volume contient 366 théorèmes et lemmes.

La première partie du second volume est consacrée à l'étude de quelques problèmes fondamentaux de la théorie analytique des nombres, surtout à celle du grand problème des nombres premiers. Dans cette partie de l'arithmétique, l'emploi de l'analyse est imposé par la nature même des problèmes que l'on y traite. Des méthodes analytiques singulièrement profondes ont dû être créées pour vaincre les difficultés qui s'opposaient à leur solution. A ce point de vue l'histoire du problème des nombres premiers, retracée à grands traits par M. Landau dans cet ouvrage et dans ses publications antérieures, est particulièrement intéressante. Déjà pressentie par Gauss vers 1793 et rendue probable par les travaux de Tchebycheff, l'expression asymptotique de $\pi(x)$ (nombre des nombres premiers $\leq x$) n'a pu être rigoureusement établie sous sa forme la plus simple qu'en 1896 par MM. de la Vallée-Poussin et Hadamard, grâce aux méthodes analytiques puissantes introduites dans l'intervalle par Cauchy, Weierstrass et Riemann. Depuis 1896 des progrès nouveaux ont été réalisés dans cette voie. M. Landau fait connaître l'expression asymptotique de $\pi(x)$ obtenue par M. de la Vallée-Poussin en 1899 et celle toute récente et plus précise encore donnée en 1924 par M. Littlewood. M. Landau réussit à les établir d'une manière beaucoup plus simple, sans s'appuyer sur certaines propriétés de la fonction de Riemann utilisées par MM. de la Vallée-Poussin et Littlewood. Sa méthode lui fournit en même temps des expressions asymptotiques analogues de la fonction plus générale $\pi(x; k, l)$, dont la première avait été donnée par l'auteur en 1909.

Les chapitres suivants sont consacrés à une étude approfondie de la fonction de Riemann et des problèmes qui s'y rattachent.

C'est pour la première fois, si je ne me trompe, que les recherches provoquées par le fameux mémoire de Riemann sont exposées d'une manière aussi complète. Le grand « Handbuch » de M. Landau ne va pas au delà de 1908 et depuis cette époque la théorie de la fonction de Riemann a fait des progrès considérables. Bien des démonstrations ont été simplifiées par M. Landau lui-même, des propriétés nouvelles inattendues ont été révélées par MM. Bohr, Landau, Hardy et Littlewood, et si l'on n'a pas encore réussi à établir la fameuse assertion de Riemann, nous savons maintenant que la

fonction de Riemann a une infinité de zéros situés sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ (théorème de Hardy, dont MM. Hardy et Littlewood ont donné récemment une démonstration particulièrement simple et belle). M. Franel a réussi, d'autre part, à relier l'assertion de Riemann à la théorie des suites de Farey. Tous ces beaux résultats sont établis à l'aide de méthodes dont on ne saurait assez admirer l'ingéniosité et la profondeur.

C'est à l'étude de quelques-uns des grands problèmes de la théorie géométrique des nombres qu'est consacré le reste de ce volume.

Quelle est l'expression asymptotique du nombre des points à coordonnées entières intérieurs à un domaine ?

M. Landau se borne à l'étude de ce problème fondamental et de quelques questions connexes, en s'arrêtant surtout sur le fameux problème du cercle. On sait qu'une première approximation avait déjà été donnée par Gauss, mais des résultats plus précis, parfois déconcertants, n'ont été obtenus que dans ces dernières années. Ici encore la part de M. Landau a été des plus considérables. Non seulement il a réussi à perfectionner des méthodes déjà connues, comme celles de Piltz et de Pfeiffer, mais il en a créé de nouvelles. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de M. Landau un exposé magistral des résultats obtenus dans cette voie depuis Gauss jusqu'à Voronoï et les géomètres contemporains, parmi lesquels il faut citer en première ligne, à côté de M. Landau, MM. Sierpinski, Hardy, van der Corput, Winogradoff et Jarnik.

