

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	25 (1926)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR LA RÉDUCTION DES DOMAINES PAR UNE SUBSTITUTION A m VARIABLES COMPLEXES ET L'EXISTENCE D'UN SEUL POINT INVARIANT
<b>Autor:</b>	Wavre, Rolin
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-20685">https://doi.org/10.5169/seals-20685</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR LA RÉDUCTION DES DOMAINES  
PAR UNE SUBSTITUTION A  $m$  VARIABLES COMPLEXES  
ET L'EXISTENCE D'UN SEUL POINT INVARIANT

PAR

Rolin WAVRE (Genève).

Dans son remarquable Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles M. G. JULIA a élucidé le problème général, c'est-à-dire dans tout le plan complexe, de l'itération d'une fonction entière ou rationnelle. Il tirait parti de la notion de *famille normale* due à M. MONTEL. Les Notes que M. Julia a publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, en 1920, sur les suites normales de fonctions analytiques à plusieurs variables faciliteront l'étude du problème général pour les substitutions à deux ou plusieurs variables.

A part les difficultés inhérentes à la théorie des fonctions analytiques à plusieurs variables, il en est une qui provient de ce qu'il n'est pas toujours possible de faire la représentation régulière d'un domaine de l'hyperespace à  $2m$  dimensions sur l'hyper sphère ou sur un domaine cylindrique, et l'on ne peut tirer de l'artifice de la représentation conforme le même avantage que dans le cas d'une seule variable.

Le problème local, c'est-à-dire l'étude de l'itération d'une substitution au voisinage d'un point double a fait l'objet des belles études de POINCARÉ, LATTÈS, de MM. LEAU et LÉVI-CIVITA.

Je voudrais traiter ici un problème mixte particulier, plus voisin du problème local que du problème général, en démontrant le théorème suivant:

A. Si un volume de l'espace à  $2m$  dimensions ( $z_1, \dots, z_m$ ) est rejeté à son intérieur par une substitution holomorphe dans ce volume, il existe un point invariant à l'intérieur de ce volume et il n'en existe qu'un.

Cette proposition peut aussi être rapprochée des théorèmes de M. BIRKHOFF concernant les substitutions continues.

§ 1. — *Rappel de quelques définitions et propriétés des ensembles.*  
Soit  $E$  un ensemble de points de l'espace  $E_n$  à  $n$  dimensions. L'ensemble des points de  $E_n$  qui n'appartiennent pas à  $E$  sera l'ensemble *complémentaire*  $C_E$  de  $E$ .

Par *voisinage* d'un point  $P$  de l'espace  $E$  nous entendons l'intérieur d'une hypersphère de rayon arbitrairement petit centrée en  $P$ . L'hypersphère sera bien entendu à  $n - 1$  dimensions et son intérieur à  $n$  dimensions. La définition précédente du voisinage d'un point  $P$  peut être remplacée par la suivante dans le cas des variables complexes :

Par voisinage du point  $P$  de l'espace complexe à  $2m$  dimensions  $z_i = x_i + iy_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , nous entendons un domaine cylindrique  $|z_i - a_i| < \rho$ ,  $\rho$  étant un nombre positif, non nul arbitrairement petit, et les  $a_i$  représentant les coordonnées du point  $P$ .

Il est clair que dans tout domaine cylindrique on peut tracer une hypersphère  $x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_m^2 + y_m^2 = r^2$  et que dans toute hypersphère à  $2m - 1$  dimensions on peut tracer un domaine cylindrique. Ainsi la définition du voisinage pour un espace complexe par un domaine cylindrique arbitrairement petit est équivalente à la définition du voisinage par une hypersphère de rayon arbitrairement petit.

Nous disons qu'un point  $P$  est *point d'accumulation* de l'ensemble  $E$  si le voisinage du point  $P$  contient une infinité de points de  $E$ .

Soit  $E'$  l'ensemble des points d'accumulation de  $E$ ;  $E'$  sera dit le *dérivé* de l'ensemble  $E$ .

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux ensembles,  $E_1 \times E_2$  représentera l'ensemble de leurs points communs,  $E_1 + E_2$  l'ensemble des points qui appartiennent à l'un ou à l'autre, ou aux deux.

*La frontière*  $f_E$  de l'ensemble sera formée de tous les points de

l'ensemble qui sont points d'accumulation de l'ensemble complémentaire, et de tous les points du complémentaire qui sont points d'accumulation de l'ensemble. La frontière  $f_E$  sera donc définie par l'égalité suivante :

$$f_E = E' C_E + C_E' E . \quad (1)$$

La frontière d'un ensemble est la même que celle de son ensemble complémentaire :

$$f_E = f_{C_E} .$$

Cela résulte de la symétrie en  $E$  et  $C_E$  de la définition de  $f_E$ .

Disons qu'un point  $P$  de  $E$  est *isolé* si son voisinage ne contient pas de point de  $E$  autre que  $P$ .

Disons qu'un point  $P$  de  $E$  est *point intérieur* à  $E$  si son voisinage ne contient que des points de  $E$ .

