

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1926)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Rubrik:** SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE Conférences et communications

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

Réunion de Fribourg, 30 août 1926.

La Société Mathématique suisse a tenu sa 16<sup>me</sup> assemblée ordinaire annuelle à Fribourg, le 30 août 1926, sous la présidence de M. le professeur F. GONSETH (Berne), en même temps que la 107<sup>me</sup> assemblée annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles.

Le programme très fourni de la réunion comprenait 13 communications dont 12 ont été effectivement présentées à la séance. En voici les résumés:

1. — L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques du deuxième ordre.* — Soit  $\pi_2(a, b, c; x)$  le nombre des nombres premiers  $\leq x$  contenus dans la progression arithmétique générale du deuxième ordre

$$f(n) \equiv an^2 + bn + c \quad (1)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont trois nombres entiers, arbitrairement choisis mais fixes, tandis que  $n$  parcourt la suite illimitée des nombres naturels. Si l'on pouvait démontrer que

$$\pi_2(a, b, c; x) \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

on aurait résolu un problème fameux qui intéresse beaucoup de mathématiciens. L'auteur montre d'abord les trois conditions auxquelles  $a, b$  et  $c$  doivent satisfaire pour que (2) soit possible, puis il indique pour ce nombre  $\pi_2$  la formule asymptotique

$$\pi'_2(x) \equiv \delta \cdot \frac{C'}{\sqrt{a}} \cdot C \cdot \text{li} \sqrt{x}, \quad (3)$$

où  $\text{li } z$  représente le logarithme intégral de  $z$ . La formule (3), semblable à celle de MM. Hardy et Littlewood, entraînerait (2); mais comme elle n'est pas démontrée en toute rigueur, il y a intérêt à la vérifier

expérimentalement. C'est ce que l'auteur a fait pour les six cas suivants:

$$f_1(n) \equiv n^2 + 1 \quad ; \quad f_3(n) \equiv 101n^2 + 20n + 1 \quad ;$$

$$f_2(n) \equiv n^2 + n + 1 \quad ; \quad f_4(n) \equiv 122n^2 + 22n + 1 \quad ;$$

$$f_5(n) \equiv 10\,001n^2 + 200n + 1 \quad ;$$

$$f_6(n) \equiv 10\,610n^2 + 206n + 1 \quad .$$

La factorisation des nombres  $f_i(n)$  est poussée jusqu'à 225 000 000. Grâce à cette limite élevée, l'auteur a pu constater qu'une présomption de Gauss admise depuis plus d'un siècle ( $\pi(x) < li(x)$ ) était inexacte. Après avoir introduit deux nouvelles notions: *l'écart absolu* de la progression (1), savoir  $\pi_2(a, b, c; x) - \pi'(x)$ , et *l'écart relatif* de la progression (1), savoir

$$\frac{\pi_2(a, b, c; x) - \pi'(x)}{\pi'(x)} = \frac{\pi_2(a, b, c; x)}{\pi'(x)} - 1 \quad ,$$

l'auteur termine sa communication par six propositions relatives aux nombres premiers contenus dans les progressions arithmétiques du deuxième ordre et présente plusieurs tableaux se rapportant à ce sujet.

2. — L. KOLLROS (Zurich). — *Projection centrale et géométrie réglée*. — En projection centrale, la droite est déterminée par sa trace T sur le tableau  $\pi$  et par son point de fuite F. Une *surface réglée* est représentée par la courbe-trace  $t$  et la ligne de fuite  $f$ ; les génératrices établissent une correspondance ponctuelle entre ces deux courbes; si les tangentes aux points homologues de  $t$  et de  $f$  sont parallèles, la surface est *développable*.

Les droites d'une *congruence* déterminent une transformation ponctuelle  $T \rightarrow F$  de tous les points de  $\pi$ ; on voit facilement qu'à une affinité, une collinéation ou une inversion correspondent respectivement des congruences (1, 1), (3, 1) ou (2, 2)<sup>1</sup>.

Les droites d'un *complexe* donnent lieu à une correspondance point  $\rightarrow$  courbe:  $T \rightarrow f$ ;  $f$  est la ligne de fuite du cône formé par les droites du complexe issues de T. Pour le complexe *linéaire*,  $f$  est la *droite* de fuite du plan focal de T; si la droite à l'infini,  $i$ , de  $\pi$  appartient au complexe, elle passe par les foyers  $O'$  du plan à l'infini  $\Omega$  et  $O''$  de  $\pi$ . Les faisceaux de droites  $O''$  (dans  $\Omega$ ) et  $O'$  (dans  $\pi$ ) sont projectifs et le complexe linéaire est formé de toutes les droites qui coupent deux rayons correspondants de ces deux faisceaux. En projetant le

