Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Autor: Streit, Dr Phil. A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

PAR

A. Streit, Dr Phil. (Berne).

Introduction.

Nous désignerons par a', a'', b', b'', c', c'' les segments déterminés par les hauteurs d'un triangle sur les côtés respectifs a, b, c.

Nous démontrerons d'abord un théorème relatif au rectangle construit sur deux hauteurs, d'où nous déduirons un autre théorème concernant le carré construit sur une hauteur. En utilisant celui-ci, nous obtiendrons une propriété relative à la somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs et une relation se rapportant au carré construit sur un côté. En appliquant cette relation, nous aboutirons à diverses propriétés relatives aux hauteurs et à la somme des carrés construits sur les trois côtés. Enfin, nous établirons des formules nouvelles pour la somme et le produit des trois hauteurs.

1. — Rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque.

De la relation entre les angles α, β, γ d'un triangle (fig. 1)

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ ,$$

on tire

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma ,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a - a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b} .$$

Mais

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} + \frac{a' c''}{bc} .$$

En remplaçant on a

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} - \left[\frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc}\right] ,$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \left[\frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc}\right] .$$

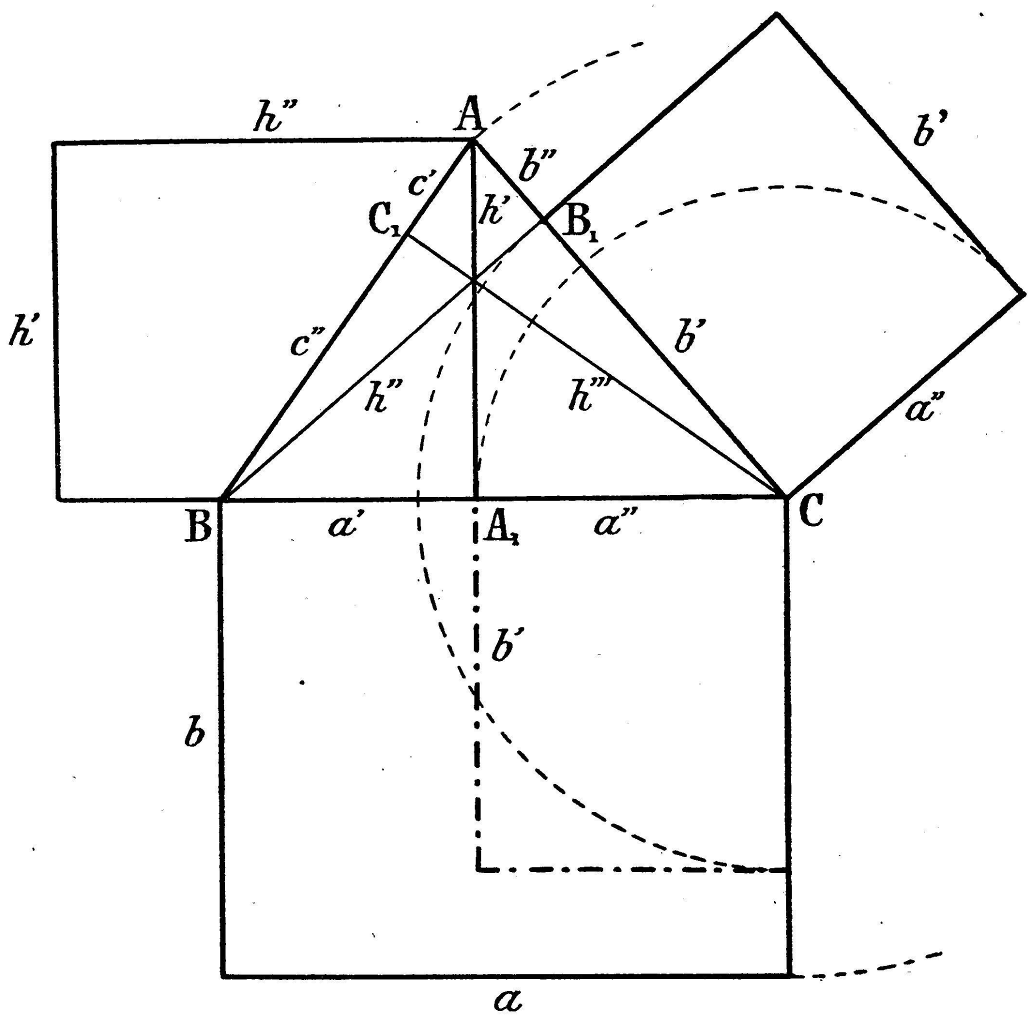

Fig. 1.

Or

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta .$$

Par suite

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc} .$$

Mais

$$\sin\alpha = \frac{h'''}{b} ; \qquad \sin\beta = \frac{h'}{c} ,$$

$$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{h''' . h'}{bc} .$$

On a donc

$$\frac{h'''h'}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} .$$

$$h'''h' = ca - c''a' .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{ \begin{aligned} h'h'' &= ab - a''b' , \\ h''h''' &= bc - b''c' , \\ h'''h' &= ca - c''a' , \end{aligned} \right. \tag{1}$$

c'est-à-dire

Théorème I. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants, diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Remarque. — Ce théorème est valable quels que soient les angles du triangle.

2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

Premier cas. — *Triangle* acutangle (fig. 2).

