

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS D'UN PINCEAU DE NORMALES
Autor: Dufour, Marcel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21258>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.01.2026

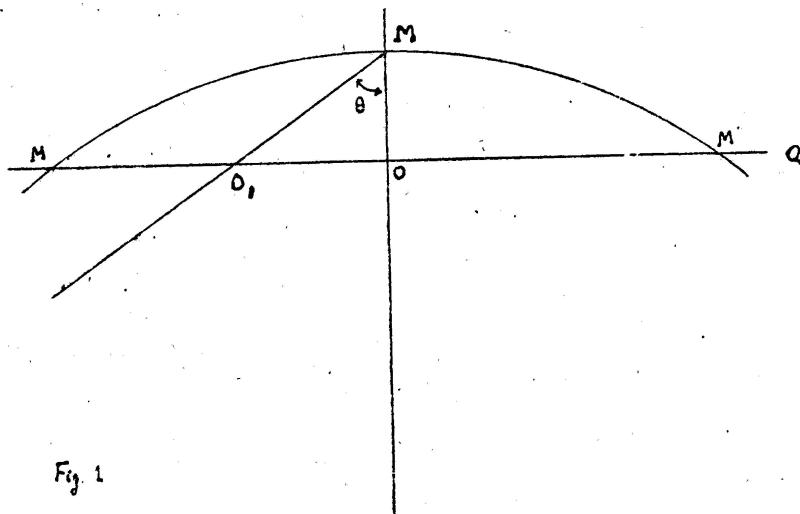
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROPRIÉTÉS D'UN PINCEAU DE NORMALES

PAR

M. Marcel DUFOUR (Nancy).

Sections principales. — Si nous coupons une surface S au voisinage immédiat d'un point M par un plan Q parallèle au plan tangent en M , la section C est, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, une conique, en général une ellipse ou une hyperbole, dont le centre O est sur la normale en M . Menons par cette normale un plan P coupant la conique en deux points M' et M'' (fig. 1). Le cercle passant par $M'M'M''$ est le cercle osculateur de l'intersection de S et de P : son rayon de courbure est $R = \frac{\overline{M'O}^2}{2MO}$. MO est constant, $M'O$ varie avec l'azimut du plan P et devient maximum ou minimum quand le plan P passe