Un point isolé de  $E$  ou de  $C_E$  appartient toujours à la frontière  $f_E$ .

Un point intérieur à  $E$  ne peut appartenir à  $f_E$ .

Un point frontière n'est intérieur ni à  $E$  ni à  $C_E$ . Il y a toujours dans le voisinage d'un point frontière un point de l'ensemble et un point du complémentaire.

Disons qu'un ensemble est *fermé* si sa frontière lui appartient.

Disons qu'un ensemble est *ouvert* si sa frontière appartient à son complémentaire.

Un ensemble ouvert n'a que des points intérieurs.

Si un ensemble est ouvert, son complémentaire est fermé.

Si un ensemble est fermé, son complémentaire est ouvert.

Un ensemble ouvert n'a pas de points isolés.

Un ensemble ouvert auquel on adjoint sa frontière devient un ensemble fermé sans points isolés.

Appelons ensemble d'*un seul tenant* un ensemble tel que deux quelconques de ses points puissent être reliés par un arc de courbe  $x_i = f_i(s)$   $i = 1, 2 \dots, n$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , les fonctions  $f$  étant continues, et l'arc ne sortant pas de l'ensemble.

Appelons *domaine* un ensemble ouvert.

Un *volume* sera constitué par un *domaine d'un seul tenant auquel on adjoint la frontière du domaine*. Ainsi, un volume est un

ensemble fermé sans points isolés, et massif dans ce sens qu'étant constitué par un domaine que l'on a fermé, il est à autant de dimensions que les points du domaine, c'est-à-dire à  $n$  dimensions si le domaine est tracé dans l'espace  $E_n$ . Une fonction holomorphe dans un volume peut être prolongée analytiquement à l'intérieur du volume par l'artifice des  $n$  cercles associés.

§ 2. — *Lemme de la théorie des fonctions holomorphes à  $m$  variables.* Si  $u = \varphi(z_1, \dots, z_m)$  est une fonction holomorphe, non identiquement nulle dans le voisinage du point  $z_1 = \dots = z_m = 0$ , et telle que  $0 = \varphi(0, \dots, 0)$ , le voisinage du point  $u = 0$ , pris dans l'espace  $E_2$  constitué par le plan des  $u$ , est recouvert une fois au moins lorsque le point  $z(z_1, \dots, z_m)$  balaye le voisinage du point  $z_1 = \dots = z_m = 0$ , ce dernier voisinage étant bien entendu pris dans l'espace  $E_{2m}$ .

Le lemme est vrai dans le cas d'une seule variable; on sait, en effet, que la fonction

$$u = z^k [a_k + z(a_{k+1} + \dots)] , \quad a_k \neq 0 \quad k \geq 1$$

établit une correspondance entre le voisinage du point  $z = 0$  et le voisinage du point  $u = 0$  recouvert  $k$  fois.

Maintenant considérons la fonction

$$u = \varphi(z_1, \dots, z_m)$$

holomorphe dans un domaine cylindrique  $|z_i| < \rho \quad i = 1, \dots, m$ . La propriété sera vraie si la fonction de la seule variable  $z_1$  holomorphe dans le cercle  $|z_1| < \rho$

$$\varphi(z_1, 0, \dots, 0) \tag{1}$$

n'est pas identiquement nulle.

Si elle est au contraire identiquement nulle, alors la fonction

$$\varphi(y_1, z_2, 0, \dots, 0) \quad |y_1| < \rho \tag{2}$$

est encore holomorphe en  $z_2$  dans le cercle  $|z_2| < \rho$  et nulle à l'origine  $z_2 = 0$ .

Si cette dernière fonction (2) n'est pas identiquement nulle pour une valeur de  $y_1$  convenablement choisie, la propriété est encore vraie.

Si au contraire la fonction (2) est identiquement nulle, quel que soit  $|y_1| < \rho$ , la fonction

$$\varphi(y_1, y_2, 0, \dots, 0)$$

est identiquement nulle quels que soient  $y_1$  et  $y_2$ .

Supposons qu'il en soit ainsi et considérons la fonction

$$\varphi(y_1, y_2, z_3, 0, \dots, 0). \quad |y_1| < \rho, \quad |y_2| < \rho. \quad (3)$$

Elle s'annule encore pour  $z_3 = 0$  et est holomorphe dans le cercle  $|z_3| < \rho$ . Si elle n'est pas identiquement nulle, la propriété est vraie; si elle est identiquement nulle quelles que soient les valeurs  $y_1$  et  $y_2$  convenablement choisies, la fonction

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, 0, \dots, 0)$$

est identiquement nulle.

Enfin, supposons que la fonction

$$\varphi(y_1, \dots, y_{m-1}, 0)$$

soit identiquement nulle, alors la fonction

$$\varphi(y_1, \dots, y_{m-1}, z_m) \quad |y_1| < \rho, \dots, |y_{m-1}| < \rho \quad (m)$$

s'annule pour  $z_m = 0$  et est holomorphe dans le cercle  $|z_m| < \rho$ .