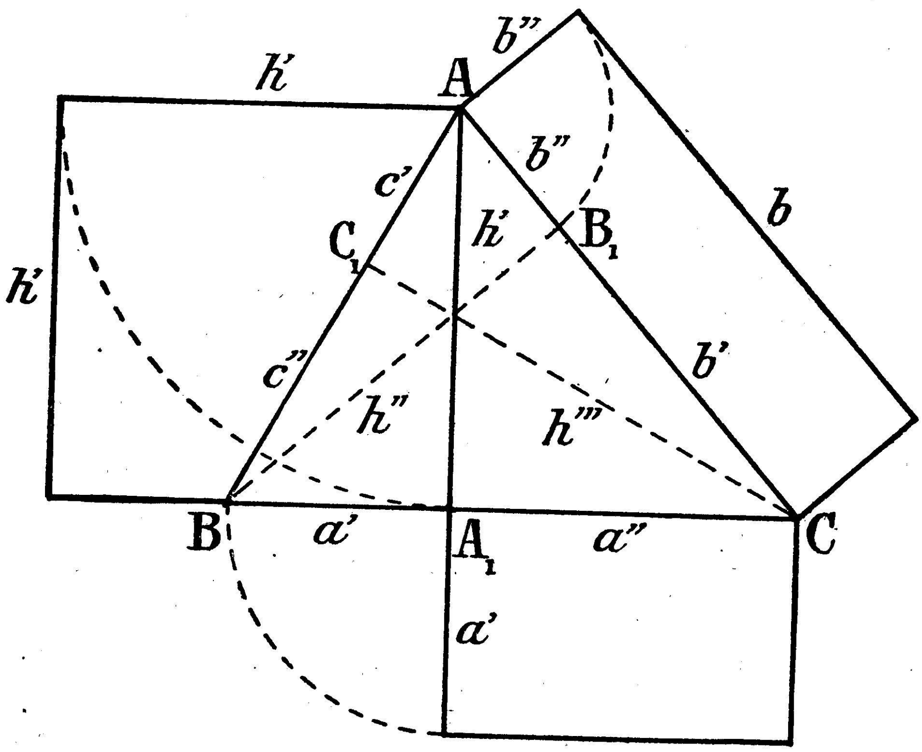

Fig. 2.

Soit ABC un triangle acutangle. D'après la première des formules du groupe (1), nous avons

$$h'h'' = ab - a''b' .$$

Les triangles semblables AA_1C et BB_1C fournissent la relation

$$\frac{h'}{h''} = \frac{a''}{b'} .$$

Multiplions membre à membre

$$h'^2 = \frac{aa''b}{b'} - a''^2 = \frac{aa''(b' + b'')}{b'} - a''^2 ,$$

$$h'^2 = a''(a - a'') + \frac{aa''b''}{b'} .$$

Les quadrilatères ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 étant inscriptibles, le théorème des sécantes donne

$$aa'' = bb' ; \qquad bb'' = cc' ; \qquad cc'' = aa' .$$

Remplaçons aa'' par bb' dans h'^2, puis appliquons la permutation circulaire

$$\left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' + bb'' , \\ h''^2 &= b'b'' + cc'' , \\ h'''^2 &= c'c'' + aa'' , \end{aligned}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' + cc' , \\ h''^2 &= b'b'' + aa' , \\ h'''^2 &= c'c'' + bb' , \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

c'est-à-dire

Théorème II. — *Le carré construit sur une hauteur d'un triangle acutangle est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant augmenté du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui.*

Second cas. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$) (fig. 3).

En appliquant successivement à chacune des formules du groupe (1) le même procédé que dans le premier cas et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit aux résultats ci-dessous

$$\alpha > 90° ,$$

$$\left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - bb'' , \\ h''^2 &= - b'b'' + cc'' , \\ h'''^2 &= - c'c'' + aa'' , \end{aligned}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - cc' , \\ h''^2 &= - b'b'' + aa' , \\ h'''^2 &= - c'c'' + bb' . \end{aligned}\right. \qquad (2')$$

Dans le cas d'un triangle *obtusangle*, le carré construit sur une hauteur est donc équivalent à la *différence* des deux rectangles en question.

Les relations (2) et (2′) peuvent être exprimées par le théorème unique suivant:

THÉORÈME II′. — *Dans un triangle* QUELCONQUE, *le carré construit sur une hauteur est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant augmenté*

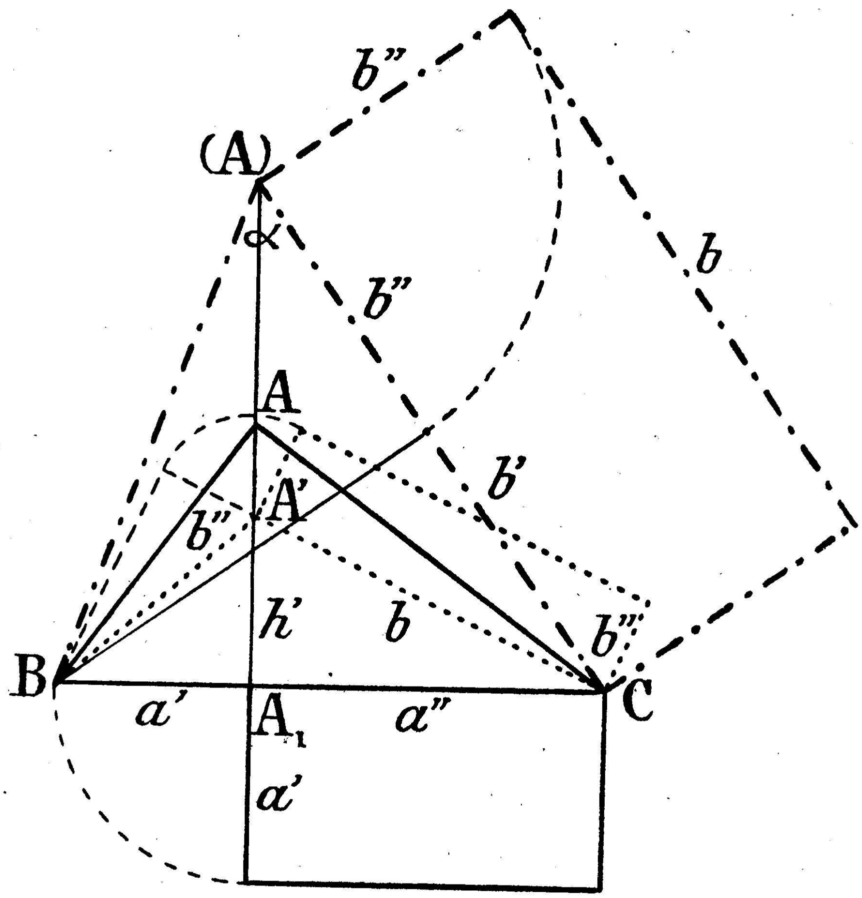

Fig. 3.

ou diminué du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, suivant que les trois angles sont aigus ou que l'angle traversé par la hauteur est obtus. Le carré d'une hauteur ne traversant pas l'angle obtus est égal au second rectangle moins le premier.

Remarque 1. — Si nous convenons d'envisager les segments

$$a' = BA_1\,, \quad a'' = A_1C\,; \quad b' = CB_1\,, \quad b'' = B_1A\,;$$

$$c' = AC_1\,, \quad c'' = C_1B$$

comme *positifs* quand ils sont dirigés dans le sens ABCA et *négatifs* dans le sens contraire ACBA, *les formules* (2) *sont alors valables dans tous les cas*, donc quels que soient les angles du triangle. On constate d'emblée qu'un segment *négatif* est situé en entier sur le prolongement du côté correspondant; un segment qui empiète seulement sur le prolongement du côté est positif.