<sup>1</sup> MULLER-KRUPPA: Vorl. ü. darst. Geom. Bd. I: *Die lin. Abbildungen*.

faisceau  $O''(\Omega)$  sur  $\pi$ , on obtient un faisceau perspectif au faisceau  $O'(\pi)$ , car la droite  $i$  se correspond à elle-même; les rayons homologues se coupent donc sur une droite  $x$ . Ainsi, les droites d'un complexe linéaire sont représentées par des paires de points TF situés sur les rayons correspondants de deux faisceaux perspectifs. Mais, si l'on généralise convenablement la méthode de Monge (projections sur deux plans), on voit qu'un point quelconque de l'espace est aussi déterminé par une paire de points liée à deux faisceaux perspectifs; cette double interprétation d'une même paire de points établit une correspondance entre les points du second espace et les droites d'un complexe linéaire du premier. On peut alors montrer qu'aux points du premier espace correspondent, dans le second, les droites qui coupent une conique  $\omega$ , de telle sorte que, à des points en ligne droite, correspondent des génératrices du même système d'un hyperboloïde passant par  $\omega$ ; la conique  $\omega$  est (avec la ligne de terre  $x$ ) le lieu des points dont les deux projections coïncident. Si  $\omega$  était l'ombilicale, cette correspondance ne serait autre chose que la transformation de Lie (point  $\rightarrow$  droite isotrope; droite  $\rightarrow$  sphère), intéressante par ses applications à la théorie des surfaces et à celle des équations aux dérivées partielles.

3. — W. SAXER (Aarau). — *Sur la distribution des zéros et des pôles des fonctions rationnelles d'une suite convergente.* — Le travail paraîtra prochainement dans la *Mathematische Zeitschrift*, Berlin.

4. — E. MEISSNER (Zurich). — *Sur une équation différentielle singulière intervenant dans un problème de sismologie.* — On considère, dans un milieu élastique limité par un plan horizontal, des ondes élastiques dont l'oscillation s'effectue horizontalement et perpendiculairement à leur direction de propagation; telles en outre que leur intensité diminue en fonction de la profondeur de façon assez rapide pour que l'énergie de l'onde par unité de surface reste finie.

Les propriétés élastiques du milieu, considéré étant supposées fonctions de la profondeur  $z$ , les équations classiques de la théorie de l'élasticité conduisent dans ce cas à une équation différentielle de la forme:

$$\mathcal{L}(u) + \lambda u = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) \cdot u .$$

les solutions acceptables devant en outre satisfaire aux conditions:

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0$$

et

$$\int_0^\infty u^2 dx = \text{finie} .$$



Ce problème a été traité par M. le Prof. H. WEYL (*Math. Annalen* 68, 1909). L'équation précédente appartient au type qu'il y nomme « à point limité » (Grenzpunkttypus).

Pour les buts de la sismologie, il est essentiel d'en déterminer le spectre discontinu des valeurs propres du paramètre de la fréquence la longueur d'onde étant supposée constante. A chaque point de ce spectre correspond en effet une loi de dispersion de l'onde, les différentes courbes ainsi obtenues correspondent à une série de systèmes d'onde qui diffèrent les uns des autres par le nombre des plans nodaux. Le spectre du problème comprend en général un spectre ponctuel (discontinu) et un spectre de bandes, le cas pouvant d'ailleurs se présenter où l'un ou l'autre de ces spectres manque. Si c'est le cas pour le spectre ponctuel, les ondes dont nous parlons n'existent pas (c'est ce qui se présente par exemple dans un demi-espace homogène). Il y a par contre des cas où l'on peut affirmer d'avance l'existence d'un spectre discontinu. Les ondes correspondantes jouent le rôle principal dans le phénomène dit, en sismologie, des « undæ lungæ ».

Outre les deux cas connus jusqu'ici et traités le premier par Love, en 1911, et le second par le conférencier en 1920, celui-ci présente une série de cas nouveaux dont la connaissance serait très profitable pour l'investigation de l'écorce terrestre jusqu'à la profondeur de 100 km. environ.

5. — Chr. MOSER (Berne). — *Une conclusion qui découle de la loi de Makeham.* — Si l'on classe les nombres de vivants d'un ordre de survie d'après l'âge  $x$ , on a approximativement pour les adultes la loi connue de Makeham:

$$f(x) = ks^x g^{cx}, \quad (1)$$

où  $f(x)$  représente le nombre des personnes d'âge  $x$  et où  $k$ ,  $s$ ,  $g$  et  $c$  sont des constantes.