Mais passons au volume III, consacré à cette admirable théorie des nombres algébriques que nous devons à Kummer et à Dedekind et qui trouve encore son origine dans les travaux de Gauss, en particulier dans sa théorie de la composition des formes quadratiques.

Quelles sont les lois de cette arithmétique nouvelle ?

M. Landau nous l'apprend, après avoir montré sur des exemples simples que les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique classique ne s'appliquent pas toujours aux nombres nouveaux. Dans les domaines plus larges qu'on est conduit à envisager ici, la divisibilité semble n'obéir à aucune loi, et il fallait le génie de Kummer et de Dedekind pour introduire l'ordre et l'harmonie dans ce désordre apparent. M. Landau consacre plusieurs chapitres du plus haut intérêt à l'étude des corps algébriques et à la théorie des idéaux de Dedekind, qu'il simplifie et modernise de la manière la plus heureuse. Il introduit en passant les notions si importantes de nombres et de corps algébriques relatifs, sur lesquelles il aura à s'appuyer dans l'étude du dernier théorème de Fermat.

La beauté et l'importance des conceptions de Dedekind éclatent dans la théorie des corps quadratiques, qui forme le sujet des trois chapitres suivants. M. Landau souligne le parallélisme qui subsiste entre cette théorie et celle des formes quadratiques, parallélisme qui éclaire d'un jour nouveau la théorie classique de Gauss.

Un paragraphe intéressant, sans lien apparent avec la théorie des nombres algébriques, est intercalé par M. Landau dans l'un des premiers chapitres de ce volume. Ce paragraphe, un peu long et assez difficile à lire, est consacré au théorème de Thue précisé par Siegel et aux propositions si curieuses de Landau-Ostrowski et de Pólya qui s'y rattachent, propositions relativement peu connues encore, malgré le grand intérêt qu'elles présentent. Dans un autre paragraphe, intercalé dans le même chapitre, le lecteur trouvera une démonstration élégante de la transcendance des nombres e et π .

Le reste du volume est consacré au dernier théorème de Fermat.

Dans ce domaine les résultats les plus brillants ont été obtenus par Kummer, à l'aide d'une méthode célèbre qui repose sur la théorie des nombres idéaux, à laquelle le théorème de Fermat a du reste servi de prétexte. M. Landau établit ici le résultat principal obtenu par le grand géomètre allemand, dont la démonstration complète n'a été exposée qu'une seule fois, avant M. Landau, par M. Hilbert dans son « *Zahlbericht* », où elle est rattachée à des théories plus générales. Le point délicat de l'analyse de Kummer est une propriété très curieuse des unités du corps envisagé dans cette théorie, qu'ordinairement on se borne à énoncer, mais que M. Landau

établit rigoureusement, en simplifiant dans la mesure du possible les raisonnements de Kummer et de M. Hilbert.

Depuis Kummer l'étude de l'équation de Fermat a fait l'objet de nombreuses recherches. Dans ses leçons, M. Landau se borne à établir le fameux critère de Wieferich et les critères analogues que M. Furtwängler a réussi à déduire de la loi de réciprocité d'Eisenstein, et dans le dernier chapitre il fait connaître un théorème intéressant de M. Vandiver.

Nous voici arrivés au terme de notre voyage. Est-il besoin de dire combien cet ouvrage si vivant, où à chaque page éclate la science la plus profonde et la plus sûre, pourra nous être utile ? En montrant ce qui a été fait et ce qu'il reste à faire, il facilitera singulièrement l'étude des grands problèmes de l'arithmétique moderne, et qui sait si, grâce à lui, un avenir prochain n'apportera pas les solutions qui nous échappent encore.

D. MIRIMANOFF (Genève).

E. LANDAU. — **Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.** Zweite auflage. — 1 vol. in-8°, VII-147 p.; M. 6,40; B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1927.

