Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE

Autor: Turrière, É.

Kapitel: L'équation $\mu y^2 = x^4 + a $.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

d'un certain argument constant w:

$$\mathfrak{p}2w = \frac{1}{3}(2\gamma^2 + 1)\ , \qquad \mathfrak{p}'2w = -\gamma(1 + \gamma^2)\ ,$$

$$\mathfrak{p}4w = \frac{11\gamma^6 + 20\gamma^4 - 20\gamma^2 - 32}{48(\gamma^2 + 1)^2}\ ,$$

$$\mathfrak{p}\left(w - \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 + 2)\ , \qquad \mathfrak{p}'\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma\ , \qquad \mathfrak{p}''\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma^2\ ,$$

$$\mathfrak{p}\left(w + \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 - 4)\ , \qquad \mathfrak{p}'\left(w + \frac{v}{2}\right) = -\gamma\ , \qquad \mathfrak{p}'' = 2 - \gamma^2\ ,$$

$$\mathfrak{p}\left(w - \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}\ , \qquad \mathfrak{p}' = -\frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 16}{\gamma^3}\ ,$$

$$\mathfrak{p}\left(w + \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 20\gamma^2 + 8}{6(\gamma^2 - 2)^2}\ , \qquad \mathfrak{p}' = \frac{2\gamma^4 - 3\gamma^2 + 8}{(2 - \gamma^2)^3}\ ,$$

$$\mathfrak{p}(2w - v) = -\frac{1}{12}(\gamma^2 + 8)\ , \qquad \mathfrak{p}' = \frac{1}{4}\gamma^3\ ,$$

$$\mathfrak{p}(2w + v) = \frac{-\gamma^4 + 4\gamma^2 + 12}{12\gamma^2}\ , \qquad \mathfrak{p}' = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 8}{4\gamma^3}\ ,$$

$$\mathfrak{p}(4w - 2v) = \frac{11\gamma^8 + 16\gamma^6 + 96\gamma^4 + 768\gamma^2 + 768}{48\gamma^6}\ ,$$

$$\mathfrak{p}\left(3w - \frac{v}{2}\right) = \frac{\gamma^4 + 20\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}\ , \qquad \mathfrak{p}' = \frac{5\gamma^4 + 20\gamma^2 + 16}{\gamma^3}\ .$$

L'ÉQUATION $\mu y^2 = x^4 + a$.

7. — Soient a et μ deux nombres rationnels donnés et soit $(x_0 y_0)$ une solution primitive de l'équation indéterminée

$$\mu y^2 = x^4 + a\ .$$

Cette solution particulière peut être rejetée à l'infini par la transformation homographique

$$x = x_0 + \frac{\mu y_0^2}{X}\ , \qquad y = y_0 . Y\ ,$$

qui transforme l'équation considérée en l'équation suivante de FERMAT:

$$(YX^2)^2 = X^4 + 4x_0^3X^3 + 6\mu x_0^2 y_0^2 X + 4\mu^2 x_0 y_0^4 X + \mu^3 y_0^6\ .$$

Les formules de représentation des solutions au moyen des fonctions elliptiques sont:

$$g_2 = a\mu^2 y_0^4 , \qquad g_3 = 0 ;$$

$$\wp v = - a x_0^2 , \qquad \wp' v = a x_0 (a - x_0^4) ,$$

$$\wp'' v = - \frac{1}{2} a (x_0^8 - 10 a x_0^4 + a^2) ;$$

$$X + x_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} , \qquad Y = \pm \frac{1}{X^2} [\wp(u + v) - \wp u] .$$

8. *Généralisation de l'équation de Diophante.* — Les résultats ci-dessus trouvent leur application immédiate dans la résolution, à partir d'une solution primitive, des équations indéterminées du type

$$\mu y^2 = x^4 + z^4 + t^4 .$$

μ étant un nombre rationnel donné. Par exemple, dans le cas ($\mu = 3$), la solution de

$$3y^2 = x^4 + z^4 + t^4$$

résulte de la connaissance de la solution primitive (1, 1, 1, 1): en prenant donc

$$a = 2 , \quad g_2 = 18 , \quad g_3 = 0 , \quad x_0 = 1 , \quad y_0 = 1 ,$$
$$\wp v = -2 , \quad \wp' v = -2 , \quad \wp'' v = 15 ,$$

la solution $u = v$ donne à la limite:

$$X + 1 = \frac{1}{2} \frac{\wp'' v}{\wp' v} , \qquad X = \frac{11}{4} , \qquad x = \frac{23}{11} ,$$

d'où

$$23^4 + 11^4 + 11^4 = 3 . (3 . 107)^2 ;$$

on aurait ensuite

$$\wp 2v = \left(\frac{17}{4}\right)^2 , \qquad \wp' 2v = - \frac{4879}{32} , \quad \text{etc.} \ldots$$

9. *L'équation* $2y^2 = x^4 + z^4 + t^4$. — Parmi les équations qui viennent d'être traitées d'une manière générale, celle qui correspond au cas $\mu = 2$ *(trouver trois nombres dont la somme des*

bicarrés soit le double d'un carré) est particulièrement intéressante: une solution primitive dépendant d'un paramètre arbitraire est en effet connue. Si trois nombres rationnels algébriques ont leur somme nulle, la somme de leurs bicarrés est toujours le double d'un carré; cela résulte de l'identité algébrique:

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 \equiv 2(x^2 + xy + y^2)^2 \,.$$

Si donc b et c sont deux nombres rationnels quelconques, l'équation

$$2y^2 = x^4 + b^4 + c^4 \,, \qquad (a = b^4 + c^4) \,,$$

admet toujours la solution primitive

$$x_0 = b + c \,, \qquad y_0 = b^2 + bc + c^2 \,,$$

comme le justifient en particulier les égalités:

$$1^4 + 1^4 + 2^4 = 2.3^2 \,,$$
$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 2.7^2 \,, \quad \text{etc.} \ldots$$

Alors:

$$g_2 = 4a(b^2 + bc + c^2)^4(b^4 + c^4) \,, \qquad g_3 = 0 \,,$$
$$\wp v = -(b^4 + c^4)(b + c)^2 \,,$$
$$\wp' v = -2bc(b + c)(b^4 + c^4)(2b^2 + 3bc + 2c^2) \,;$$

la solution limite pour $u = v$ est en particulier:

$$X = -\frac{x_0^8 + 8ax_0^4 - a^2}{2x_0(x_0^4 - a)} \,, \qquad Y = \frac{\wp 2v - \wp v}{X^2} \,.$$

Parmi les solutions simples de cette équation, sont à signaler les suivantes (avec des nombres tels qu'aucun d'eux ne soit somme des deux autres):

$$1^4 + 3^4 + 10^4 = 2.71^2 \,,$$
$$7^4 + 7^4 + 12^4 = 2.113^2 \,,$$
$$23^4 + 46^4 + 121^4 = 2.(10\,467)^2 \,,$$
$$26^4 + 239^4 + 239^4 = 2.(57\,123)^2 \,.$$