Si  $e$  désigne la base des logarithmes népériens et si l'on pose  $g^{cx} = e^z$ , on pourra dériver, sans difficulté, de la formule (1) une multitude de représentations pour  $e^z$ , à l'aide de développements appropriés, en partant de l'intégrale pour l'espérance de vie d'une personne d'âge  $x$ . Nous relevons le développement suivant dans lequel  $n$  peut être nul ou un nombre entier positif:

$$e^z = \frac{1}{P_{(n,z)}} \left( 1 + 2^n \frac{z}{1!} + 3^n \frac{z^2}{2!} + 4^n \frac{z^3}{3!} + \dots \right). \quad (2)$$

Dans cette expression,  $P_{(n,z)}$  désigne un polynôme à coefficients entiers en  $z$  de degré  $n$ . Pour une valeur entière de  $z$ ,  $P_{(n,z)}$  est en conséquence toujours un nombre entier. On a  $P_{(0,z)} = 1$ ,  $P_{(1,z)} = 1 + z$ .

$P_{(2,z)} = 1 + 3z + z^2$  de telle sorte que, par exemple, pour  $n = 0$ , on a sans autre la série connue pour  $e^z$ , et pour  $n = 2$ ,  $z = 1$  la série suivante :

$$e = \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{4}{1!} + \frac{9}{2!} + \frac{16}{3!} + \dots \right).$$

On peut multiplier les exemples à volonté.

Si l'on pose pour abrégé :

$${}_n C_\rho = \frac{(-1)^{\lambda+1} \rho^{\lambda+1}}{(1+\rho)(1+2\rho)\dots(1+(\lambda+1)\rho)} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, n),$$

si l'on forme la  $(n+1)^{\text{me}}$  dérivée par rapport à  $\rho$ , si ensuite on détermine sa valeur pour  $\rho = 0$  et que l'on introduise la notation suivante :

$${}_n C_0^{(n+1)} = \frac{d^{n+1}({}_n C_\rho)}{d\rho^{n+1}}, \quad (\rho = 0)$$

le polynôme  $P_{(n,z)}$  peut s'écrire

$$P_{(n,z)} = \frac{1}{{}_0 C_0 (n+1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} {}_\lambda C_0^{(n+1)} z^\lambda. \quad (3)$$

L'expression pour  $P_{(n,z)}$  pourrait se mettre encore sous une autre forme et peut être obtenu, en outre, directement par divisions successives de 2 séries (de la série entre parenthèses dans l'équation (2) par la série pour  $n = 0$ ).

Pour des valeurs négatives de l'exposant, la loi de formation du dénominateur  $P$  se modifie en ce sens qu'il ne peut plus être exprimé par un polynôme d'un nombre fini de termes, mais par une série infinie.

L'intérêt essentiel des considérations précédentes réside dans le fait que la fonction de Makeham, outre ses nombreuses autres jolies propriétés connues dans la science actuarielle, en possède encore d'autres qui sont susceptibles de montrer l'étroite dépendance qui lie, en vertu de l'équation (2), n'importe quel nombre  $e^z$  avec les puissances des nombres de la série des nombres naturels.

Si l'on se propose d'introduire uniquement des fractions irréductibles comme coefficients, on pourra choisir la représentation suivante :

$$e^z = \frac{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma+1} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{1}{\sigma+2} \cdot \frac{z^2}{2!} + \dots}{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma(\sigma+1)} z + \frac{1}{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)} z^2 - \dots}.$$

Il est possible de prescrire, à son gré, la plus grande des fractions irréductibles, à savoir  $\frac{1}{\sigma}$ .

6. — R. WAVRE (Genève). — *Sur une classe de fonctionnelles automorphes.* — Les fonctions elliptiques, les fuchsiennes et d'une manière générale les fonctions automorphes prennent la même valeur en un point du plan complexe et en tous ses itérés par de certaines substitutions.

Le problème que je me suis proposé consiste en ceci: construire des fonctions de lignes automorphes, guidé par l'analogie avec les fonctions automorphes de points.

En termes plus précis, il s'énoncerait comme suit: Etant donné un procédé itératif faisant passer d'une fonction  $f_0(x)$  à une fonction  $f_1(x)$ , de cette dernière à une fonction  $f_2(x)$  et ainsi de suite, on demande de construire une fonctionnelle  $\Phi[f(x)]$  qui prenne la même valeur sur la fonction  $f_0(x)$  et sur ses itérées  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ..., telle donc que l'on ait:

$$\Phi[f_0(x)] = \Phi[f_n(x)] \quad (1)$$

Voilà le problème. Nous l'avons résolu dans un cas relativement simple.

Envisageons, en effet, le procédé itératif suivant:

$$f_{n+1}(x) = \int_a^b N(x, y) f_n(y) dy$$

et supposons le noyau  $N(x, y)$  symétrique.

