CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT QUELCONQUE D'UNE SECTION CONIQUE

PAR

N. GENNIMATAS (Athènes).

1. — En partant des équations paramétriques

$$x = a \cos v \,, \qquad y = b \sin v \tag{1}$$

de l'ellipse $(2a, 2b)$, rapportée à ses axes, on obtient pour le rayon de courbure à un point P (v) l'expression

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}{ab} \,,$$

ou, en tenant compte des équations (1):

$$R = \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} \,. \tag{2}$$

Désignons par $F_1 (-c, o)$, $F_2 (c, o)$ les foyers et par $P(x, y)$ un point quelconque de l'ellipse, on a

$$(F_1 P)^2 = r_1^2 = (x + c)^2 + y^2 \,, \quad (F_2 P)^2 = r_2^2 = (x - c)^2 + y^2 \,,$$

en même temps que

$$(r_1 + r_2)^2 = 4a^2 \,;$$

d'où

$$r_1 r_2 = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2$$

ou (comme $c^2 = a^2 - b^2$),

$$r_1 r_2 = a^2 + b^2 - x^2 - y^2 \,. \tag{3}$$

Ainsi, d'après (3), la formule (2) devient

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \qquad (4)$$

2. — En se servant des fonctions hyperboliques on a pour l'hyperbole ($2a$, $2b$), rapportée à ses axes, les équations

$$x = ach\varphi , \quad y = bsh\varphi , \qquad (5)$$

et pour le rayon de courbure au point P (x, y) de la courbe

$$R = \frac{(a^2 sh^2\varphi + b^2 ch^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab} , \qquad (6)$$

ou, en tenant compte des équations (5):

$$R = \frac{(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \qquad (7)$$

Mais si, comme dans le cas de l'ellipse, r_1 et r_2 représentent les distances E_1 P et E_2 P du point P de l'hyperbole aux foyers, on trouve aisément

$$r_1 r_2 = x^2 + y^2 - a^2 + b^2 . \qquad (8)$$

Ainsi, d'après (8), la formule (7) devient

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} , \qquad (9)$$

formule semblable à la formule (4).

3. — Pour le rayon de courbure au point P (x, y) de la parabole

$$y^2 = 2px \qquad (10)$$

on a la formule

$$R = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{p}{2} + x\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} ,$$

ou, comme $\frac{p}{2} + x = r$, r représentant la distance du point de la parabole au foyer:

$$R = \frac{(2r)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}},$$

ou encore

$$R = \frac{(2r)^2}{\sqrt{2pr}} . \tag{11}$$

4. — Comme il est très facile de tracer la normale à un point quelconque d'une section conique, la construction du centre de courbure correspondant se réduirait à la construction d'un segment de longueur égale au rayon de courbure. Aussi bien pour l'ellipse que pour l'hyperbole on pourrait, en se servant de la formule

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} ,$$

arriver aux constructions suivantes:

1. Soient r_1, r_2 les distances d'un point de l'ellipse ($2a$, $2b$) aux foyers. Après avoir tracé le cercle de diamètre $AA' = 2a$ (fig. 1), on porte sur la droite AA' les segments $AD = 1$ et $AP_1 = r_1$, ($A'P_1 = r_2$), et sur la tangente en A les segments $AB = ab$ et $AP_2 = A'P_1 = r_2$; on mène du point P_1 la perpendiculaire d au diamètre AA': alors on aura $P_1S = \sqrt{r_1 r_2}$. On mène P_1C parallèle à DP_2 et on obtient ainsi $AC = r_1 r_2$; joignons B à S et C à E, point où la droite BS coupe le diamètre AA': le point T où la droite passant par C et E ren-