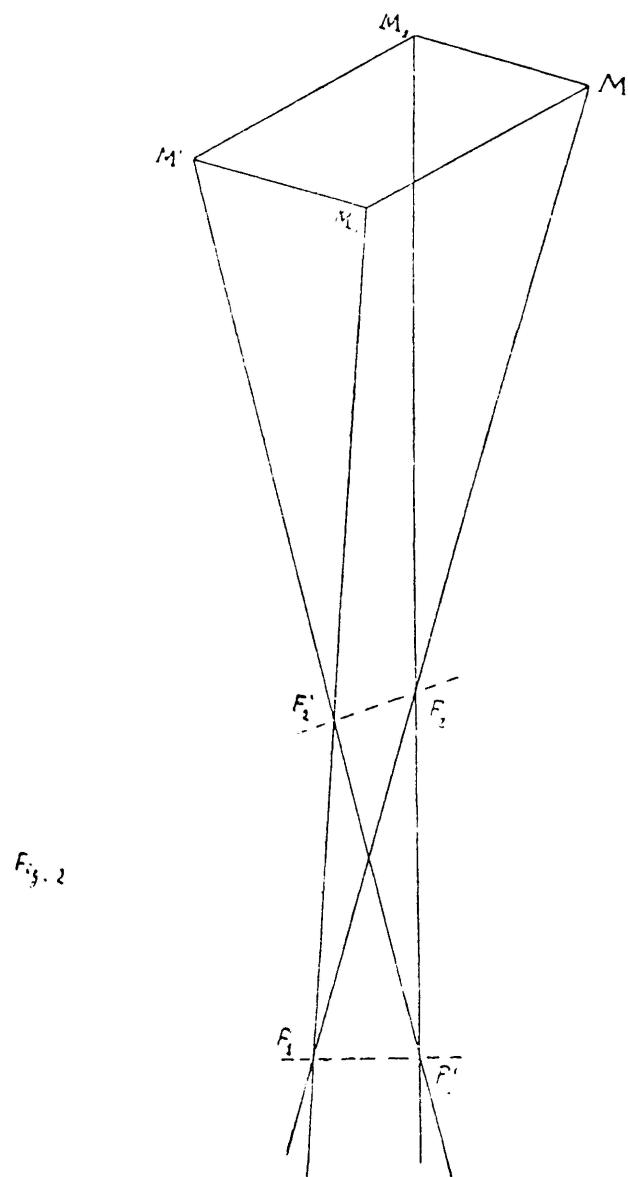


par un des axes de C . Pour ces deux positions privilégiées P_1 et P_2 de P , R passe par un maximum ou un minimum. La conique C est l'indicatrice de Dupin, et les deux plans P_1 et P_2 sont les

sections principales en M. Ils sont tangents aux *lignes de courbure* de la surface. Par chaque point M passent deux lignes de courbure perpendiculaires l'une à l'autre. Il y a pour la surface deux systèmes de sections principales et deux systèmes de lignes de courbure, que nous appellerons premier et second système.

Considérons dans le plan P_1 sur la ligne de courbure deux points infiniment voisins M et M_1 : la surface M étant au voisinage de M symétrique par rapport au plan P_1 , la normale en M_1 est par raison de symétrie dans le plan P_1 : les normales en deux points infiniment voisins sur une ligne de courbure sont dans un même plan; les normales à la surface le long d'une ligne de courbure forment une surface développable. En deux points infiniment voisins, les sections principales d'un même système font entre elles un angle infiniment petit, et les tangentes aux lignes de courbure d'un même système sont parallèles à un infiniment petit près.

Lignes focales. — Traçons en un point M de la surface les deux lignes de courbure (fig. 2), et prenons dans le voisinage immédiat de M un point M_1 sur la ligne du premier système et un point M_2 sur la ligne du second système. La ligne de courbure du second système menée par M_1 et la ligne de courbure du premier système menée par M_2 se coupent en un point M' : d'après ce qui vient d'être dit, le quadrilatère $MM_1M'M_2$ peut être considéré comme un rectangle. Soient F_1 le point de ren-



contre des normales à S en M et M_1 , F_2 le point de rencontre des normales en M et M_2 : nous appelons F_1 et F_2 premier et second *point focal* sur la normale en M . Puisque M' et M_2 sont sur une même ligne de courbure, les normales en M' et M_2 se rencontrent en un point F'_2 infiniment voisin de F_2 , et, si M' se déplace au voisinage de M , la normale en M' s'appuie constamment sur l'élément rectiligne $F_1 F'_1$ appelé première *ligne focale*: la première ligne focale est située dans le plan de la seconde section principale. De même, les normales en M' et M_1 se rencontrent en un point F'_1 infiniment voisin de F_1 , et quand M' se déplace au voisinage de M , F'_1 décrit la seconde ligne focale située dans le plan de la première section principale.

La normale en M' s'appuie donc sur les deux lignes focales en F'_1 et F'_2 . Nous désignerons par R_1 la longueur MF_1 , rayon de courbure dans la première section principale et par R_2 la longueur MF_2 , rayon de courbure dans la seconde section principale. A des infiniment petits près, les longueurs $M'F'_1$ et $M'F'_2$ sont respectivement égales à R_1 et R_2 .

Relation d'Euler. — Cherchons la valeur du rayon de courbure R en M de l'intersection de la surface S par le plan P normal à S en M et passant par le point M' . Désignant par ds la distance MM' et par ψ l'angle que font entre elles les normales en M et M' à l'intersection de S par P , nous avons