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 3) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Le carré construit sur la hauteur d'un triangle rectangle est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a''} \ .$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h', que les sommets B et C restent fixes et les segments a' et a'' par conséquent invariables.

1° Si A s'éloigne de a, l'angle α *diminue*, la hauteur h' augmente et l'on a, d'après les formules (2) concernant le triangle *acutangle*

$$\alpha < 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a'' + bb''} \ .$$

Le carré construit sur la hauteur h' a ainsi *augmenté* du rectangle bb''.

2° Si par contre A se rapproche de a, l'angle α *augmente*, la hauteur h' diminue et l'on a, d'après les formules (2′) applicables au triangle *obtusangle* en A

$$\alpha > 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a'' - bb''} \ ,$$

où b'' doit être pris en valeur absolue.

Dans ce cas, le carré construit sur la hauteur h' a *diminué* du rectangle bb''.

D'ailleurs, en faisant tendre α vers 90°, la première des formules (2) (ou (2′)), c'est-à-dire

$$h'^2 = a'a'' \pm bb''$$

devient, puisqu'à la limite $b'' = 0$,

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a''} \ .$$

Nous pouvons donc envisager la relation $h'^2 = a'a'' \pm bb''$ relative à un triangle *acutangle* ou *obtusangle* en A, c'est-à-dire le théorème II', comme étant la *généralisation* du théorème énoncé ci-dessus et relatif à un triangle *rectangle.*

Si l'on tient compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* — c'est-à-dire le théorème II' — peut s'énoncer comme suit:

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur chaque hauteur est équivalent à la somme algébrique du rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant et du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, la surface d'un des rectangles devant être prise négativement si l'un des segments qui deviennent ses dimensions est négatif.*

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 4).

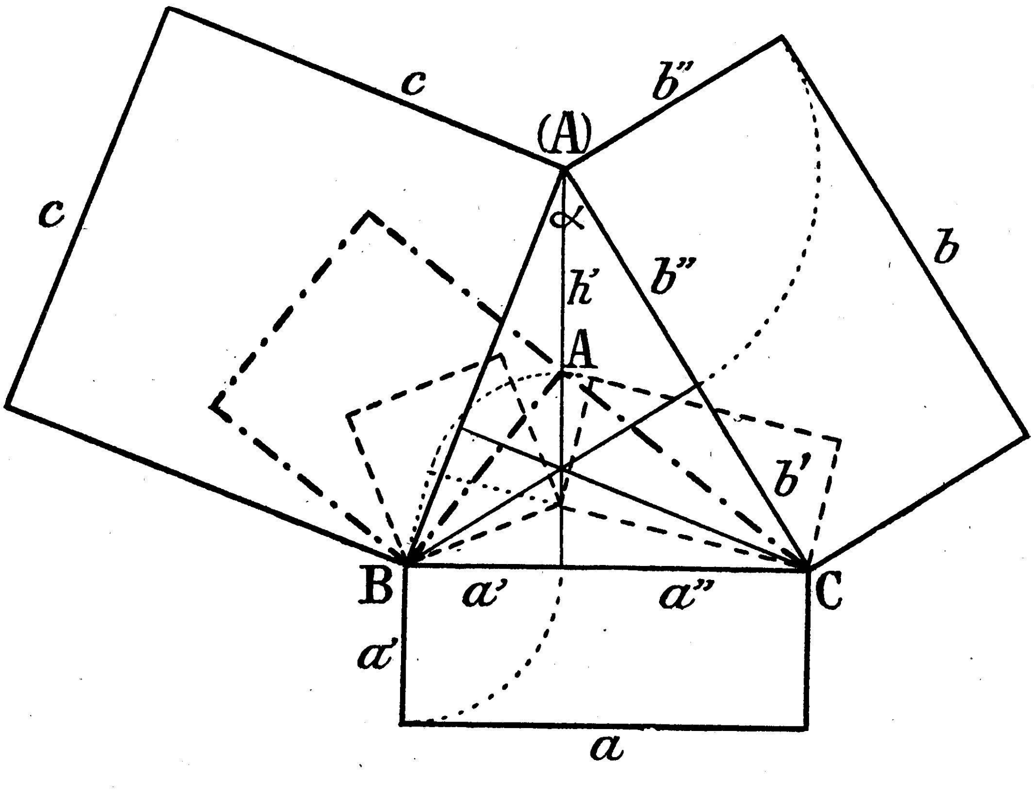

Fig. 4.

Le théorème II donne

$$h'^2 = a'a'' + bb'' .$$

Mais

$$h'^2 = c^2 - a'^2 .$$

Par suite

$$c^2 - a'^2 = a'a'' + bb'' ,$$

d'où

$$c^2 = a'^2 + a'a'' + bb'' =$$
$$= a'(a' + a'') + bb'' .$$
$$c^2 = aa' + bb'' .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{\begin{aligned} a^2 &= bb' + cc'' , \\ b^2 &= cc' + aa'' , \\ c^2 &= aa' + bb'' , \end{aligned}\right. \tag{3}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME III. — *Dans tout triangle* ACUTANGLE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est égal à la somme des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

SECOND CAS. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$) (fig. 4).

En effectuant sur les formules (2′) les mêmes transformations que, dans le premier cas, sur les formules (2) et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit au résultat suivant

$$\alpha > 90° ,$$

$$\left\{\begin{aligned} a^2 &= bb' + cc'' , \\ b^2 &= -cc' + aa'' , \\ c^2 &= aa' - bb'' . \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

Le carré du côté *opposé* à l'angle obtus est donc égal à la *somme* des rectangles, tandis que le carré d'un côté *adjacent* est égal à la *différence* des deux rectangles dont le plus grand correspond au côté opposé à l'angle obtus:

THÉORÈME III′. — *Dans un triangle* OBTUSANGLE, *le carré construit sur un côté est égal à la somme ou à la différence des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui, suivant que ce premier côté est opposé ou adjacent à l'angle obtus.*

Remarque 1. — Si l'on observe la règle des signes des segments (voir 2, remarque 1), c'est-à-dire si l'on considère comme *négatif* un segment situé en entier sur le prolongement du côté, les formules (3) sont alors valables pour un triangle obtusangle comme pour un triangle acutangle, c'est-à-dire pour un triangle *quelconque.*

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 4) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Dans un triangle rectangle, le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse entière et la projection de ce côté sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad c^2 = aa' \ .$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h', a et a' restant invariables.