La théorie des équations intégrales nous apprend que la fonction  $f_n(x)$  peut s'écrire sous la forme

$$f_n(x) = \int_a^b N_n(x, y) f_0(y) dy$$

où  $N_n(x, y)$  représente le  $n^{\text{ième}}$  noyau itéré, développable en série de fonctions fondamentales orthogonales et normées

$$N_n(x, y) = \sum_i \frac{\psi_i(x) \psi_i(y)}{\lambda_i^n};$$

de sorte que si  $c_i$  représente le coefficient de Fourier de la fonction  $f_0$  relatif à la fonction  $\psi_i$ ,  $c_i \lambda_i^{-n}$  représentera le coefficient de la fonction  $f_n$  relatif à  $\psi_i$ .

On sait que si le noyau  $N(x, y)$  est fermé, le système orthogonal  $\psi_i(x)$  est complet et il y a correspondance univoque et réciproque (à des fonctions définies sur des ensembles de mesure nulle près) entre  $f(x)$  et ses coefficients de Fourier  $c_i$ . Aussi est-ce sur ces derniers que nous allons opérer. On peut fort bien attribuer à  $n$  des

valeurs non entières et introduire dans cette théorie la notion d'itération fractionnaire et d'itération continue.

Imaginons une fonction  $F$  des  $c_i$ , qui ne dépende de ceux-ci que par l'intermédiaire des produits  $c_i \lambda_i^m$ , et telle que l'intégrale

$$\Phi |f_0(x)| = \Phi(c_1, c_2, \dots) = \int_{m=-\infty}^{m=+\infty} F(c_1 \lambda_1^m, c_2 \lambda_2^m, \dots) dm$$

soit convergente quels que soient les coefficients de Fourier  $c_i$ . Il est clair que si l'on remplace les  $c_i$  par les  $c_i \lambda_i^{-n}$  cette fonctionnelle  $\Phi$  est invariante, elle satisfait à la condition (1) puisque l'intégrale précédente porte sur toutes les consécutives et toutes les antécédentes de  $f_0$ . Cette intégrale joue ici le rôle des séries de Poincaré; si elle n'est pas identiquement constante, mais dépend effectivement de la fonction initiale  $f_0(x)$ , elle sera automorphe.

Indiquons un moyen permettant d'obtenir une classe très générale de fonctionnelles  $\Phi$ .

Soient

$$\gamma = \sum_i \gamma_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}, \quad y = \sum_i y_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}, \quad z = \sum_i z_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}, \dots$$

des séries (de Dirichlet) convergentes quel que soit  $m$ , dans lesquelles les  $\gamma_i, y_i, z_i, \dots$  sont des paramètres constants. Elles représentent donc des fonctions des  $c_i$  et de  $m$ .

Soit d'autre part  $\varphi(y, z, \dots)$  une fonction telle que l'on ait:

$$|\varphi(y, z, \dots)| \leq |\varphi(\gamma, \gamma, \dots)|$$

lorsque les  $y, z, \dots$  et  $\gamma$  correspondent à une même valeur de  $m$  et telle de plus que l'intégrale suivante ait un sens:

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(\gamma, \gamma, \dots)| d\gamma.$$

J'appelle  $\varphi$  la fonction régulatrice et cette dernière intégrale l'intégrale majorante.

Nous supposons, et cela ne restreint pas la généralité, que les valeurs fondamentales  $\lambda_i$  soient toutes, en valeur absolue, supérieures à l'unité. Lorsque  $m$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $\gamma$  varie bien de 0 à  $+\infty$ .

La fonctionnelle

$$\Phi |f(x)| = \int_0^{+\infty} \varphi(y, z, \dots) d\gamma = \int_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varphi(y, z, \dots) \frac{d\gamma}{dm} dm$$

sera bien automorphe si elle n'est pas identiquement constante, c'est-à-dire quels que soient les  $c_i$  ou  $f(x)$ . Dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (t. 182, p. 1317, séance du 31 mai 1926) j'ai donné des fonctionnelles automorphes obtenues au moyen de la fonction régulatrice et de l'intégrale majorante:

$$\varphi(y, z) = ye^{-z} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma} d\gamma = 1.$$

Ce sont les fonctionnelles

$$J(c) = \int_{m=-\infty}^{m=+\infty} y(c, m) e^{-z(c, m)} d\gamma(c, m)$$

dont quelques-unes présentent en elles-mêmes des propriétés intéressantes.

Prenons en particulier  $z = \gamma$  et  $y = \sum_i c_i^2 \alpha_i \gamma^2 \lambda_i^{2m}$  les nombres  $|\alpha_i|$  étant bornés supérieurement; la fonctionnelle

$$R(c_1, c_2, \dots) = \int_0^{+\infty} ye^{-\gamma} d\gamma$$

donne lieu aux relations:

$$R(0, \dots, 0, c_i, 0, \dots) = \alpha_i \quad \text{et, si} \quad \alpha_i = (-1)^i,$$

$$R(0, c_2, 0, c_4, 0, \dots) = 1 \quad \text{et} \quad R(c_1, 0, c_3, 0, \dots) = -1.$$

Ces fonctionnelles  $J(c)$  sont d'ailleurs continues en chaque point de la sphère fonctionnelle  $\sum_i c_i^2 = 1$ .