Si elle n'est pas identiquement nulle pour des valeurs convenablement choisies de  $y_1, \dots, y_{m-1}$ , la proposition est vraie, sans quoi la fonction

$$\varphi(y_1, \dots, y_m)$$

est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi l'une des fonctions (1), (2), ... (m) n'est pas identiquement nulle et la propriété est vraie.

Pour résumer cette démonstration, disons:

La propriété est vraie si l'une des fonctions

$$\varphi(z_1, 0, \dots, 0), \quad \varphi(y_1, z_2, 0, \dots, 0), \dots, \quad \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, z_m)$$

n'est pas identiquement nulle pour des valeurs fixes des  $y$  telles que  $|y_i| < \rho$ , sans quoi

$$\varphi(y_1, \dots, y_m) \equiv 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc le voisinage de l'origine, l'espace  $E_{2m}$  recouvre le voisinage de l'origine de l'espace  $E_2$  constitué par le plan des  $u$ .

En d'autres termes, le point  $u = 0$  est point intérieur de l'ensemble des points  $u$  lorsque le point  $z_1, \dots, z_m$ , balaye un domaine cylindrique, si petit soit-il, centré à l'origine de l'espace  $E_{2m}$ . Il en est donc ainsi encore si  $z_1, \dots, z_m$  balaye un ensemble dont l'origine de  $E_{2m}$  soit point intérieur.

### § 3. — Démonstration du théorème.

Soit

$$z^{(1)} = \Psi(z) . \quad z_i^{(1)} = \psi_i(z_1, \dots, z_m) , \quad i = 1, \dots, m$$

une substitution du point  $z_i^{(1)}$  au point  $z_i$ . C'est une transformation qui fait passer du point  $z_i$  au point  $z_i^{(1)}$ . Nous appellerons le point  $z_i^{(1)}$  le *conséquent* du point  $z_i$ , et  $z_i$  un *antécédent* du point  $z_i^{(1)}$ . Nous supposons les fonctions  $\psi_i$  holomorphes dans un volume  $V_0$ , mais, pour le moment, seules la continuité et l'univocité des fonctions  $\psi_i$  vont intervenir.

Lorsque le point  $z_i$  décrit le volume  $V_0$ , le point  $z_i^{(1)}$  décrit un ensemble  $V_1$  qui sera appelé le *conséquent* du volume  $V_0$ .

*Remarque.* — Si le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_m)}{D(z, \dots, z_m)}$$

est différent de 0 dans tout le volume  $V_0$ , la substitution, dite alors *régulière*, peut être inversée, et il est clair qu'à *un point intérieur à  $V_0$  correspond un point intérieur à  $V_1$*  (l'intérieur étant entendu par rapport à l'espace  $E_{2m}$ ). Ainsi la frontière de  $V_1$  ne peut provenir que de la frontière de  $V_0$ . Il suffit, dans le cas d'une substitution régulière, que le *conséquent* de la frontière de  $V_0$  appartienne à  $V_0$  pour que  $V_0 > V_1$ .

Mais si ce déterminant fonctionnel s'annule à l'intérieur du volume  $V_0$ , cette propriété n'est plus certaine, tout au moins dans le cas de plus de 2 variables. Dans le cas de 2 variables, elle a fait l'objet de l'étude de quelques géomètres américains et elle subsiste. De sorte que cette propriété ne pourra nous servir dans le cas où  $m > 2$ .

Supposons le domaine  $V_0$  tout entier à distance finie.

*Le conséquent d'un ensemble fermé est un ensemble fermé.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait un point d'accumulation  $p$  de points du conséquent qui n'appartiendrait pas au conséquent. Mais de la suite des antécédents d'une suite de points tendant vers le point d'accumulation on pourrait extraire une suite tendant vers un point limite qui appartient à l'ensemble antécédent, puisque celui-ci est fermé. A cause de la continuité, le conséquent du point limite serait limite des conséquents, ce serait le point d'accumulation  $p$ . Ce point appartiendrait donc au conséquent.

Ainsi  $V_0$  étant fermé, le conséquent  $V_1$  est également fermé.

Si  $V_1$  appartient à  $V_0$  ( $V_0 > V_1$ ) la substitution sera définie dans  $V_1$  et la transformation appliquée à  $V_1$  donnera un nouveau domaine  $V_2$  évidemment compris dans  $V_1$ , puis  $V_2$  donnera  $V_3$  et ainsi de suite.

Ainsi  $V_0 > V_1$  implique  $V_0 > V_1 > V_2 > V_3 > \dots$ .

Nous supposons ici que  $V_1$  n'est constitué que de points intérieurs à  $V_0$ : alors les deux ensembles  $V_0$  et  $V_1$  n'ont pas de point frontière commun. La frontière  $F_1$  de  $V_1$  est elle-même constituée par des points intérieurs à  $V_0$ .

Les ensembles  $V_1, V_2, V_3, \dots$  sont fermés.