Dans cet excellent petit livre, dont la première édition a paru en 1917, M. Landau, rappelons-le, a pour but de mettre à la portée des étudiants les éléments de la théorie des nombres algébriques de Dedekind et d'autre part de faire connaître aux jeunes les points essentiels de la théorie analytique des idéaux, en particulier son beau théorème des idéaux premiers qu'il a découvert en 1903.

Très clair et facile à lire, ce volume ne suppose chez le lecteur aucune préparation spéciale.

La seconde édition qui vient de paraître marque un progrès notable sur la première. Le lecteur n'est plus renvoyé au grand « Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen » du même auteur; des démonstrations plus simples, parfois entièrement nouvelles, sont données de certaines propositions de la partie analytique du livre, notamment d'un théorème classique de M. Hadamard, et les indications bibliographiques sont complétées. Nous pouvons recommander vivement ce petit volume aux lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*.

D. MIRIMANOFF (Genève).

L. BIEBERBACH. — **Lehrbuch der Funktionentheorie.** Band II: *Moderne Funktionentheorie*. — 1 vol. in-8°, VII-366 pages; relié M. 20; Verlag B.G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1927.

Après une très intéressante « Theorie der Differentialgleichungen » dont la première édition a été analysée ici-même, M. Bieberbach nous offre aujourd'hui le second volume, impatientement attendu, de son « Lehrbuch der Funktionentheorie », consacré à la théorie moderne des fonctions d'une variable complexe. Nous avons déjà dit le vif plaisir que nous avons eu à lire le premier volume de cet ouvrage, paru il y a six ans environ. Le second nous apporte une synthèse originale des recherches modernes sur la théorie des fonctions. C'est, si je ne me trompe, pour la première fois que paraît un exposé aussi complet des théories nouvelles, dont la plupart ont vu le

jour au cours de ces trente dernières années. Il est vrai que l'article très documenté de M. Bieberbach publié dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition allemande) en 1921 résumait déjà admirablement les résultats acquis avant 1921, mais il ne faisait que les indiquer; et quant à l'excellent petit livre de M. Landau « *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* », qui ne traite du reste qu'une partie des problèmes abordés dans ce domaine, il a été publié en 1916, et depuis cette époque les progrès de la théorie des fonctions ont été si rapides, qu'on peut presque se féliciter du retard apporté à la publication du second volume du « *Lehrbuch* ». Dans l'intervalle, des travaux importants ont permis d'approfondir et de compléter les résultats acquis et il semble bien que certaines théories nouvelles ont pris une forme définitive.

Le volume débute par un chapitre de 94 pages, consacré à la théorie de la représentation conforme; c'est dire l'ampleur avec laquelle est traité ici le grand problème posé par Riemann. Une démonstration élégante est donnée du principe de la représentation conforme dans le cas de domaines simplement connexes; le cas général est traité ensuite avec tous les développements que comporte ce problème délicat et difficile. Comme application, M. Bieberbach envisage la théorie du potentiel qu'il expose à partir de la représentation conforme.

Dans les deux chapitres suivants l'auteur étudie successivement la fonction modulaire et la grande famille des fonctions bornées, dont la théorie est due en grande partie aux mathématiciens d'aujourd'hui. Mais voici maintenant un chapitre particulièrement attrayant, bien qu'un peu difficile à lire, le chapitre 4, consacré au grand problème de l'uniformisation, abordé pour la première fois par Klein et Poincaré et repris avec le succès qu'on sait par Koebe. L'auteur donne une démonstration nouvelle, extrêmement remarquable, du théorème fondamental de cette théorie, dans laquelle il utilise la notion importante du « *funktionentheoretischer Bereich* », déjà introduite par lui dans le premier volume de son *Lehrbuch*.

Dans les deux chapitres suivants l'auteur étudie les théorèmes de Picard avec les extensions données par Landau, Schottky et Julia, et cette belle théorie des fonctions entières, à laquelle les recherches de ces dernières années ont donné une forme si simple et peut-être définitive.