Remarquons qu'une fonction  $f_0(x)$  a toujours une infinité de conséquents (ou de descendantes)  $f_n(x)$ ; mais, en vertu du théorème de M. Picard sur l'équation de Fredholm de première espèce, elle ne possède pas nécessairement des antécédentes (ou ancêtres). Mais la fonction aux coefficients de Fourier  $\gamma_i c_i$  admet des antécédentes de tout ordre, en vertu du même théorème de M. Picard, puisque la série  $\sum_i c_i^2 \gamma_i^2 \lambda_i^{2m}$

converge quel que soit  $m$ .

La formation de la série  $\gamma$  revient (qu'on me passe cette expression) à obliger la fonction  $f_0$  à épouser une autre fonction aux coefficients  $\gamma$  qui a une infinité d'ancêtres, de manière que  $f_0$  les possède également par alliance.

La dérivée fonctionnelle

$$\Phi' | f(x), \zeta |$$

n'est pas automorphe, mais on rétablit l'automorphisme en formant l'expression

$$\int_a^b f(\zeta) \Phi' | f(x), \zeta | d\zeta.$$

Les dérivées fonctionnelles d'ordre supérieur donnent lieu à des remarques analogues.

Insistons pour terminer sur l'interprétation géométrique de l'automorphisme de nos fonctionnelles.

On sait que la fonction  $f(x)$  peut être représentée par le point  $c_i$  de l'espace à une infinité de dimensions. Lorsque  $m$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  les coordonnées  $c_i \lambda_i^m$  sont celles du point représentatif de la fonction  $f^{-m}(x)$ . Ce point représentatif décrit donc une courbe  $\Gamma$  lorsque les  $c_i$  restent constants et que  $m$  varie seul. Cette courbe  $\Gamma$  coupe la sphère fonctionnelle  $s$ :  $\sum_i c_i^2 = 1$  pour la valeur  $m = 0$  (en supposant les fonctions initiales  $f_0(x)$  normalisées). Les points de  $\Gamma$  intérieurs à la sphère  $s$  représentent les conséquentes de  $f_0$ ; les points de  $\Gamma$  extérieurs à  $s$  représentent les antécédentes de  $f_0$ . Nos fonctionnelles, qui sont représentées par des intégrales curvilignes étendues à toute la courbe  $\Gamma$  sont indépendantes du point de départ  $c_i$  sur cette courbe  $\Gamma$ , mais elles varient quand on passe d'une courbe  $\Gamma$  à une autre. Elles sont donc aussi fonctions des lignes  $\Gamma$  de l'espace fonctionnel.

L'invariance de la fonctionnelle

$$\int_{m=-\infty}^{m=+\infty} F(c_1 \lambda_1^m, c_2 \lambda_2^m, \dots) dm$$

le long d'une courbe  $\Gamma$  implique que sa différentielle pour un déplacement fait le long de la courbe  $\Gamma$  soit nulle, ce qui se traduit par l'équation

$$\int_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left( \sum_i \frac{\partial F}{\partial c_i \lambda_i^m} c_i \lambda_i^m L \lambda_i \right) dm \equiv 0.$$

Il suffira de se donner la fonctionnelle  $\Phi$  sur la sphère  $s$  pour la déterminer dans tout l'espace fonctionnel.

La sphère  $s$  joue donc le rôle de l'intégrale  $0, 2\pi$  d'une fonction donnée par une série trigonométrique; ou du parallélogramme des périodes des fonctions elliptiques; c'est l'espace générateur.

On pourrait introduire la notion de groupe, ce que nous n'avons pas encore fait.

Guidé par l'analogie avec les fonctions simplement périodiques, elliptiques et fuchsienues on peut espérer pousser très avant cette étude.

7. — G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur une généralisation du théorème de Jacobi*. — (Nous renvoyons au Mémoire publié par l'auteur à la Librairie A. Blanchard ; Thèse de doctorat, Paris, 1926. Voir plus loin, p. 318, une analyse sommaire de ce Mémoire).

8. — H. KREBS (Berne). — *Représentation géométrique d'une transformation d'équations aux dérivées partielles*. — Nous considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda(u, v)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \lambda(u, v) x = 0. \quad (1)$$

Les suites de Laplace qui correspondent aux équations (1) intégrables comprennent un nombre pair d'équations et sont telles que deux équations situées à égale distance des extrêmes ont les mêmes invariants à l'ordre près.