Soit  $V_{\infty}$  l'ensemble des points communs à tous les  $V_n$ :

$$V_{\infty} = V_0 V_1 V_2 V_3 \dots$$

On peut aussi dire, puisque les  $V_n$  s'emboîtent les uns dans les autres, que  $V_{\infty}$  est la limite des  $V_n$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment:

$$V_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n .$$

Appelons *suite de puissance infinie* ou suite  $S$ , une suite convergente constituée d'un point  $p_0$  de  $V_0$ , d'un point  $p_1$  de  $V_1$ , d'un point  $p_2$  de  $V_2 \dots$ , confondus ou séparés. Les points  $p_n$ , pour  $n > N$  appartiennent tous à  $V_N$ . Ainsi,  $V_N$  étant fermé, le point limite  $p$  appartient à  $V_N$  et cela quel que soit  $N$ . Le point limite d'une suite de puissance infinie appartient donc à  $V_{\infty}$ .

*L'ensemble  $V_{\infty}$  est constitué d'au moins un point*, puisqu'il existe une suite de puissance infinie.

*L'ensemble  $V_\infty$  est fermé.*

En effet, les points de  $V_\infty$  appartiennent à tous les  $V_n$ ; leurs points d'accumulation aussi, puisque les  $V_n$  sont fermés. Ces points d'accumulation appartiennent donc à  $V_\infty$ .

*Un point quelconque de  $V_\infty$  possède au moins un antécédent appartenant à  $V_\infty$ .*

En effet, un point  $p$  de  $V_\infty$  appartient à tous les  $V_n$ . Comme tel il possède un antécédent dans chaque  $V_{n-1}$ . On peut extraire de ces antécédents une suite de puissance infinie  $p_n^{(-1)}$  dont le point limite  $p_{-1}$  satisfait à la relation

$$p = \Psi(p_n^{(-1)}) \quad \text{et à la limite} \quad p = \Psi(p_{-1}) .$$

*Le conséquent d'un point de  $V_\infty$  appartient à  $V_\infty$ .*

En effet, ce conséquent appartient à tous les  $V_{n+1}$  comme conséquent d'un point appartenant à tous les  $V_n$ . Il appartient d'ailleurs à  $V_0$ . *De sorte que le conséquent de l'ensemble  $V_\infty$  est l'ensemble  $V_\infty$  lui-même, symboliquement:  $V_\infty = \Psi(V_\infty)$ .*

Soit

$$z_i^{(2)} = \psi_i[\psi_1(z_1, \dots, z_m), \dots, \psi_m(z_1, \dots, z_m)]$$

la substitution itérée d'ordre deux.

Puis

$$z_i^{(n)} = \psi_i[\psi_1^{(n-1)}(z_1, \dots, z_m), \dots, \psi_m^{(n-1)}(z_1, \dots, z_m)]$$

la substitution itérée d'ordre  $n$ .

Les fonctions  $\psi_i^{(n)}$  sont holomorphes dans le domaine  $V_0$ , elles changent  $V_0$  en  $V_n$ , elles sont en module bornées par un même nombre, la plus grande distance à l'origine  $z_1 = 0, \dots, z_m = 0$  d'un point du volume  $V_0$

$$|\psi_i^{(n)}(z_1, \dots, z_m)| < M$$

quels que soient  $i$  et  $n$  et le point  $z_1, \dots, z_m$  dans  $V_0$ .

Invoquons ici la théorie des *suites normales* de fonctions holomorphes d'après laquelle, de toute suite de fonctions holomorphes et bornées par un même nombre dans un volume, on peut extraire une suite qui converge uniformément dans tout ensemble fermé, tel ici  $V_1$ , constitué par des points intérieurs au

volume, vers une fonction holomorphe dans le volume lui-même. Extrayons de la suite  $\psi_1^{(n)}$  une suite  $\psi_1^{(n_1)}$  qui converge uniformément vers une fonction  $\varphi_1$ ; puis de la suite correspondante  $\psi_2^{(n_1)}$  extrayons une suite  $\psi_2^{(n_2)}$  qui converge uniformément vers une fonction  $\varphi_2, \dots$ ; puis de la suite  $\psi_m^{(n_{m-1})}$  une suite  $\psi_m^{(n_m)}$  qui converge uniformément vers une fonction  $\varphi_m$ .

Alors les substitutions, en posant  $\lambda$  à la place de  $n_m$ :

$$z^\lambda = \Psi^{(\lambda)}(z) \quad z_i^\lambda = \psi_i^{(\lambda)}(z_1, \dots, z_m)$$

convergent uniformément dans  $V_1$  vers une substitution limite

$$z^{(1)} = \Phi(z), \quad z_i^{(1)} = \varphi_i(z_1, \dots, z_m),$$

holomorphe dans  $V_0$ .

*Le conséquent d'un point de  $V_0$  par  $\Phi$  appartient à  $V_\infty$ .*

En effet, les points  $z_i^{(\lambda)}$  forment une suite de puissance infinie dont le point limite  $z_i^{(1)}$  est le conséquent par  $\Phi$  du point  $z$ .