1° Si A s'éloigne de a, donc si α diminue et devient par conséquent *aigu,* le carré construit sur le côté (c) *augmente du rectangle bb''*, car on a alors, d'après le théorème III relatif au triangle *acutangle,*

$$\alpha < 90^\circ \ , \qquad \underline{c^2 = aa' + bb''} \ .$$

2° Si par contre A se rapproche de a, donc si α augmente et devient par conséquent *obtus*, le carré construit sur le côté (c) *diminue du rectangle bb''*, car on a, dans ce cas, d'après le théorème III′ applicable au triangle *obtusangle* en A,

$$\alpha > 90^\circ \ , \qquad \underline{c^2 = aa' - bb''} \ .$$

D'ailleurs, pour $\alpha = 90^\circ$, la troisième des formules (3)

$$c^2 = aa' + bb''$$

devient précisément, b'' étant nul,

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad c^2 = aa' \ .$$

Le théorème III, ou plus généralement la relation

$$c^2 = aa' \pm bb''$$

relative au triangle acutangle ou obtusangle en A, est donc la GÉNÉRALISATION du théorème ci-dessus relatif au triangle *rectangle.*

En tenant compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III':

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 5).

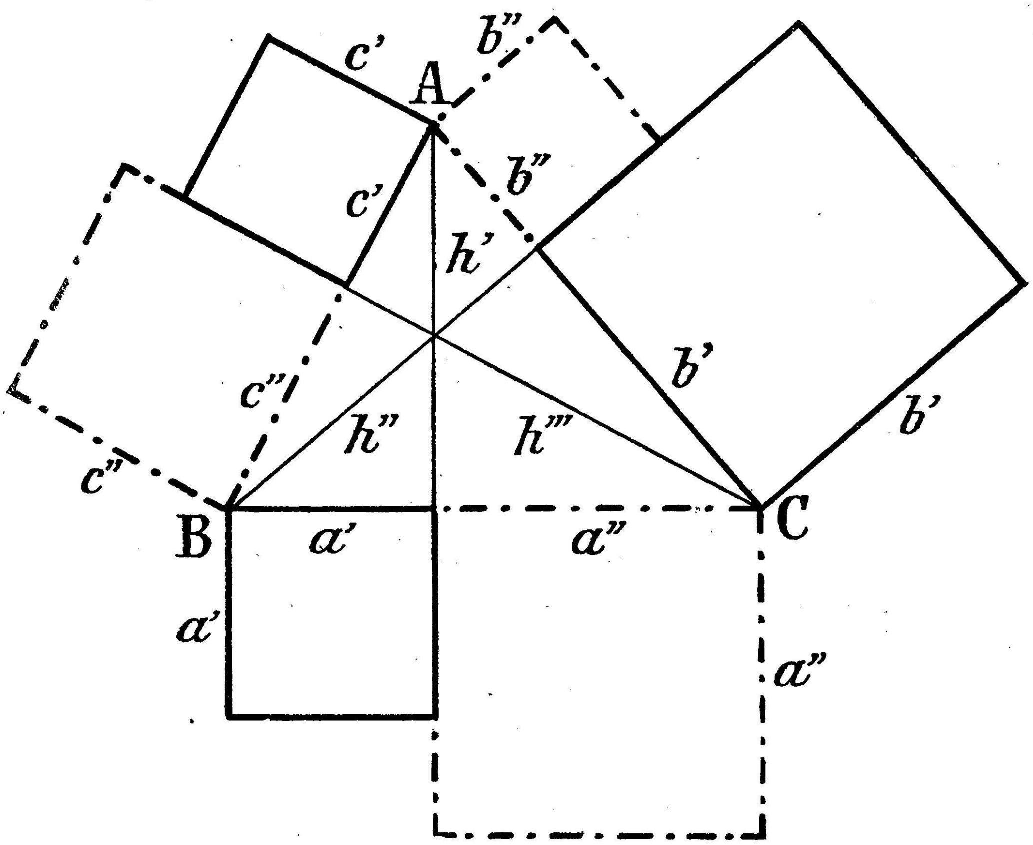

Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2.(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'a'' + c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + aa' = b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + bb' = c'c'' + b'b'' + b'^2 ;$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2.(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 .} \qquad (4)$$

SECOND CAS. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$).

Ici, $a = a' + a''$; $b = b' - b''$; $c = c'' - c'$.

Les formules (2′), première forme, peuvent donc s'écrire

$$h'^2 = a'a'' - bb'' = a'a'' - b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + cc'' = - b'b'' - c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + aa'' = - c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2.(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' - cc' = a'a'' - c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + aa' = - b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + bb' = - c'c'' - b'b'' + b'^2 ,$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 .} \qquad (4)$$

On aboutit donc dans les deux cas au même résultat.

Par suite:

THÉORÈME IV. — *Dans un triangle* QUELCONQUE, *les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés correspondants sont égales.*

CAS PARTICULIER. — Triangle *rectangle.*

Si $\alpha = 90°$, on a: $b' = b$, $b'' = 0$; $c' = 0$, $c'' = c$.

La relation (4) devient

$$a'^2 + b^2 = a''^2 + c^2 \ ,$$

ou

$$b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2 \ , \tag{5}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME V. — *Dans un triangle* RECTANGLE, *la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à la différence des carrés construits sur les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

En nous basant sur le *théorème de Pythagore généralisé*, nous pouvons démontrer le théorème II — d'où nous déduirons le théorème I — puis les théorèmes III et IV. Nous envisagerons le cas du triangle *acutangle.*

1° Pour le *théorème II* (fig. 2):

Appliqué au côté c, le théorème de Pythagore généralisé donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' \ .$$

Or

$$c^2 = h'^2 + a'^2 \ .$$

En remplaçant on a

$$h'^2 + a'^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' \ ,$$

d'où

$$h'^2 = a^2 - a'^2 + b^2 - 2aa'' \ .$$

$$h'^2 = (a' + a'')a - a'^2 + b^2 - 2aa'' =$$

$$= a'(a - a') - aa'' + b^2 \ .$$

Mais

$$aa'' = bb' \ .$$

Par suite

$$h'^2 = a'a'' - bb' + b^2 = a'a'' + b(b - b') \ ,$$

$$\underline{h'^2 = a'a'' + bb''} (= a'a'' + cc')$$

C'est la relation du théorème II.