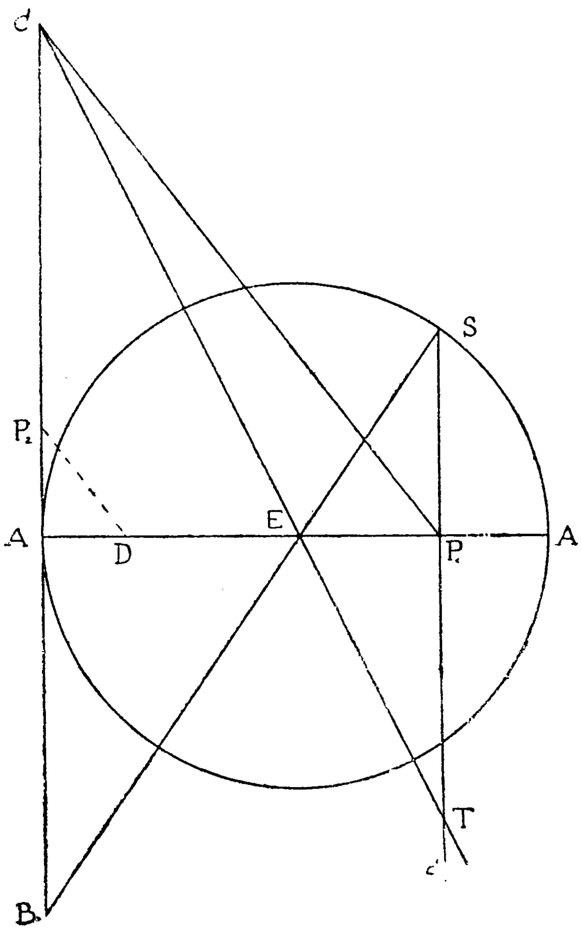

Fig. 1

contre la droite d nous donne le segment P_1T égal au rayon de courbure R correspondant au point considéré de l'ellipse. En effet, des deux paires de triangles semblables EP_1T, ACE et EP_1S, ABE on obtient

$$\frac{P_1T}{AC} = \frac{EP_1}{AE} = \frac{P_1S}{AB},$$

d'où

$$P_1T = AC \cdot \frac{P_1S}{AB} = r_1 r_2 \cdot \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{ab} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = R, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2. Soient r_1, r_2 les distances d'un point de l'hyperbole ($2a$, $2b$) aux foyers. Après avoir tracé le cercle de diamètre $AA' = 2a$