*Le conséquent d'un point de  $V_\infty$  par  $\Phi$  appartient à  $V_\infty$ :* Ce n'est qu'un corollaire de la proposition précédente.

*Un point quelconque de  $V_\infty$  possède au moins un antécédent par  $\Phi$  dans  $V_\infty$ .*

En effet, il en est ainsi par  $\Psi^{(\lambda)}$ . Soit  $p^{(-\lambda)}$  une suite d'antécédents appartenant tous à  $V_\infty$ . Elle contient une suite  $p^{(-l)}$  de puissance infinie tendant vers un point  $p_{-1}$ .

On a

$$\Psi^{(l)}[p^{(-l)}] = p \quad \text{et} \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} p^{(-l)} = p_{-1}.$$

D'autre part

$$|\Psi^{(l)}[p^{(-l)}] - \Phi[p^{(-l)}]| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\varepsilon$  étant donné, pourvu que  $l$  soit plus grand qu'un certain nombre  $L$ , et cela quel que soit  $p^{(-l)}$  dans  $V_\infty$ , en vertu de la convergence uniforme.

Enfin

$$|\Phi[p^{(-l)}] - \Phi(p_{-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pourvu que  $l$  soit plus grand qu'un certain nombre  $L'$ , en vertu de la continuité de la substitution  $\Phi$  sur  $V_\infty$ .

De sorte que l'on a:

$$|p - \Phi(p_{-1})| < \varepsilon$$

si  $l$  est supérieur à  $L$  et à  $L'$ . Mais  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, d'où

$$\Phi(p_{-1}) = p = \lim_{l \rightarrow +\infty} \Psi^{(l)}[p^{(-l)}] .$$

*La substitution  $\Phi$  transforme donc  $V_\omega$  en  $V_\omega$ .*

Montrons maintenant qu'en vertu de notre lemme il y a une contradiction dans le fait que  $\Phi$  transforme  $V_0$  en un ensemble  $V_\omega$  intérieur à  $V_0$  et  $V_\omega$  en lui-même.

Soit  $R_1$  l'ensemble que décrit la variable  $z_1$  dans son plan lorsque le point  $z_1, \dots, z_m$  décrit l'ensemble  $V_\omega$ .  $R_1$  est fermé, on s'en assure aisément, puisque  $V_\omega$  est fermé également.

Soit  $a_1$  un point de la frontière de  $R_1$ : ce point est donc limite de points du plan  $z_1$  qui n'appartiennent pas à  $R_1$ . Soit  $A$  un point de  $V_\omega$  pour lequel  $z_1 = a_1$ .  $A$  fait évidemment partie de la frontière de l'ensemble  $V_\omega$ . Soit enfin  $A_{-1}$  un antécédent par  $\Phi$  du point  $A$ , antécédent qui soit lui aussi dans  $V_\omega$ .  $A_{-1}(a_i^{(-1)})$  est point intérieur à  $V_0$ , donc centre d'un domaine cylindrique  $c$ :  $|z_i - a_i^{(-1)}| < \rho$  tout entier intérieur à  $V_0$  (en effet, il en est ainsi déjà de tout point de  $V_1$ , *a fortiori* de  $V_\omega$ ).

On peut supposer que l'origine ait été transportée au point  $A_{-1}$ , alors

$$\varphi_1(z_1, \dots, z_m) = z_1^{(1)} = a_1 + f_1(z_1, \dots, z_m) \quad f_1(0, \dots, 0) = 0 .$$

Mais en vertu du lemme ci-dessus, si la fonction  $f_1$  n'est pas identiquement nulle,  $z_1^{(1)} - a_1$  balayera le voisinage de l'origine du plan  $z_1$ , c'est-à-dire que le point  $z_1^{(1)}$  balayera le voisinage du point  $a_1$  dans le plan  $z_1$ , lorsque le point  $z_1, \dots, z_m$  décrira un domaine cylindrique  $|z_i| < \rho$ . Le point  $a_1$  serait donc point intérieur à  $R_1$ , d'où contradiction.

Il faut donc que l'on ait:

$$f_1(z_1, \dots, z_m) \equiv 0, \quad \varphi_1(z_1, \dots, z_m) \equiv a_1 .$$

On raisonnait de la même manière à propos des autres fonctions  $\varphi_2, \dots, \varphi_m$ .

*La substitution  $\Phi$  se réduit donc à m constantes et le domaine  $V_n$  à un seul point. Ce point est invariant, et c'est le seul dans  $V_0$ , car tout autre appartiendrait à  $V_n$ .*

Il n'existe qu'un point invariant  $\alpha$

$$z_i = \psi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

dans  $V_0$ .

Le théorème est démontré.

#### § 4. — Critérium de la rapidité de la réduction des ensembles $V_n$ .

Supposons le point invariant à l'origine. Les fonctions  $\psi_i^{(n)}$  convergent uniformément vers 0. Les ensembles  $V_\lambda$  convergent eux aussi vers l'origine, uniformément. Mais puisque tous les domaines  $V_n$  sont emboîtés

$$V_0 > V_1 > V_2 \dots ,$$

les  $V_n$  convergent uniformément vers l'origine, et les fonctions  $\psi_i^{(n)}$  vers zéro.