2° Déduction du *théorème I* du théorème II (fig. 1):

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'(a - a') + \frac{cc''.\,c'}{c''}\ .$$

Mais

$$cc'' = aa'\ .$$

$$h'^2 = aa' - a'^2 + \frac{aa'.\,c'}{c''} = \frac{aa'c''}{c''} + \frac{aa'c'}{c''} - a'^2\ ,$$

$$h'^2 = \frac{aa'.(c'' + c')}{c''} - a'^2 = \frac{aa'c}{c''} - a'^2\ .$$

Or

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{a'}{c''}\ ,$$

d'où, en divisant membre à membre

$$\underline{h' : h''' = ac - a'c''}\ ,$$

ce qui est la relation du théorème I.

3° Pour le *théorème III* (fig. 4):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa''\ ,$$

$$c^2 = a(a' + a'') + b(b' + b'') - 2aa'' =$$
$$= aa' + bb' - aa'' + bb''\ .$$

Mais

$$bb' = aa''\ .$$

Par suite

$$\underline{c^2 = aa' + bb''}(= aa' + cc')\ .$$

C'est la relation du théorème III.

4° Pour le *théorème IV* (fig. 5):

En appliquant le théorème de Pythagore généralisé aux trois côtés, on obtient successivement

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb''\ ,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cc''\ ,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa''\ ,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2aa'' - 2bb'' - 2cc''\ ,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = a(2a'') + b(2b'') + c(2c'')\ ,$$

ou aussi, puisque $aa'' = bb'$, $bb'' = cc'$, $cc'' = aa'$,

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(2a') + b(2b') + c(2c')\ .$$

Ces deux relations signifient que:

La somme des carrés construits sur les côtés d'un triangle est égale à la somme des trois rectangles construits sur chaque côté et le double d'un des segments correspondants, les trois segments devant être non consécutifs.

Chacune des deux relations précédentes conduit au théorème IV. La seconde peut s'écrire

$$(a' + a'')^2 + (b' + b'')^2 + (c' + c'')^2 =$$
$$= 2[(a' + a'')a' + (b' + b'')b' + (c' + c'')c'] ,$$

d'où résulte

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2) = 2[a'^2 + b'^2 + c'^2] .$$

Par suite

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} ,$$

ce qui est la relation du théorème IV.

5° Le *théorème V* peut se démontrer directement comme suit:

On a

$$b^2 = aa'' \quad \text{et} \quad c^2 = aa' ,$$

d'où

$$b^2 - c^2 = a(a'' - a') = (a'' + a')(a'' - a') ,$$

ou

$$\underline{b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2} .$$

6. — Conséquences résultant des formules du groupe (3).

1° Menons les hauteurs h' et h'' issues des sommets A et B d'un triangle ABC et prolongeons-les jusqu'à leurs points d'intersection T et K avec les circonférences décrites sur les côtés opposés BC et AC comme diamètres. Puis dessinons des circonférences avec les extrémités A et B du troisième côté comme centres et leurs distances à ces points K et T comme rayons (fig. 6).

Soit M un point d'intersection de celles-ci. D'après la troisième des formules (3) on a

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$

ou

$$c^2 = \overline{BT}^2 + \overline{AK}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 .$$

Par suite, M *est situé sur la circonférence décrite sur* AB *comme diamètre.*

En outre, soit X le point d'intersection de cette circonférence et de la troisième hauteur h''' situé du même côté de AB que M. Nous avons

$$\overline{AX}^2 = cc' = bb'' .$$

Mais

$$\overline{AM}^2 = \overline{AK}^2 = bb'' .$$

Donc

$$AM = AX .$$

On en conclut que M est confondu avec X.

Nous sommes donc conduits au théorème suivant:

Théorème VI. — *Si l'on décrit des circonférences ayant pour centres les extrémités d'un côté d'un triangle acutangle et pour rayons leurs distances aux points d'intersection des hauteurs qui en partent avec les circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres, ces circonférences se coupent aux points d'intersection de la troisième hauteur et de la circonférence décrite sur le côté opposé comme diamètre.*

Du théorème ci-dessus découle le suivant:

Théorème VII. — *Si sur deux côtés d'un triangle comme diamètres on décrit des circonférences, elles sont coupées par les hauteurs correspondantes en quatre points situés sur une circonférence ayant pour centre le point d'intersection des deux côtés considérés* (fig. 6).

Démonstration. — D'après le théorème qui précède, les circonférences (AK) et (BT) de centres A et B se coupent aux points d'intersection M et P de la circonférence de diamètre AB et de la hauteur correspondante h'''. De même, les circonférences (AK) et (CT) de centres A et C se coupent aux points d'intersection K et Q de la circonférence de diamètre AC et de la hauteur correspondante h''. Les quatre points M, P, K, Q sont donc bien sur une même circonférence de centre A (rayon AK).

Première remarque. — AP et AM sont des tangentes au cercle de rayon BP, car AP est perpendiculaire au rayon BP et AM perpendiculaire au rayon BM de ce cercle. De même, AK et AQ sont des tangentes au cercle de rayon CK. Même remarque concernant les quatre segments respectifs issus de B et de C: B P, par exemple, est tangent au cercle de rayon AP. Les circonférences AK, BP et CT se coupent donc à angle droit.