Le prolongement analytique et surtout l'étude des relations entre les propriétés d'une fonction analytique et celles des coefficients d'une série entière qui la représente à l'intérieur de son cercle de convergence, font l'objet du chapitre 7, et le volume se termine par une étude fort intéressante de la fonction de Riemann, dont l'auteur établit très simplement les propriétés les plus remarquables, entre autres le fameux théorème de Hardy sur l'existence d'une infinité de zéros le long de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$.

On voit combien ce nouveau livre de M. Bieberbach est riche en renseignements. Il est vrai que, faute de place, certaines théories récentes, telles que la théorie de l'itération des fonctions rationnelles ou celle des fonctions méromorphes de Nevanlinna, n'ont pu être abordées dans ce volume. Mais le champ parcouru par l'auteur est déjà immense et il faut lui savoir gré d'avoir exposé d'une manière si remarquable, à la fois claire et précise, des théories si belles et pourtant si peu connues encore de la plupart de nos étudiants.

D. MIRIMANOFF (Genève).

K. KNOPP. — **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.** — 1 vol. in-8° de 520 p. avec 12 fig.; 2^{me} éd., 1924; J. Springer, Berlin.

Ce livre est surtout destiné à l'étudiant possédant les bases du calcul différentiel et intégral et de la théorie des fonctions à variable complexe, c'est-à-dire sachant déjà manier sous leur forme plus développée les notions mathématiques de nombre et de limite, mais n'ayant pas encore entrepris d'une façon détaillée et rigoureuse l'étude des principes fondamentaux qui régissent ces notions. M. Knopp leur consacre une discussion approfondie. Tout en plaçant la théorie de la convergence des séries sur une base solide, son exposé permet en même temps au lecteur d'adapter sa pensée étroitement à celle de l'auteur dans les questions les plus fondamentales et les plus constamment en usage. Pour ce qui concerne les matières supposées connues, l'auteur a soin (du moins lorsqu'il s'agit des généralités du domaine réel) de les délimiter d'une façon précise (l'esquisse correspondante relative aux nombres complexes est un peu moins précise à ce point de vue); là encore, l'étudiant pourra donc modifier convenablement son attitude vis-à-vis des faits connus et de la nomenclature adoptée.

La théorie des séries proprement dite est présentée en deux étapes distinctes. Dans la seconde l'auteur reprend les questions traitées dans la première partie par les moyens les plus simples, puis il considère celles qui ont dû être laissées de côté tout d'abord, en utilisant pour cela des méthodes de plus en plus développées. D'une façon générale, la première partie esquisse la théorie classique, la seconde est destinée à donner une image de son développement subséquent au cours du XIX^e siècle. En fait, le dernier chapitre (complètement remanié et augmenté depuis la première édition de 1921) conduit jusqu'aux frontières du savoir mathématique moderne dans la théorie des séries divergentes et des procédés de sommations.

Le livre contient, outre une foule d'exemples illustrant le texte même, plus de 200 exercices sur les matières traitées.

R.-C. YOUNG (Cambridge).

Paul MONTEL. — **Leçons sur les Familles Normales de Fonctions analytiques et leurs applications.** Recueillies et rédigées par J. BARBOTTE. (Collection de monographies sur la Théorie des fonctions.) — 1 vol. in-8° de iv-306 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1927.

Etendant au domaine complexe la notion de suite de fonctions également continues et bornées, M. Montel dans sa thèse avait entrepris l'étude des familles de fonctions holomorphes et bornées. Cet auteur avait montré l'utilité et les multiples applications de cette étude dans deux beaux mémoires des Annales de l'Ecole Normale. La méthode de M. Montel paraissait déjà pouvoir s'appliquer avec succès à différents problèmes de la théorie des fonctions analytiques, mais sa fécondité fut plus grande encore qu'on ne pouvait l'espérer. En effet, dans le plan de la variable complexe, le point à l'infini qu'une fonction ne saurait atteindre à l'intérieur d'un domaine où elle est holomorphe peut être ramené à distance finie par une substitution homographique, une inversion par exemple.