On voit donc que l'extraction de la suite  $\lambda$  était pratiquement inutile.

Pour un  $N$  assez grand, le domaine  $V_n$  est tout entier intérieur à un domaine cylindrique  $C$ :  $|z_i| < \rho$ , intérieur à  $V_0$ . C est donc renvoyé lui-même à son intérieur par la substitution  $\Psi^{(N)}$ .

On a  $|z_i^{(N)}| < h\rho$ ,  $h < 1$  et les fonctions

$$g_i(\lambda) = \frac{\psi_i^{(N)}(\lambda z_1, \dots, \lambda z_m)}{\lambda}$$

sont holomorphes en  $\lambda$  dans le cercle  $|\lambda| \leq 1$ , car

$$\psi_i^{(N)}(0, \dots, 0) = 0 .$$

Pour  $|\lambda| = 1$ ,  $|f_i(\lambda)| < h\rho$  tant que  $|z_i| < \rho$  de sorte que, le maximum du module d'une fonction holomorphe étant atteint sur le contour, on a  $|f_i(\lambda)| < h\rho$  pour  $|\lambda| \leq 1$ .

D'où

$$|\psi_i^{(N)}(\lambda z_1, \dots, \lambda z_m)| < h\rho |\lambda| , \quad \text{pour} \quad |z_i| < \rho \quad \text{et} \quad |\lambda| \leq 1 .$$

Si les  $z_i$  sont tous tels que  $|z_i| < k\rho$ ,  $k < 1$ , on peut poser

$$z_i = kz'_i \quad \text{avec} \quad |z'_i| < \rho ;$$

ainsi

$$\psi_i^{(N)}(\lambda kz'_i, \dots, \lambda kz'_m) = \psi_i^{(N)}(\lambda z_1, \dots, \lambda z_m) , \quad \text{avec} \quad |z'_i| < \rho .$$

Mais cela revient à poser  $\lambda k = \theta$ ,  $\theta < 1$ ,

$$|\psi_i^{(N)}(\theta z'_i, \dots, \theta z'_m)| < h\rho |\theta| ,$$

donc ici:

$$|\psi_i^{(N)}(z_1, \dots, z_m)| < h\rho k , \quad \text{pour} \quad |z_i| < k\rho .$$

Or les  $z_i^{(N)}$  sont précisément dans ce cas, puisque

$$|z_i^{(N)}| < h\rho , \quad h = k ,$$

d'où

$$|\psi_i^{(N)}(z_1^{(N)}, \dots, z_m^{(N)})| < h^2\rho ,$$

d'où encore

$$|z_i^{2N}| < h^2\rho$$

puis en faisant  $k = h^2$

$$|z_i^{3N}| < h^3\rho .$$

...

...

...

Si  $\theta$  est la racine  $N$ ième arithmétique de  $h$ , on aura:

$$|z_i^{(n)}| < \frac{\theta^n}{h}\rho .$$

On a donc

$$|z_i^{(n)}| < B\theta^n$$

dès que  $n$  est assez grand ( $n > N$ ),  $B$  et  $\theta$  représentent deux nombres positifs dont le second est inférieur à l'unité.

### § 5. — Compléments.

Nous voudrions adjoindre à cette démonstration de l'existence d'un seul point invariant pour une substitution holomorphe une autre démonstration de l'existence d'au moins un point invariant pour une substitution simplement univoque et continue à deux variables.

Dans tout ce qui suit le mot cercle signifiera l'ensemble constitué par une circonference et son intérieur.

1. *Si une transformation univoque et continue sur un cercle rejette la circonference sur le cercle, il existe au moins un point invariant sur le cercle.*

Et d'une manière plus générale:

2. *Tout champ vectoriel continu sur un cercle contient un vecteur nul si les vecteurs attachés aux points de la circonference mordent le cercle, leur longueur étant indifférente, leur extrémité pouvant être hors du cercle.*

En d'autres termes:

2'. *Une répartition univoque et continue de flèches ou de direction attachées à chaque point d'un cercle est impossible si les flèches attachées aux points de la circonference pénètrent dans le cercle. Il y aurait au moins un point sans flèche.*

Nous démontrerons ces deux propositions simultanément; les vecteurs joignent bien entendu un point à son conséquent.

*Faisons l'hypothèse qu'il n'y ait pas de point invariant sur le cercle.*

Plaçons au centre l'origine d'un système  $(x, y)$  d'axes orthogonaux et soit  $1$  le rayon du cercle.

La transformation augmente l'abscisse du point  $(-1,0)$ , diminue celle du point  $(+1,0)$ . Tout arc continu  $L$  joignant ces deux points contiendra donc un point dont l'abscisse ne varie pas.

Soit  $E$  l'ensemble des points d'abscisse invariante, cet ensemble est fermé à cause de la continuité de la transformation. Appelons *points positifs* les points d'abscisse invariante dont l'ordonnée est augmentée par la transformation; *points négatifs*, ceux dont l'ordonnée est diminuée.