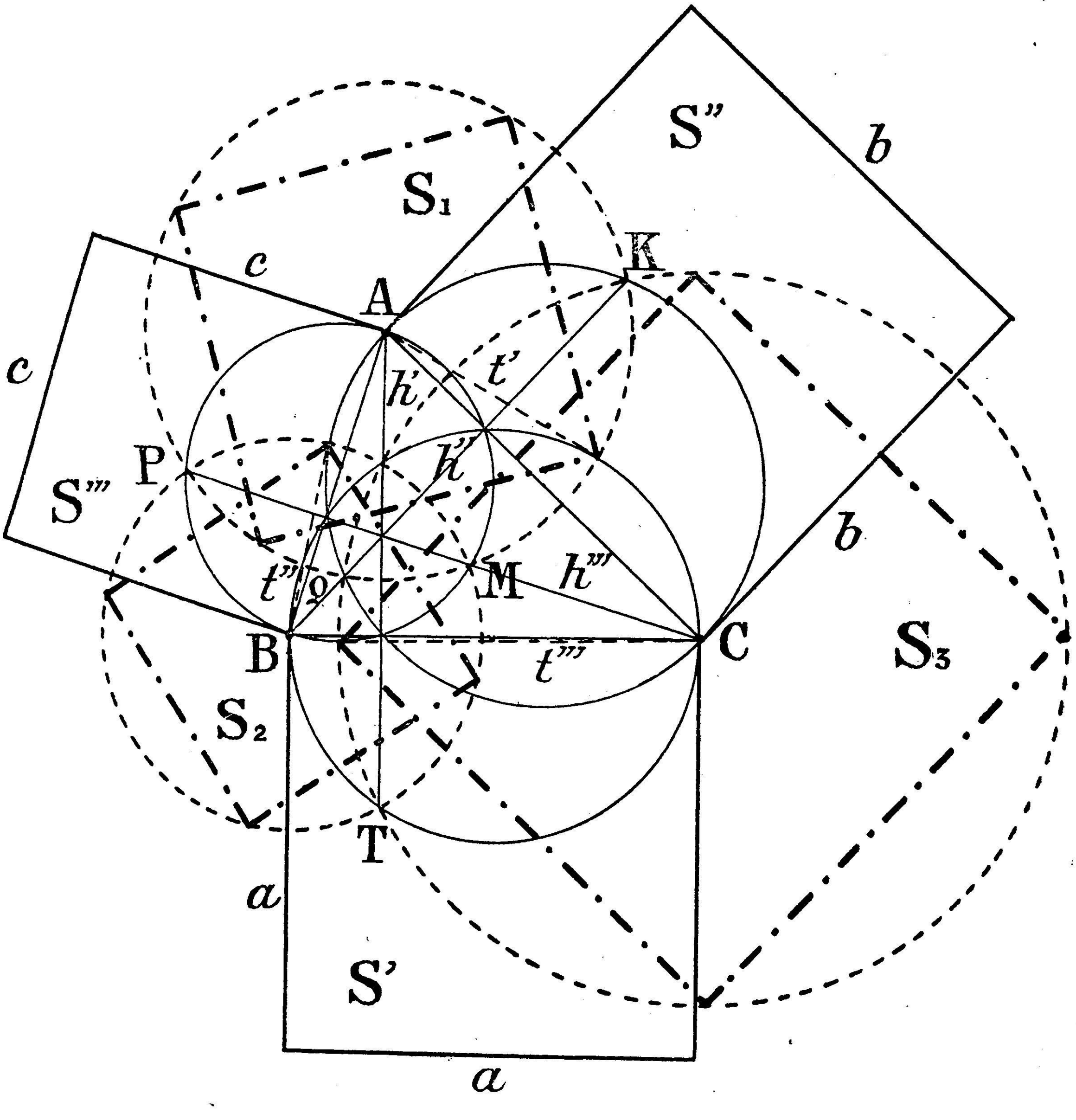

Fig. 6.

Deuxième remarque. — Les trois circonférences de centres A, B, C et de rayons AK, BP, CT auxquelles donne lieu le théorème VII ont pour *centre radical* l'orthocentre du triangle.

En effet, du théorème VI résulte que les cordes communes à ces trois circonférences sont les hauteurs du triangle ABC.

2° Mettons les formules (3) sous une autre forme. Considérons dans ce but un cercle de rayon r; choisissons un point extérieur quelconque P et joignons-le aux extrémités d'un diamètre quelconque A B, puis envisageons le triangle A B P ainsi obtenu (fig. 7).

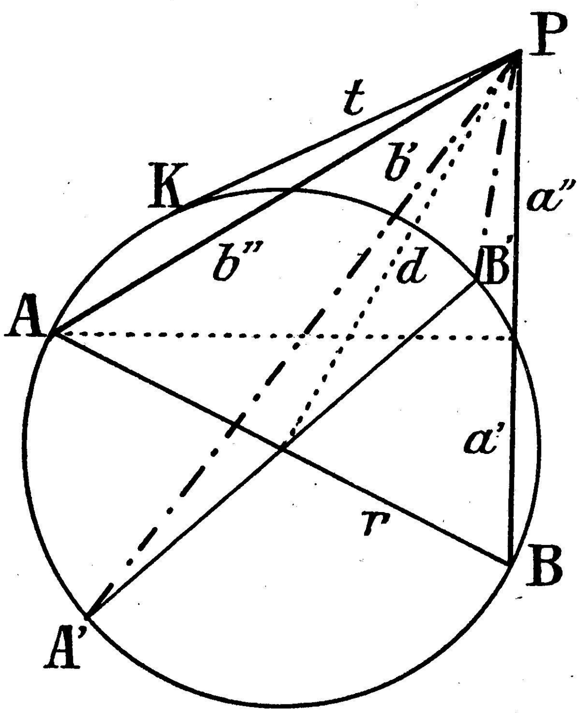

Fig. 7.

Soit BP $= a$, PA $= b$, AB $= c$.

Appliquons le théorème III au côté AB; on a

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$
$$c^2 = a(a - a'') + b(b - b') ,$$

d'où

$$a^2 + b^2 - 2t^2 = 4r^2 ,$$

ou

$$\underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2t^2 = 4r^2} . \qquad (6)$$

Pour le même cercle, la valeur du premier membre est constante, donc indépendante de la position du point extérieur P et de celle du diamètre AB.

a) En désignant par d la distance du point P supposé fixe au centre, on a $t^2 = d^2 - r^2$ et en portant cette valeur dans la relation ci-dessus, elle devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (r\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2})^2 = \text{const}} , \\ \underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2 = \text{const}} , \end{array} \right. \qquad (7)$$

c'est-à-dire (fig. 7)

THÉORÈME VIII. — *Pour le même cercle, la somme des carrés construits sur les distances d'un point extérieur* FIXE *aux extrémités d'un diamètre quelconque est constante et égale à la somme des carrés inscrits dans le cercle donné et le cercle ayant pour rayon la distance du point au centre du cercle donné.*

b) En supposant d constant ($= R$), c'est-à-dire le point P mobile sur un cercle concentrique au cercle donné, on obtient (fig. 8)