Nous considérerons le réseau  $x$  déterminé par l'équation (1) et une congruence  $yz$  conjuguée à ce réseau, les foyers de la droite passant par le point  $x$  étant désignés par  $y$  et  $z$ . Si l'on désigne par  $x_1$  une solution de l'équation (1), le foyer  $y$  de la droite  $yz$  est déterminé par la relation

$$y = \int x_1 x du + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} dv. \quad (2)$$

Nous poserons

$$z_1 = \int x_1^2 du + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 dv. \quad (3)$$

Nous définirons un point  $\omega$  de la droite  $yz$  par la relation

$$\frac{z_1 \omega}{x_1} = \frac{z_1 x}{x_1} - y. \quad (4)$$

La formule (2) nous donne les deux relations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \frac{z_1 \omega}{x_1} &= z_1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{x}{x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \frac{z_1 \omega}{x_1} &= \left( z_1 - \frac{1}{\lambda} x_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} \frac{x}{x_1}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Nous retrouvons les équations de la transformation de M. Goursat qui permet de construire toutes les équations (1) intégrables et leurs intégrales.



Si l'on élimine successivement  $\omega$  et  $x$  entre les équations (5) et que l'on exprime  $\lambda$  en fonction de  $z_1$  au moyen de la relation (3), on obtient deux équations dont la seconde se déduit de la première en remplaçant  $x$  par  $\omega$  et  $z_1$  par  $\frac{1}{z_1}$ .

Le second foyer  $z$  de la droite  $yz$  est donné par une relation que l'on peut mettre sous la forme

$$z = y - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x_1}{\partial v} x. \quad (6)$$

L'élimination de  $x$  entre les formules (4) et (6) nous donne la relation

$$\frac{1}{\lambda} z_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \omega = -z_1 z + \left( z_1 - \frac{1}{\lambda} x_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) y. \quad (7)$$

Les relations (6) et (7) nous montrent que le rapport anharmonique des points  $\omega$ ,  $x$ ,  $z$  et  $y$  est égal au rapport des coefficients de  $\frac{\partial}{\partial u} \frac{x}{x_1}$  et de  $\frac{\partial}{\partial v} \frac{x}{x_1}$  de la transformation de M. Goursat.

Nous avons donc le théorème:

Si l'on prend pour rapport anharmonique le rapport des coefficients de  $\frac{\partial}{\partial u} \frac{x}{x_1}$  et de  $\frac{\partial}{\partial v} \frac{x}{x_1}$  de la transformation de M. Goursat, le conjugué anharmonique d'un point du réseau défini par l'équation (1) par rapport aux foyers de la droite passant par ce point d'une congruence conjuguée à ce réseau décrit un réseau satisfaisant à l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1) dans laquelle la fonction  $\lambda(u, v)$  est exprimée en fonction de  $z_1$  au moyen de la relation (3),  $z_1$  par  $\frac{1}{z_1}$ .

La représentation géométrique de la transformation de M. Goursat que nous avons obtenue est donc très semblable à celle qu'a donné M. Koenigs de la transformation de Moutard.

9. — M. PLANCHEREL (Zurich). — *Le rôle de l'intégrale de Fourier dans l'intégration de quelques problèmes mixtes relatifs à certaines équations aux dérivées partielles du type hyperbolique ou parabolique.* — Dans un travail trop peu remarqué (*Normal coordinates in dynamical systems*, Proceedings London Math. Soc., 15 (1916), p. 401-448), M. T. J. I'A. Bromwich a été amené par une méthode heuristique des plus intéressantes à formuler sur l'intégration des problèmes mixtes relatifs à certaines équations aux dérivées partielles du type hyperbolique ou parabolique quelques propositions dont la démonstration n'a pas encore été donnée.

Cette démonstration peut être faite à l'aide de la théorie des transformations intégrales de Fourier et de quelques théorèmes de la



théorie des équations intégrales se rapportant aux équations (2) et (3) ci-dessous.

Un changement de variables conduit facilement de la forme ordinaire des transformations intégrales de Fourier aux formules d'inversion suivantes

$$g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} g(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

$$(\lambda = \alpha + i\theta, \quad -\infty < \theta < \infty; \quad 0 < t < \infty)$$

auxquelles on peut toujours donner un sens, pourvu que l'une des deux intégrales

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda, \quad \int_0^{\infty} |e^{-\alpha t} f(t)|^2 dt$$

soit finie (la finitude de l'une entraîne celle de l'autre).  $g(\lambda)$  est très souvent appelée la transformée de Laplace de  $f(t)$ .