Notre hypothèse implique que tout point d'abscisse invariante soit ou bien positif ou bien négatif.

Un point limite de points positifs est positif ne pouvant être négatif à cause de la continuité de la transformation; un point limite de points négatifs est négatif.

*L'ensemble  $E$  des points positifs serait fermé, l'ensemble  $\bar{E}$  des points négatifs le serait aussi.*

Il existe un point positif sur la partie inférieure  $\bar{C}$  ( $y \leq 0$ ) de la circonference; un point négatif sur la partie supérieure  $^+ \bar{C}$  ( $y \geq 0$ ). En effet, chacune est un arc  $L$  et un point de  $E \cdot C$  ne peut être que négatif, un point de  $E \cdot \bar{C}$  ne peut être que positif.

Soit  $\rho$  la borne inférieure des distances d'un point positif et d'un point négatif. Le nombre  $\rho$  existe, c'est le minimum absolu des distances en question, effectivement réalisé par un point positif et un point négatif. Le nombre  $\rho$  est la distance des deux ensembles  $^+ E$  et  $\bar{E}$ .

1<sup>o</sup> Si  $\rho = 0$ , il y a un point qui est à la fois positif et négatif, c'est absurde;

2<sup>o</sup> Si  $\rho \neq 0$ , il faut poursuivre notre analyse pour faire apparaître une nouvelle absurdité.

L'ensemble  $^+ E$  n'a pas de point commun avec l'ensemble  $^+ \bar{C}$ , ni  $\bar{E}$  avec  $^+ \bar{C}$ . Soient  $\sigma$  la distance de  $^+ E$  et de  $^+ \bar{C}$ ;  $\bar{\sigma}$  la distance de  $\bar{E}$  et de  $^+ \bar{C}$ . Soit  $\sigma'$  le plus petit des trois nombres  $\frac{\sigma}{3}, \frac{\bar{\sigma}}{3}, \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{3}$ , il est positif.

Décrivons des cercles de rayon  $\sigma'$  centrés en chaque point positif. Ces cercles recouvrent l'ensemble  $^+ E$ . En vertu du *lemme* de Borel-Lebesgue,  $^+ E$  est recouvert par un nombre fini de ces cercles. Ne considérons plus qu'un nombre fini de tels cercles qui recouvrent tous les points positifs.

Répartissons ces cercles en domaines d'un seul tenant en réunissant en canton positif les cercles qui se recouvrent partiellement ou se touchent simplement. Opérons de la même façon avec les points négatifs.

Il n'y a au total qu'un nombre fini de cantons.

Un canton positif est à une distance d'un canton négatif au moins égale à  $\sigma'$ . Un canton positif et  $^+ \bar{C}$ , un canton négatif et  $\bar{C}$  sont à des distances au moins égales à  $2\sigma'$ . Soit, d'autre part,  $\tau$  le minimum des distances de deux cantons de même nom; c'est un nombre positif puisque nos cantons sont en nombre fini et ne se touchent pas, par définition. Soit enfin  $\delta$  le plus petit des deux nombres  $\sigma'$  et  $\tau$ .

Les cantons positifs sont à distance  $\delta$  au moins de  $\overset{+}{C}$  et de tout autre canton; les cantons négatifs sont à distance  $\delta$  au moins de  $\overset{-}{C}$  et de tout autre canton. Il existe donc, dans le cercle unité, autour de chaque canton, une marge de largeur  $\delta$  qui l'isole des autres. Cette marge permet de contourner les cantons  $\Delta$  que l'axe des  $x$  touche ou traverse par en haut ( $y > 0$ ) s'ils sont positifs, par en bas s'ils sont négatifs.

Il serait donc possible de tracer un arc qui relie les points  $(-1,0)$  et  $(+1,0)$ , formé d'un nombre fini de segments de l'axe des  $x$  qui franchissent les espaces intercantonaux et d'un nombre fini d'arcs de cercles parallèles aux contours des cantons  $\Delta$  qu'on évite à une distance  $\frac{\delta}{2}$ . Cet arc serait rectifiable, sa longueur pourrait servir de paramètre de représentation.

Puisqu'il évite tous les cantons, il ne saurait posséder un point d'abscisse invariante, ces points étant par construction recouverts par les cantons; mais il doit en contenir au moins un comme tout arc  $L$ .

Il y a de nouveau contradiction, il faut rejeter l'hypothèse.

La proposition (1) s'étend au cas d'une aire  $D$  dont on puisse faire la représentation biunivoque et bicontinue sur le cercle unité, c'est-à-dire à l'image topologique d'un cercle.

3<sup>o</sup> *Si le contour de  $D$  est rejeté sur  $D$  il existe un point invariant.*

En effet, soient  $\Psi$  la transformation donnée et  $\Phi$  une fonction de représentation de  $D$  sur le cercle. Si le contour de l'aire est rejeté sur l'aire par  $\Psi$ , la circonférence unité sera rejetée sur le cercle par la transformée univoque et continue  $F = \Phi\Psi\Phi^{-1}$  de  $\Psi$  par  $\Phi$ . Il existera un point invariant de  $F$  sur le cercle. Mais la transformation  $\Phi^{-1}F\Phi$  de  $F$  par  $\Phi^{-1}$  qui n'est autre que  $\Psi$  admettra le point invariant correspondant.