On en vint donc à considérer les suites de fonctions qui ne prennent aucune valeur dont l'affixe est dans un cercle de rayon fixe. Puis en faisant jouer à l'inverse de la fonction modulaire, holomorphe dans tout le plan

excepté en les trois points 0 , 1 et ∞ , le rôle de la substitution homographique de tout à l'heure, M. Montel s'aperçut qu'une suite de fonctions qui ne prennent jamais les valeurs 0 , 1 et ∞ est absolument équivalente à la suite précédente. Une famille de fonctions qui admettent trois mêmes valeurs exceptionnelles a , b , c est normale, c'est-à-dire qu'elle jouit de cette propriété caractéristique que de toute suite extraite de la famille on peut extraire une suite qui converge uniformément vers une fonction holomorphe ou vers la constante infinie.

Qu'on ne croie pas que les familles normales soient une fin en soi, c'est une majestueuse théorie extrêmement féconde en applications. L'étude d'une seule fonction, par exemple, d'une fonction entière peut être entreprise avec succès de ce point de vue, car il suffit de faire la représentation sur un même domaine fondamental d'une suite de domaines épuisant le plan, pour que l'étude de la fonction entière dans tout le plan revienne à l'étude d'une suite de fonctions définies sur le domaine fondamental. Suivant la nature de la question qu'on se pose, notamment lorsqu'il s'agit de savoir si une fonction peut admettre une, deux, ou trois valeurs exceptionnelles, cette méthode est très puissante. M. Julia en a tiré un ample profit pour compléter et étendre le théorème de Picard ; et l'intervention de la fonction modulaire qui paraissait être un artifice génial dans la démonstration de M. Picard apparaît aujourd'hui comme intimement liée à toute question concernant les valeurs exceptionnelles. Il est vrai que la fonction modulaire pourrait être remplacée par une fonction jouissant d'une propriété analogue. Le théorème de Picard apparaît en fin de compte non comme une proposition isolée, mais comme une des plus belles applications de la théorie des familles normales. Cette théorie permet aussi de maîtriser les importantes questions de la représentation conforme. Qu'on songe à ce théorème de M. Carathéodory : Tout domaine plan est représentable sur un cercle.

Par l'introduction de la notion de famille normale en un point, M. Julia a pu traiter dans son ensemble le problème de l'itération des fonctions rationnelles et l'on ne voit pas comment on y serait arrivé autrement.

Eclairées à la lumière des familles normales, les fonctions méromorphes apparaissent comme régulières, la singularité polaire exprime simplement que la valeur infinie n'est plus exceptée, et si trois autres valeurs le sont, une famille de fonctions méromorphes est normale comme une famille de fonctions holomorphes.

Le livre se termine par un chapitre sur les familles normales de fonctions de plusieurs variables et un chapitre tout à fait inédit sur les familles dites complexes.

Cette puissante synthèse permet de rapprocher entre eux des théorèmes fort élégants de la théorie des fonctions et d'en obtenir de nouveaux, je pense en ce moment au théorème de Schottky, de Landau, d'Ostrowsky, de Blaschke, de Jentzsch.

J'ai beaucoup admiré dans ce livre l'usage habile des textes en italiques qui expriment toujours l'essentiel d'un paragraphe.

En résumé, il n'est pas exagéré de dire que la notion de famille normale est une des plus belles acquisitions mathématiques de notre siècle. On la doit à M. Montel, et l'on doit à sa collaboration avec M. Barbotte la clarté et l'ordre parfait de ce beau livre.

Rolin WAVRE (Genève).