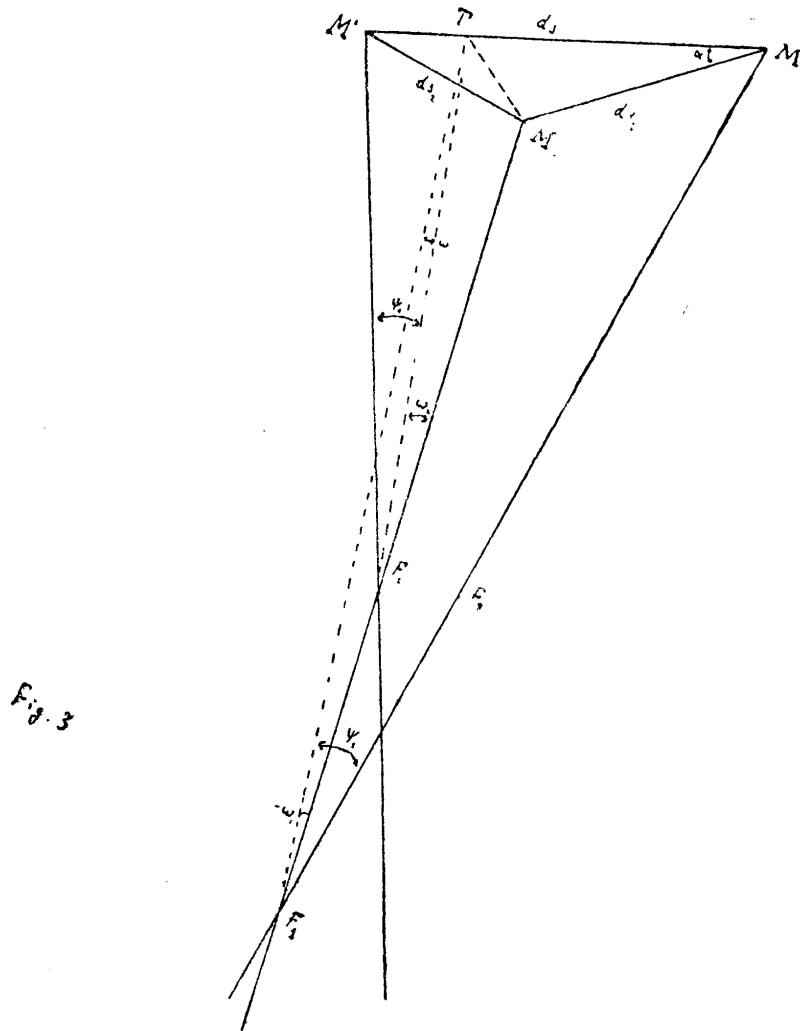
$$ds = \psi R \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = \frac{\psi}{ds}.$$

La normale en M' à cette intersection est la projection sur P de la normale en M' à la surface S , puisque la projection d'un angle droit sur un plan passant par un de ses côtés est un angle droit. L'angle des normales à la surface en deux points infiniment voisins d'une ligne de courbure étant facilement connu, pour calculer ψ nous passerons successivement de M à M_1 , projection de M' sur la première ligne de courbure, puis de M_1 à M' , et, pour chacun de ces passages, nous projetterons sur le plan P l'angle dont tourne la normale à S (fig. 3).

Quand nous passons de M à M_1 , la normale tourne autour du

premier point focal F_1 dans le plan tangent à la première ligne de courbure en M d'un angle

$$\widehat{MF_1M_1} = \frac{ds_1}{R_1} = \frac{ds \cos \alpha}{R_1},$$



α étant l'angle de l'élément ds avec la première ligne de courbure. Soit TF_1 la projection de M_1F_1 sur le plan P . La projection sur ce plan de l'angle $\widehat{MF_1M_1}$ est $\widehat{MF_1T}$ qui a pour valeur

$$\psi_1 = \frac{MT}{R_1} = \frac{ds_1 \cos \alpha}{R_1} = \frac{ds \cdot \cos^2 \alpha}{R_1}.$$

Quand nous passons de M_1 à M' , la normale à S tourne autour du point F_2' de la seconde ligne focale dans le plan tangent à la seconde ligne de courbure en M' d'un angle

$$\widehat{M_1F_2'M'} = \frac{ds_2}{R_2} = \frac{ds \cdot \sin \alpha}{R_2}.$$

Le plan P et le plan déterminé par les trois points M, F'_2, M' étant infiniment voisins, la projection de cet angle $M_1 \widehat{F'_2} M'$ sur P est, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, égale à sa projection sur le plan $MF'_2 M'$. Cette dernière est

$$\psi_2 = \widehat{TF'_2} M = \frac{\widehat{TM'}}{R_2} = \frac{ds_2 \cdot \sin \alpha}{R_2} = \frac{ds \cdot \sin^2 \alpha}{R_2}.$$