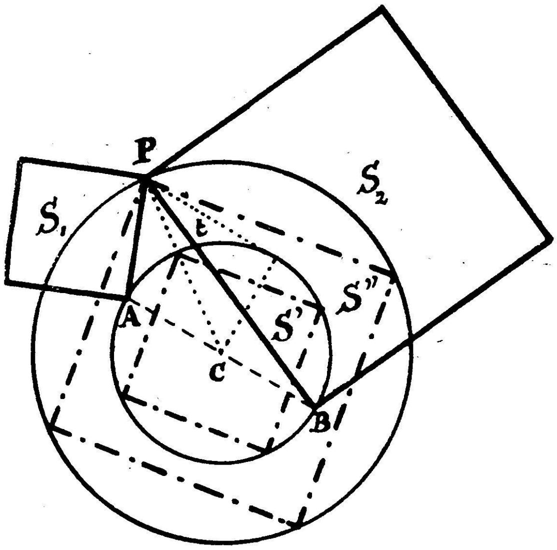

Fig. 8.

ou

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (r\sqrt{2})^2 + (R\sqrt{2})^2 = \text{const} , \\ \underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{P'A'}^2 + \overline{P'B'}^2 = \text{const}} \end{array}\right. \tag{7'}$$

pour tous les points P, P′, ... sur la circonférence R et tous les diamètres AB, A′B′, ... du cercle r; c'est-à-dire

THÉORÈME VIII′. — *La somme des carrés construits sur les distances d'un point quelconque d'un cercle aux extrémités d'un diamètre quelconque d'un cercle intérieur concentrique est constante et égale à la somme des carrés inscrits dans les deux cercles* (fig. 8):

$$S_1 + S_2 = S' + S'' .$$

3° Soit ABC un triangle acutangle. Décrivons une circonférence sur chaque côté comme diamètre et menons-lui une tangente du sommet opposé; appelons a, b, c les côtés du triangle, r', r'', r''' les rayons des circonférences correspondantes et t', t'', t''' les longueurs des tangentes en question (fig. 6).

D'après la relation (6), on a successivement, en envisageant d'abord le cercle de diamètre AB et le point extérieur C, puis le cercle de diamètre BC et le point extérieur A, et enfin le cercle de diamètre CA et le point extérieur B:

$$a^2 + b^2 - 2t'''^2 = 4r'''^2 = c^2 ,$$
$$b^2 + c^2 - 2t'^2 = 4r'^2 = a^2 ,$$
$$c^2 + a^2 - 2t''^2 = 4r''^2 = b^2 ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 = (t'\sqrt{2})^2 + (t''\sqrt{2})^2 + (t'''\sqrt{2})^2} , \qquad (8)$$

ou

$$\underline{S' + S'' + S''' = S_1 + S_2 + S_3} ,$$

c'est-à-dire

Théorème IX. — *La somme des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle acutangle est équivalente à la somme des carrés inscrits dans les trois cercles ayant pour centres les sommets du triangle et pour rayons respectifs les tangentes menées de ces sommets aux circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres.*

Or le cercle de centre A et de rayon t', par exemple, n'est autre que le cercle de centre A et de rayon AK. En effet, le triangle AKC étant inscrit dans une demi-circonférence, l'angle en K est droit et l'on a

$$\overline{AK}^2 = bb'' .$$

D'autre part, d'après le théorème des sécantes

$$t'^2 = bb'' .$$

Par suite

$$AK \text{ (ou AP)} = t' .$$

De même

$$BP \text{ (ou BT)} = t'' ,$$

et

$$CT \text{ (ou CK)} = t''' .$$

C'est donc dans les cercles de centres A, B, C *et de rayons respectifs* AK, BP, CT *que doivent être inscrits les trois carrés dont il est question dans le théorème ci-dessus* (AK, par exemple, désignant la distance du sommet A à l'un des points d'intersection K d'une des hauteurs non correspondantes avec la circonférence décrite sur le côté opposé à celle-ci comme diamètre).

Les cercles de centres A, B, C et de rayons AK, BP et CT coupent respectivement à angle droit les cercles décrits sur les côtés opposés a, b, c comme diamètres.

7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

a) Segments supérieurs (fig. 9).

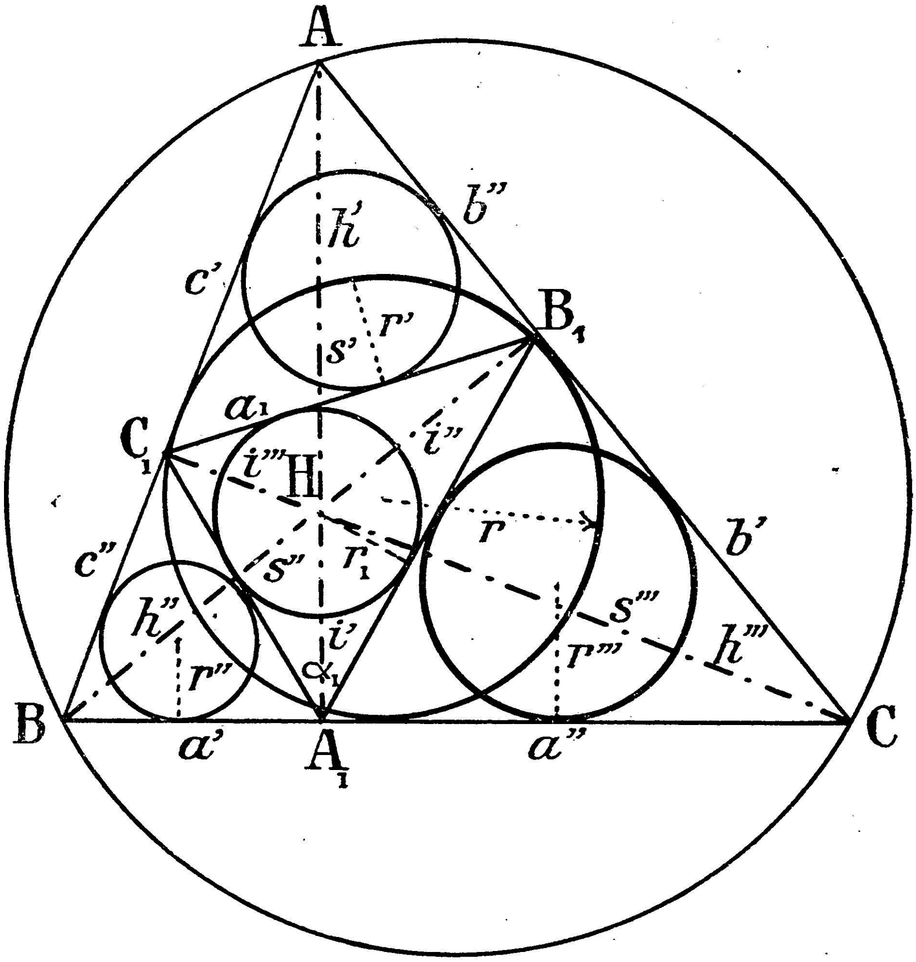

Fig. 9.