Soient  $L(u)$  et  $H(u)$  des expressions différentielles linéaires et homogènes, relatives aux variables indépendantes  $x, y$ , la première du second ordre, la seconde du premier ordre. Soit  $\Omega$  un domaine plan limité par une courbe fermée simple  $C$ . Supposons que  $L(u)$  soit du type elliptique positif dans  $\Omega + C$  et que le problème

$$L(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad H(u) = 0 \quad \text{sur } C$$

soit adjoint à lui-même.  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $u^0(x, y)$ ,  $u^1(x, y)$ ,  $f(x, y, t)$ ,  $g(x, y, \lambda)$  désigneront des fonctions données. On supposera en particulier que  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  ne sont pas négatives dans  $\Omega + C$  et que  $a^2 + b^2 > 0$ . De plus,  $f(x, y, t)$  et  $g(x, y, \lambda)$  seront reliées par les formules (1).

Les deux problèmes :

I. Déterminer une fonction  $u(x, y, t)$  qui pour  $t > 0$  vérifie dans  $\Omega$  l'équation

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = f$$

et sur  $C$  la condition  $H(u) = 0$  et qui, pour  $t = 0$ , satisfait aux conditions initiales

$$u(x, y, 0) = u^0, \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = u^1.$$

II. Déterminer une fonction  $v(x, y, \lambda)$  qui, dans  $\Omega$ , vérifie l'équation

$$(a\lambda^2 + b\lambda)v - L(v) = (a\lambda + b)u^0 + au^1 + g \quad (2)$$

où  $\lambda$  est un paramètre et qui, sur  $C$ , satisfait à la condition  $H(v) = 0$  ont leurs solutions liées entre elles par les formules d'inversion

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} v(x, y, \lambda) d\lambda, \quad v(x, y, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, y, t) dt.$$

On suppose, dans la première, que  $t > 0$  et que la partie réelle de  $\alpha$  est plus grande que la borne supérieure des parties réelles des valeurs fondamentales  $\lambda$  du problème

$$(a\lambda^2 + b\lambda)v - L(v) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3)$$

$$H(v) = 0, \quad \text{sur } C.$$

Dans la seconde formule on suppose que la partie réelle de  $\lambda$  est plus grande que cette même borne.

10. — M<sup>me</sup> Gr. Chisholm YOUNG (La Conversion, Vaud). — *Pythagore, comment a-t-il trouvé son théorème?* — (Voir *L'Enseignement mathém.*, t. 25, 1926.)

11. — M<sup>lle</sup> H. STAEHELIN (Fetan). — *Représentation du complexe des tangentes à un cône du second ordre dans l'espace ponctuel à trois dimensions*<sup>1</sup>. — Par un choix convenable des coordonnées projectives  $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ , les équations d'un cône irréductible du second ordre  $K_2$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$x_0 = l_{00}; \quad x_1 = l_1^2; \quad x_2 = l_1 l_2; \quad x_3 = l_2^2,$$

où les paramètres  $l_{00} : l_1 : l_2$  ne peuvent pas être nuls à la fois et sont homogènes dans ce sens qu'un système de valeurs  $l_{00} : l_1 : l_2$  est équivalent à  $\rho^2 l_{00} : \rho l_1 : \rho l_2$ ;  $\rho \neq 0$ .

Les génératrices rectilignes ont des équations de la forme :

$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 = 0. \quad (1)$$

Si ces coordonnées sont fonctions d'un paramètre  $t$ , les coordonnées de Plücker d'une tangente à  $K_2$ , qui ne passe pas par le sommet, se déduisent de la matrice:

$$\begin{vmatrix} l_{00} & l_1^2 & l_1 l_2 & l_2^2 \\ l'_{00} & 2l_1 l'_1 & l'_1 l_2 + l_1 l'_2 & 2l_2 l'_2 \end{vmatrix}.$$

<sup>1</sup> H. STAEHELIN, Die charakteristischen Zahlen analytischer Kurven auf dem Kegel zweiter Ordnung und ihrer Studyschen Bildkurven. *Thèse de doctorat*. Bâle, 1924; *Math. Ann.*, 93; p. 218-19.

On peut prendre comme paramètres des tangentes, les grandeurs homogènes:

$$L_1 = l_1(l_1' l_2' - l_2 l_1') , \quad L_2 = l_2(l_1' l_2' - l_2 l_1')$$

$$L_3 = 2l_{00} l_1' - l_1 l_{00}' , \quad L_4 = 2l_{00} l_2' - l_2 l_{00}' ,$$

Elles satisfont aux relations:

$$L_1 : L_2 = l_1 : l_2 ; \quad L_1 L_4 - L_2 L_3 = 2l_{00}(l_1' l_2' - l_2 l_1')^2 . \quad (2)$$

On a donc la représentation paramétrique des tangentes:

$$X_{01} = L_1 L_3 , \quad X_{02} = \frac{1}{2}(L_1 L_4 + L_2 L_3) , \quad X_{03} = L_2 L_4 ,$$

$$X_{23} = L_2^2 , \quad X_{31} = -2L_1 L_2 , \quad X_{12} = L_1^2 .$$

Si l'on considère les paramètres  $L_i$  comme les coordonnées homogènes  $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$  d'un point de l'espace, chaque tangente ne passant pas par le sommet de  $K_2$  correspondra à un point :  $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = L_1 : L_2 : L_3 : L_4$  et inversement.