Nous avons finalement

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

et

$$\frac{1}{R} = \frac{\psi}{ds} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}.$$

Torsion géodésique. — L'angle de torsion géodésique ω est l'angle que fait la normale en M' à la surface S avec le plan P mené par la normale en M et par l'élément infiniment petit MM' . Cet angle ω est situé dans le plan mené perpendiculairement à P par la normale en M' , plan infiniment voisin du plan Π mené perpendiculairement à P par la normale en M_1 . L'angle de torsion géodésique est donc, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, égal à sa projection sur le plan Π . Pour le calculer, nous passerons successivement de M à M_1 , puis de M_1 à M' , et, pour chacun de ces passages, nous projetterons sur le plan Π l'angle dont tourne la normale.

Quand nous passons de M à M_1 , la normale pivote autour de F_1 d'un angle $MF_1 M_1 = \frac{ds_1}{R_1}$. Le plan Π est déterminé par les trois points $TM_1 F_1$. La projection sur Π de l'angle dont a tourné la normale est l'angle

$$\omega_1 = M_1 \widehat{F_1} T = \frac{M_1 T}{R_1} = \frac{ds_1 \cdot \sin \alpha}{R_1},$$

et nous lui affectons le signe — parce que $\overline{M_1 T}$ est la projection de $\overline{M_1 M}$, c'est-à-dire de $(-ds_1)$. Quand nous passons de M_1 à M' , la normale tourne autour de F'_2 d'un angle $M_1 \widehat{F'_2} M' = \frac{ds_2}{R_2}$. La projection de cet angle sur Π est

$$\omega_2 = M_1 \widehat{F'_2} T = \frac{M_1 T}{R_2} = \frac{ds_2 \cdot \cos \alpha}{R_2}$$

et nous lui affectons le signe + parce que $M_1 T$ est la projection de $M_1 M'$, c'est-à-dire de $(+ ds_2)$. Les deux angles ω_1 et ω_2 sont dirigés en sens contraire.

Nous avons finalement

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{ds_2 \cdot \cos \alpha}{R_2} - \frac{ds_1 \cdot \sin \alpha}{R_1}$$

ou

$$\omega = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot ds = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\alpha \cdot ds .$$

La torsion géodésique est le rapport

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\alpha .$$

Théorème de Meusnier. — Etant donnée une tangente à la surface S en un point M , la relation d'Euler nous fait connaître le rayon de courbure R de la section normale faite dans la surface par le plan P contenant la tangente et normal à S en M . Cherchons la valeur R_θ du rayon de courbure en M d'une section de S par un plan P_θ contenant la tangente donnée et faisant avec P un angle θ (fig. 1). Coupons la surface par le plan Q infiniment voisin du plan tangent en M et parallèle à lui. Soient λ et λ_θ les longueurs des cordes limitées par S sur les intersections respectives de Q avec P et P_θ . Si nous prenons le plan de figure perpendiculaire à la tangente donnée, ces cordes se projettent en O et O_θ . Nous avons

$$R = \frac{\lambda^2}{2MO} \quad \text{et} \quad R_\theta = \frac{\lambda_\theta^2}{2MO_\theta}$$

d'où

$$\frac{R_\theta}{R} = \frac{MO}{MO_\theta} \left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda} \right)^2 = \cos \theta \left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda} \right)^2 .$$

La distance des deux cordes λ et λ_θ , toutes deux parallèles à la tangente donnée, est $OO_\theta = MO \operatorname{tg} \theta$. Si nous regardons λ comme un infiniment petit du premier ordre, MO et par suite OO_θ sont du second ordre, et la différence entre λ et λ_θ est infiniment petite par rapport à λ . Nous avons au premier ordre près $\frac{\lambda_\theta}{\lambda} = 1$.

Donc $R_\theta = R \cos \theta$.