### § 6. — *Remarques au sujet du paragraphe précédent.*

MM. G. D. BIRKHOFF et O. D. KELLOG ont incidemment fait connaître une proposition relative à l'espace à  $n$  dimensions qui est plus générale que notre proposition 1. (*Transactions of the American Mathematical Society*, V. 23, No. 1, January 1922, p. 96-115: *Invariant Points in Function Space*). Mais notre

démonstration est nouvelle à notre connaissance et elle permet de démontrer en même temps la proposition 1 et les propositions 2 et 2'. Elle ne fait pas intervenir les points conséquents eux-mêmes mais seulement la direction: antécédent  $\rightarrow$  conséquent. C'est M. BRUTTIN qui a eu l'heureuse idée de notre démonstration, c'est lui qui a introduit la notion de point d'abscisse invariante. Il est curieux de constater que nos deux méthodes<sup>1</sup> pour établir la proposition A d'une part, 1, 2 et 3 d'autre part, si différentes, diffèrent encore totalement de la méthode que suivent MM. Birkhoff et Kellogg dans l'article rappelé.

M. Birkhoff eut l'obligeance de nous faire remarquer que la proposition 2 se ramène aisément à la proposition 1. D'autre part, M. ERRERA se demandait s'il ne serait pas possible de démontrer ceci:

4<sup>o</sup> *Il existe un point sans direction sur un cercle, si les directions attachées aux points de la circonférence ne coïncident jamais avec le rayon prolongé.*

La réponse est affirmative.

Soient  $\rho$  et  $\varphi$  les coordonnées polaires d'un point P du cercle  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Soit  $\theta$  l'angle de la direction attachée en P avec le rayon vecteur OP prolongé. L'angle  $\theta$  sera compté positivement dans le sens des  $\varphi$  croissants, négativement dans le sens contraire  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Les valeurs  $\theta = -\pi$  et  $\theta = +\pi$  n'en forment qu'une, ainsi que les valeurs  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$ . La répartition étant continue,  $\theta$  est fonction continue et d'ailleurs univoque de  $\rho$  et de  $\varphi$ ;  $\theta = \theta(\rho, \varphi)$ .

L'hypothèse implique que l'angle  $\theta$  soit différent de zéro sur la circonférence, il est donc différent de zéro dans une couronne comprise entre les cercles  $\rho = 1$  et  $\rho = 1 - k^2$ ,  $k^2$  étant convenablement choisi. Dans cette couronne donnons aux vecteurs la nouvelle direction

$$\theta' = \theta + \frac{\pi - |\theta|}{2} \cdot \frac{\rho - (1 - k^2)}{k^2} \times \text{signe de } \theta$$

<sup>1</sup> La proposition A a été annoncée à la réunion de Zermatt de la Société Mathématique Suisse, puis dans les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. 183, p. 178, séance du 19 juillet 1926. Les propositions 1, 2 et 3 ont été données en collaboration avec M. BRUTTIN aux *Comptes Rendus*, t. 183, p. 843, séance du 15 novembre 1926.

en posant, d'autre part,

$$\theta' = \theta \quad \text{si} \quad \rho < 1 - k^2.$$

Cette nouvelle répartition  $\theta' = \theta'(\rho, \phi)$  serait définie, univoque et continue sur tout le cercle et sur la circonférence on aurait  $|\theta'| > \frac{\pi}{2}$ . Mais on sait que cela implique contradiction en vertu de la proposition 2'. Il y a donc un point sans direction  $\theta$ .

\* \* \*

Enfin, MM. VESSIOT et MONTEL ont donné un théorème qui étend la proposition 4 au cas des espaces à  $n$  dimensions.

Ces auteurs sont partis de la démonstration de Poincaré-Bohl fondée sur l'indice de Kronecker. On trouvera leur théorème dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Séance du 20 décembre 1926*, p. 1252, M. Vessiot: *Sur les systèmes d'équations et les transformations continues*.

---

## SUR LES COURBES ADMETTANT UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE MOEBIUS

PAR

E. SCHUBARTH (Bâle).

---

Par un groupe de Moebius, j'entendrai, dans un domaine de multiplicité complexe, un groupe continu de transformations de l'espace euclidien  $E_n$  à  $n$  dimensions qui échangent entre elles les sphères à  $n - 1$  dimensions, à savoir le groupe des homothéties et des inversions. Pour  $n \geq 3$ , ce sont les seules transformations qui conservent les angles. Le groupe de Moebius est simplement isomorphe au groupe des transformations projectives de l'espace  $E_{n+1}$  qui conservent en elle-même une quadrique  $Q_n^2$  parce qu'on peut établir une correspondance entre les points de l'espace  $E_n$  et ceux de la quadrique telle qu'à des