SRINIVASA RAMANUJAN. — **Collected Papers.** Edited by G. H. HARDY, P. V. Seshu AIYAR and B. M. WILSON. — 1 vol. grand in-8° de 355 p. ; 30 sh. ; Cambridge University Press, 1927.

Ce beau volume contient les mémoires du mathématicien hindou S. Ramanujan, enlevé prématurément à la science en 1920, à l'âge de 33 ans. Issu d'une famille brahmane du Tanjore District de la province de Madras, Ramanujan se fit remarquer de bonne heure par son aptitude aux recherches mathématiques. L'un de ses professeurs, M. Aiyar, de l'Université de Madras, le mit en relation avec M. Hardy, professeur à l'Université de Cambridge. C'est grâce aux démarches de ces deux savants qu'il put obtenir une bourse qui lui permit de faire un séjour d'études en Angleterre. Malheureusement, d'une santé très délicate, il fut atteint par la tuberculose et mourut à Chetput, près de Madras, le 26 avril 1920.

Les travaux de Ramanujan appartiennent pour la plupart à la théorie analytique des nombres, à la théorie des fonctions elliptiques et modulaires et aux fractions continues. Au nombre de trente-sept, ils ont été publiés, les uns dans le *Journal of the Indian mathematical Society*, les autres dans des périodiques européens. Il y avait donc intérêt, étant donné l'importance de ces belles recherches, à les réunir en un volume accessible à tous ceux qui désirent se mettre au courant des progrès récents accomplis dans ce domaine des mathématiques.

Le 28 février 1918 Ramanujan fut élu membre de la Société Royale de Londres. C'est dire que ses travaux ne tardèrent pas à le placer au premier rang des mathématiciens de l'Empire britannique et que sa mort prématurée est une grande perte pour la science. H. F.

L. WOLFKE. — **Wyklady Geometrji Wykreslnej.** Tom I : *Zasady Teorji Perspektywy.* — 1 vol. in-8° de 166 p. avec 148 fig. et 13 planches, Varsovie.

Ces leçons de géométrie descriptive présentent à la fois un intérêt scientifique et didactique. Elles sont l'œuvre d'un géomètre qui a examiné d'une manière approfondie les principes tels qu'ils ont été développés au cours du siècle dernier par les disciples de Monge, puis par Fiedler et son école. Dans son cours à l'Ecole polytechnique de Zurich et dans son traité *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* (3^e édition, 1883-1888), Fiedler a introduit pour la première fois la fusion de la géométrie descriptive et de la géométrie projective. C'est à ce point de vue que se place aussi M. Wolfke dans son cours à l'Ecole polytechnique de Varsovie.

Ce premier volume comprend l'étude de la perspective et de ses applications. Il débute par une étude très approfondie de la projection centrale. De nombreuses figures ainsi que des reproductions de photographies de modèles illustrent ce premier volume. H. F.

F. KLEIN. — **Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik** im 19. Jahrhundert. Band II. Die Grundbegriffe der Invariantentheorie und ihr Eindringen in die mathematische Physik. Für den Druck bearbeitet von R. COURANT et St. COHN-VOSSEN. — 1 vol. in-8° de 208 p. ; br. RM. 12, rel. RM. 13,50 ; Julius Springer, Berlin.

Nous avons déjà signalé le premier volume de cet ouvrage dans lequel ont

été réunies les leçons de F. Klein sur le développement des mathématiques au 19^{me} siècle.

Dans ce second et dernier volume le lecteur pourra suivre les étapes successives de la théorie des invariants linéaires et de l'analyse vectorielle, ainsi que leur influence sur les théories modernes de la mécanique et de la physique théorique.

L'ensemble de ces conférences fournit une contribution très importante à l'histoire des mathématiques au cours des cinquante dernières années. Il faut savoir gré à MM. Courant, Neugebauer et Cohn-Vossen de les avoir rédigées d'après les notes du savant professeur de Goettingue.