$$s' = \frac{b''}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\ .$$

$$\left\{\begin{aligned} s' &= 2R\cos\alpha\ , \\ s'' &= 2R\cos\beta\ , \\ s''' &= 2R\cos\gamma\ . \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

$$s' + s'' + s''' = 2R[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma]\ .$$

Des formules

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1 ,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R} ,$$

résulte

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R} . \qquad (10)$$

Par suite

$$\underline{s' + s'' + s''' = 2(r+R)} , \qquad (11)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME X. — *La somme des segments supérieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.*

b) SEGMENTS INFÉRIEURS (fig. 9).

$$i' = BH.\cos\gamma = s''\cos\gamma = (2R\cos\beta)\cos\gamma .$$

$$\left\{\begin{aligned} i' &= 2R\cos\beta\cos\gamma , \\ i'' &= 2R\cos\gamma\cos\alpha , \\ i''' &= 2R\cos\alpha\cos\beta . \end{aligned}\right. \qquad (12)$$

$$i' + i'' + i''' = 2R[\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha] . \qquad (13)$$

Or la parenthèse peut s'exprimer en fonction des rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs. D'après (10), on a

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R} ,$$

d'où, en élevant au carré,

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2[\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha] =$$
$$= \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2} .$$

De la relation des cosinus , on tire

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma .$$

Or

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2R} . \qquad (14)$$

En effet (fig. 9),

$$r_1 = i' \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) ;$$

$$i' = a' \operatorname{tg}(90 - \gamma) = c . \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma ;$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha .$$

Donc

$$r_1 = c \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma \cos\alpha = \frac{c}{\sin\gamma} \cos\beta \cos\gamma \cos\alpha ,$$

$$r_1 = 2R(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) ,$$

d'où

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r_1}{2R} .$$

Par suite

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{R - r_1}{R} . \tag{15}$$

Remplaçons ci-dessus

$$\frac{R - r_1}{R} + 2[\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha] = \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2} ,$$

d'où l'on tire

$$[\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha] = \frac{r^2 + 2rR + r_1 R}{2R^2} . \tag{16}$$

En portant cette valeur dans la relation (13), on obtient

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + \left(r + \frac{r^2}{R}\right)} . \tag{17}$$

L'expression entre parenthèses peut s'exprimer en fonction des rayons r', r'', r''' des cercles inscrits dans les triangles aux sommets AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Ces triangles étant semblables au triangle donné ABC, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha .$$

$$r' = r\cos\alpha , \quad r'' = r\cos\beta , \quad r''' = r\cos\gamma .$$

$$r' + r'' + r''' = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ,$$

ou, en vertu de (10)

$$r' + r'' + r''' = \left(\frac{r^2}{R} + r\right) . \tag{18}$$

La relation (17) devient donc

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + r' + r'' + r'''} \,, \tag{19}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME XI. — *La somme des segments inférieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrits dans le triangle donné, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.*

c) SOMME DES HAUTEURS.

Première expression. — En additionnant les relations (11) et (17) membre à membre, on obtient

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 4r + r_1 + \frac{r^2}{R}} \,, \tag{20}$$

relation exprimant la somme des hauteurs en fonction des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

Deuxième expression. — En additionnant les relations (11) et (19) membre à membre, on obtient pour la somme des hauteurs

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 3r + r_1 + r' + r'' + r'''} \,. \tag{21}$$

Cette formule exprime la *somme des hauteurs* d'un triangle en fonction du rayon du cercle circonscrit et des rayons des cercles inscrits dans le triangle considéré, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.

La somme des hauteurs est donc une *fonction entière* (très simple) de ces différents rayons.

Remarque. — De (9) et (12) résulte

$$s' . s'' . s''' = 8R^3(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) \,,$$

et

$$i' . i'' . i''' = 8R^3(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)^2 \,.$$

Mais (14)

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r_1}{2R} \,.$$

Par suite

$$\underline{s' . s'' . s''' = r_1 . D^2} \,, \qquad \text{où} \quad D = 2R \,, \tag{22}$$

$$\underline{i' . i'' . i''' = r_1^2 . D} \,, \tag{23}$$

$$\underline{s' . s'' . s''' . i' . i'' . i''' = r_1^3 . D^3} \,, \tag{24}$$

$$\underline{\frac{i' . i'' . i'''}{s' . s'' . s'''} = \frac{s' . s'' . s'''}{(2R)^3}} \,. \tag{25}$$

8. — Produit des hauteurs.

$$h' . h'' . h''' = (b \sin \gamma)(c \sin \alpha)(a \sin \beta) .$$

Mais

$$a\,b\,c = 4RS \qquad \text{et} \qquad \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{S}{2R^2} .$$

Donc

$$h' . h'' . h''' = \frac{2S^2}{R} . \tag{26}$$

Or, en désignant les côtés du triangle des pieds des hauteurs par a_1, b_1, c_1 et son périmètre par u_1, on trouve facilement

$$a_1 = R \sin (2\alpha) , \qquad b_1 = R \sin (2\beta) , \qquad c_1 = R \sin (2\gamma) .$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = R . [\sin (2\alpha) + \sin (2\beta) + \sin (2\gamma)] .$$

$$\sin (2\alpha) + \sin (2\beta) + \sin (2\gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma .$$

Par suite

$$u_1 = R . [4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma] = 4R . \frac{S}{2R^2} ,$$

$$\underline{u_1 = \frac{2S}{R}} . \tag{27}$$

En tenant compte de la formule (27), la relation (26) devient

$$\underline{h' . h'' . h''' = S . u_1} , \tag{28}$$

c'est-à-dire

Le produit des hauteurs d'un triangle est égal à la surface du triangle multipliée par le périmètre du triangle des pieds des hauteurs.