Pour les génératrices, on a  $L_1 = 0$  et  $L_2 = 0$ ; mais d'après (1) et (2):

$$L_1 : L_2 = l_1 : l_2 = -\alpha_2 : \alpha_1 \quad \text{et} \quad l_3 : l_4 = L_1 : L_2 = -\alpha_2 : \alpha_1 .$$

Les points qui correspondent aux génératrices ont donc des coordonnées de la forme:

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 0 : 0 : -\alpha_2 : \alpha_1 \quad \text{avec} \quad \xi_0 : \xi_1 = -\alpha_2 : \alpha_1 .$$

Ces points sont situés sur la directrice d'une congruence parabolique:

$$\Xi_{01} = 0 , \quad \Xi_{12} - \Xi_{03} = 0 .$$

On montre facilement qu'un faisceau de tangentes se transforme en une droite coupant la directrice de cette congruence; cette droite n'appartient à la congruence que si le sommet du faisceau est un point régulier du cône.

A chaque droite passant par le sommet de  $K_2$  correspondent 2 points de la directrice; ce sont les images des génératrices de contact des plans tangents au cône menés par la droite; elles ne coïncident que si la droite est une génératrice. La duplicité qui intervient dans la représentation du complexe des tangentes à une quadrique non dégénérée<sup>1</sup> se réduit ici aux tangentes passant par le sommet du cône,

<sup>1</sup> E. STUDY. *Ueber Lies Geometrie der Kreise und Kugeln*, Math. Ann., 86.

H. JOBIN, *Sur une généralisation de la transformation de Lie*. Thèse E.p.f., Zurich, 1920.

et qui ne sont pas des génératrices. Si l'on exclut ces tangentes singulières, il y a correspondance univoque et réciproque entre chaque tangente et un point de l'espace ponctuel à 3 dimensions.

12. — H. BRANDT (Aachen). — *Théorie arithmétique des quaternions*. — L'auteur définit le concept d'un corps général de quaternions et discute en particulier les corps dont la théorie se trouve en connexion étroite avec la théorie de la composition des formes quadratiques quaternaires. Un corps de cette espèce contient un nombre infini de domaines maximum d'intégrité  $e, e', e''$ , qui figurent en même temps comme idéaux-unités. Pour chaque domaine comme  $e$ , il y a des idéaux gauches et des idéaux droits, c'est-à-dire des systèmes de quaternions  $\alpha$  contenant la somme de tout couple de ses éléments, et, en désignant par  $\varepsilon$  chaque quaternion de  $e$ , également  $\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha' \dots$  dans le premier cas et  $\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon \dots$  dans le second cas. On écrit, suivant le cas, l'équation  $ea = a$  ou  $ae = a$ , et on nomme  $e$  l'idéal-unité gauche ou droit de  $a$ .

En considérant non seulement le domaine d'intégrité  $e$  mais encore tous les autres  $e', e'' \dots$ , et en cherchant pour chacun d'eux les idéaux gauches et droits, on trouve chaque idéal exactement deux fois, une fois comme idéal gauche et une fois comme idéal droit, mais en général dans des domaines d'intégrité différents. En d'autres mots, chaque idéal possède un idéal-unité gauche et un idéal-unité droit, tous deux univoquement déterminés.

On peut définir pour les idéaux une opération de multiplication, correspondante à celle des corps algébriques, et qui n'en diffère que par la présence de certaines conditions indispensables pour l'existence du produit. En effet, si nous désignons par  $a$  et  $b$  deux idéaux, on peut former le produit  $ab = c$  lorsque l'idéal-unité droit de  $a$  et l'idéal-unité gauche de  $b$  sont identiques. Dans les autres cas le produit n'existe pas.

Cette multiplication des idéaux ainsi définie n'est pas commutative; de ce qu'on peut former  $ab$  il ne s'ensuit même pas l'existence du produit  $ba$ . Par contre elle est associative.

L'ensemble de tous les idéaux du corps, considéré au point de vue de cette multiplication, constitue un agrégat d'éléments semblable mais non pas identique à un groupe que j'appelle un groupoïde (*Mathematische Annalen*, tome 96, p. 360).

De même que pour les corps algébriques, on peut définir la notion de classes d'idéaux, contenant avec l'idéal  $\alpha$  l'ensemble de tous les idéaux  $\rho\alpha\sigma$ , où  $\rho$  et  $\sigma$  désignent des quaternions quelconques. On trouve alors une composition des classes analogue à celle des idéaux mais plus simple: elles forment un groupoïde à un nombre fini d'éléments.