H. F.

F. KLEIN. — **Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.** Dritte Auflage. Dritter Band: Präzisions- u. Approximationsmathematik. Ausgearbeitet von C. H. MÜLLER. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. SEYFARTH. Mit 156 Abbildungen. — 1 vol. in-8° de 238 p. ; br. RM. 13,50, rel. RM. 15 ; Julius Springer, Berlin.

Ce volume porte en sous-titre « Mathématiques de précision et mathématiques d'approximation ». On sait que dans ses conférences comme dans ses écrits, F. Klein s'est toujours efforcé à maintenir le contact entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. En 1901, il consacra précisément l'un de ses cours aux applications géométriques du calcul différentiel et intégral envisagées à ce point de vue. Rédigés par C. H. Müller, ses leçons ont été d'abord publiées sous la forme d'un cours autographié intitulé « Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie (Eine Revision der Prinzipien) ». La première édition, parue en 1902, a été suivie d'une seconde édition en 1907.

Selon le désir exprimé par l'auteur quelques mois avant sa mort, ces leçons viennent d'être réunies à son ouvrage « Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus » dont elles forment maintenant le tome III. Le texte a été revu et complété par M. Seyfarth à la suite des entretiens qu'il a encore eus avec son éminent maître.

Le volume est divisé en trois parties. La première traite des fonctions à variables réelles et de leur représentation dans le plan. C'est une revision des principes et de leur application à l'étude de la valeur approchée d'une fonction et des formules d'interpolation.

La seconde partie débute par des considérations théoriques sur les courbes planes, puis l'auteur passe aux méthodes de la géométrie approximative que l'on utilise en géodésie et en géométrie constructive.

Dans la dernière partie il montre, à l'aide d'une série de modèles, comment on est parvenu à réaliser sous une forme concrète les courbes et les surfaces idéales que l'on rencontre dans les applications théoriques de l'analyse à la géométrie.

H. F.

W. LIETZMANN. — **Aufbau u. Grundlage der Mathematik.** (Lietzmann, Mathematisches-Unterrichtswerk, Ergänzungsheft 3.) — 1 vol. in-8° de 89 pages avec 34 figures ; RM. 2,20 ; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin.

On est généralement d'accord aujourd'hui pour reconnaître que c'est à la fin et non au début de l'enseignement secondaire que le maître doit

examiner avec ses élèves quel est l'objet des mathématiques et de leurs différentes branches, quels sont les concepts fondamentaux et quelles sont les principales méthodes de démonstration.

C'est en se plaçant à ce point de vue que M. Lietzmann a rédigé ce précis destiné aux élèves, mais dont les divers chapitres devront être développés et commentés par le maître. Après quelques considérations sur le rôle de la logique dans les sciences mathématiques, il initie le lecteur successivement aux fondements de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre et des éléments d'analyse. Son exposé sera lu avec profit par tous les maîtres des établissements secondaires.

H. F.

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei herausgegeben von E. WASSERLOOS und G. WOLFF. — Volumes cartonnés, petit in-8° ; Otto Salle, Berlin, 1927.

F. KLIEM u. G. WOLFF. — Archimedes, 142 p., 64 figures et 2 tables, RM. 3.

J. PLASSMANN. — Fixsternbeobachtungen mit einfachen Hilfsmitteln, 120 p., 11 figures, RM. 3,40.

H. WIELEITNER. — Mathematische Quellenbücher: I. Rechnen und Algebra, 75 p., 3 figures, RM. 2. — II. Geometrie und Trigonometrie, 68 p., 22 figures, RM. 2.

A. WENZEL. — Galilei, 72 p., 1 portrait et 18 figures, RM. 2.

Br. TZSCHIRNER. — Wetterkarte und Wettervorhersage, 62 p., 21 figures, RM. 1,80.

H. SCHWERDT. — Einführung in die praktische Nomographie, 122 pages, 62 figures RM. 3.

Ed. HOPPE. — Otto von Guericke, 65 p., 10 figures, RM. 1,80.