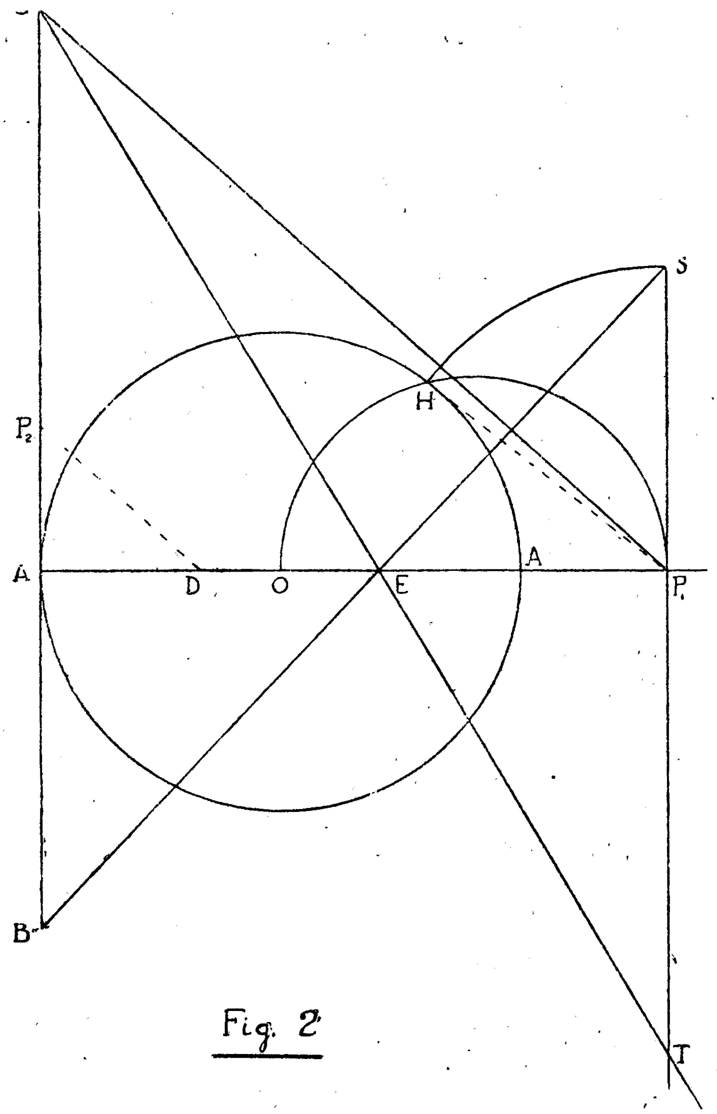

Fig. 2

(fig. 2), on porte sur la droite AA' les segments $AD = 1$, $AP_1 = r_1$, $(A'P_1 = r_2)$, et sur la tangente en A les segments $AB = ab$,

$AP_2 = r_2$. O étant le centre du cercle déjà tracé, soit H un des deux points communs à ce cercle et au cercle de diamètre OP_1; on a alors $P_1 H = \sqrt{r_1 r_2}$. On porte ce segment sur la perpendiculaire d à la droite AA′, passant par P_1, de sorte qu'on ait $P_1 S = P_1 H$; on mène $P_1 C$ parallèle à DP_2 et on obtient ainsi $AC = r_1 r_2$. Joignons B à S et C à E, point où la droite BS coupe la droite AA′: le point T où la droite passant par C et E rencontre la droite d est tel qu'on a $P_1 T = R$, ce qu'on reconnaît de la même manière comme au cas précédent.

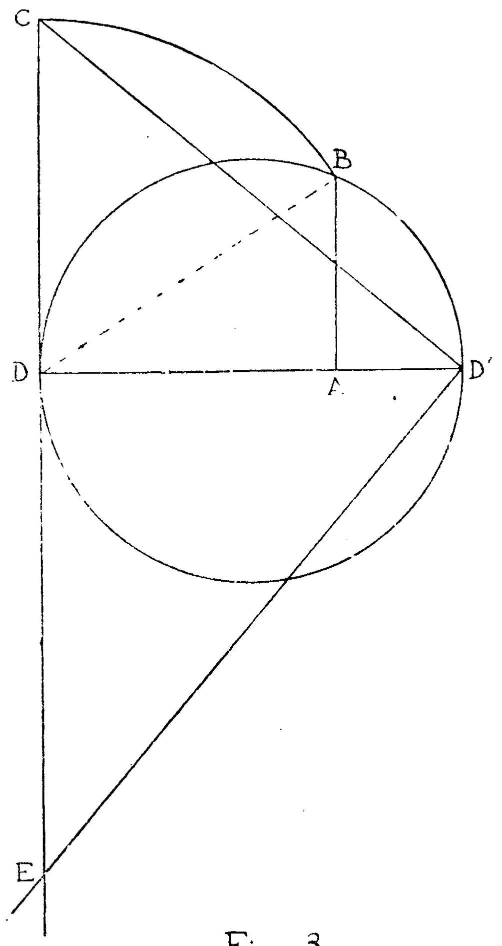

Fig. 3

3. Dans le cas de la parabole $y^2 = 2px$ on construit le segment dont la longueur égale le rayon de courbure R au point de la courbe à la distance r au foyer, en se servant de la formule (11), de la manière suivante : Après avoir tracé le cercle de diamètre $DD' = 2r$ sur lequel on porte le segment $DA = p$ (fig. 3), on aura la corde DB égale à $\sqrt{2pr}$. Si l'on porte DB sur la tangente en D de sorte qu'on ait $DC = DB$, en joignant C à D′ et menant D′ E perpendiculaire à CD′, on obtient sur la tangente le point E tel qu'on ait $DE = R$, comme on le voit immédiatement.