K. FLADT. — Euklid, 72 pages, 10 figures, RM. 2.

R. MAHLER. — Atombau und periodisches System der Elemente, 123 p., 18 figures et 11 tabelles, RM. 3,20.

R. FETSCHER. — Abriss der Erbiologie und Eugenik, 155 p., 59 figures, RM. 4.

H. WEINREICH. — Die Philosophie als Führer in der Schule und im Leben, 154 p., RM. 3,80.

Fr. KLIEM. — Apollonius, 75 p., 39 figures, RM. 2,40.

H. VOIGTS. — Luftelektrizität, 78 p., 34 figures, RM. 2,40.

J. GELFERT. — Der Kreisel und seine Anwendungen, 96 pages, 62 figures, RM. 2,80.

O. HAMMERS. — Geschlechtliche Fortpflanzung der Tiere, 100 p., 39 figures, RM. 3.

Cette nouvelle collection de monographies s'adresse principalement aux élèves de l'enseignement secondaire supérieur, mais elle ne manquera pas d'intéresser aussi tous ceux qui, sans posséder une culture scientifique particulière, désirent suivre les progrès de la science. Ce sont des ouvrages d'initiation et de bonne vulgarisation scientifique.

Quelques-uns des volumes ont un caractère nettement historique. Les auteurs montrent quel a été le développement des concepts et des principes fondamentaux. Ils accompagnent leur texte d'intéressants extraits d'écrits originaux. Tel est le cas pour les monographies consacrées à Euclide,

Archimède, Apollonius, Galilée, O. de Guericke, ainsi que pour les volumes dans lesquels M. Wieleitner présente des pages choisies d'auteurs classiques dans les domaines de l'arithmétique, de la géométrie et de la trigonométrie.

Signalons pour l'astronomie et la météorologie, le volume sur l'observation des étoiles fixes à l'aide de moyens élémentaires, par Plassmann; les cartes météorologiques et la prévision du temps, par Tzschirner.

Dans le domaine de la physique, la structure de l'atome, par Mahler; l'électricité atmosphérique, par Voigts. Pour les mathématiques appliquées, le gyroscope et ses applications, par Gelfert; l'introduction à la nomographie pratique, par Schwerdt.

Les sciences naturelles comprennent deux volumes consacrés, l'un à la biologie de l'hérédité et à l'eugénique, par Fetscher, l'autre à la reproduction dans le règne animal, par Hammers.

Enfin, la série contient une introduction à la philosophie, dégagée de tout dogmatisme et de tout développement inutile dans une première étude. Conçus sous cette forme, d'après l'école de Fries-Nelson, les entretiens philosophiques de M. Weinreich constituent un intéressant couronnement des études secondaires.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

R. BALDUS. — **Nichteuklidische Geometrie.** Hyperbolische Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen Bd. 970.) — 1 vol. in-16° de 152 p. avec 71 fig.; relié, RM. 1,50; Walter de Gruyter et Co.

Ce nouveau volume de la petite collection Göschen contient une introduction élémentaire à l'étude de la géométrie non euclidienne et plus particulièrement à la géométrie hyperbolique du plan.

I. Introduction historique. — II. Axiomatique de la géométrie absolue. — III. Géométrie euclidienne. Le postulat des parallèles. — IV et V. La géométrie hyperbolique dans le plan. — VI. Remarques finales.

W.-W. Rouse BALL. — **Histoire des mathématiques.** Edition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. FREUND. Tome premier. — 1 vol. in-8° de 326 p. avec de nombreux portraits; 40 fr.; Librairie scientifique J. Hermann, Paris, 1927.

L'auteur présente d'une manière succincte, à la portée de tous, le développement historique des sciences mathématiques, avec un aperçu de la vie et des découvertes des savants qui ont le plus contribué aux progrès de la