Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE

Autor: Turrière, É.

Kapitel: Sur certains triangles arithmogéométriques.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

Si donc nous posons toujours

$$\wp'^2 u = 4\wp u(\wp^2 u - g_2) ,$$

avec la valeur spécifiée ci-dessus de l'invariant g_2 en fonction entière de t^4, les formules de correspondance avec le problème de DIOPHANTE sont maintenant:

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u} , \qquad U = x^2 - 2\wp u ,$$

$$y = 1 - t^2 , \qquad z = 1 + t^2 .$$

Parmi les solutions, celle de DIOPHANTE est

$$x = \frac{1 - t^4}{2t} , \qquad U = \frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} - (1 - t^2)^2 .$$

La solution correspondante de l'équation de la fonction de WEIERSTRASS est:

$$\wp u = -2t^2 , \qquad \wp' u = \pm 2t(t^4 - 1) ,$$

$$\wp(u + \omega_2) = \frac{g_2}{8t^2} , \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm \frac{g_2(1 + t^2)}{8t^3} ,$$

$$\sqrt{\wp 2u} = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{4t(t^4 - 1)} ,$$

$$\wp' 2u = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{32t^3(t^4 - 1)^3}(t^{16} - 36t^{12} - 186t^8 - 36t^4 + 1) ;$$

à remarquer la présence du facteur octaédrique $t^8 + 14t^4 + 1$.

Pour $t = 2$, ces formules donnent $g_2 = 706 = 2 \times 353$,

$$\wp u = -8 , \qquad \wp' u = 60 ,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{120}\right)^2 , \qquad \wp' 2u = \frac{130\,111 \times 481}{2^8.3^3.5^3} .$$

d'où la solution $x = \dfrac{130\,111}{2^3.3.5.481}$, $y = 3$, $z = 5$ antérieurement donnée.

SUR CERTAINS TRIANGLES ARITHMOGÉOMÉTRIQUES.

6. — La question précédente pose la recherche des *triangles tels que la somme des quatrièmes puissances de deux de leurs côtés*

et de la hauteur issue du sommet qu'ils définissent soit un carré parfait.

Tout arithmotriangle pythagorique est de cette nature. Il en est de même de tout *arithmotriangle héronien tel que les deux bissectrices intérieure et extérieure issues d'un même sommet soient égales.* Ces triangles, définis par la condition $C - B = \frac{\pi}{2}$, se construisent simplement au moyen des triangles rectangles. Ils peuvent être arithmogéométriquement représentés par les formules:

$$A = \frac{\pi}{2} - 2\theta, \qquad a = \cos 2\theta,$$

$$B = \theta, \qquad b = \sin\theta,$$

$$C = \frac{\pi}{2} + 2\theta, \qquad c = \cos\theta.$$

$$2R = 1, \qquad S = \frac{1}{8}\sin 4\theta;$$

de même que pour les triangles pythagoriques, cette surface S ne saurait être mesurée par un nombre carré parfait. Les deux bissectrices des angles en A ont pour longueur commune $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta$. Les bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet B ont pour longueurs respectives

$$\frac{\cos\theta.\cos 2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\theta.\cos 2\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta};$$

elles peuvent être mesurées rationnellement (pour $\operatorname{tang}\frac{1}{4}\theta$ rationnel). En aucun cas, il ne peut en être de même des bissectrices égales issues de A ni de celles des angles en C.

La solution du problème arithmogéométrique posé est difficile; mais son étude met en évidence une équation intéressante. En exprimant que $b^4 + c^4 + h_a^4 = \square$, on obtient en effet l'équation de Fermat:

$$x^4 + 2\frac{\cos 2A}{\sin^2 A}x^2 + 4.\operatorname{cotg} A.x + 1 = y^2.$$

ou encore

$$(x^2 - 1)^2 + 2x \operatorname{cotg} A(x \operatorname{cotg} A + 2) = y^2,$$

où $x = \frac{h_a}{a}$. Cette équation admet les solutions évidentes

$$x = 0 \ , \quad \infty \ , \quad -2 \operatorname{tang} A \ , \quad \frac{2 \operatorname{cotg} A}{2 - \operatorname{cotg}^2 A} \ , \quad \frac{1}{4} \operatorname{cotg} A (\operatorname{cotg}^2 A - 2) \ ,$$

quelle que soit la valeur rationnelle de tang A. En outre elle est satisfaite identiquement pour $A = \frac{\pi}{2}$ (c'est le cas des triangles rectangles); pour $B - C = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} A$ est solution (triangle à bissectrices égales, issues de A).

En posant cotg $A = \gamma$, l'équation devient

$$y^2 = (x^2 - 1)^2 + 2\gamma x(\gamma x + 2) \ ;$$

elle permet d'étudier les triangles jouissant de la propriété indiquée que $b^4 + c^4 + h_a^4$ est le carré d'un nombre rationnel, pour des valeurs rationnelles de $\frac{h_a}{a}$ et de tang A. Les formules de réduction aux fonctions elliptiques sont:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \ , \qquad \pm y = \wp(u + v) - \wp u = x^2 + \beta - 2\wp u \ ,$$

$$\beta = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 1) \ ,$$

$$g_2 = 1 + 3\beta^2 \qquad\qquad = \frac{1}{3}(\gamma^4 - 2\gamma^2 + 4) > 0 \ ,$$

$$g_3 = -(1 + 2\beta + \beta^3) = -\frac{1}{27}(\gamma^6 - 3\gamma^4 + 21\gamma^2 + 8) < 0 \ ,$$

$$\Delta = -\gamma^2(\gamma^6 - 2\gamma^4 + 11\gamma^2 + 16) < 0 \ ;$$

v étant un argument constant défini par les équations concordantes:

$$\wp v = -\beta \ , \qquad \wp' v = \gamma \ , \qquad \wp'' v = \frac{1}{2}\gamma^2(\gamma^2 - 2) \ ,$$

$$\wp 2v = \frac{1}{48}(3\gamma^6 - 12\gamma^4 + 44\gamma^2 - 32) \ ,$$

$$\wp' 2v = -\frac{1}{32}\gamma(\gamma^8 - 6\gamma^6 + 28\gamma^4 - 56\gamma^2 + 64) \ ,$$

on obtient les solutions suivantes, relativement simples pour ce genre de questions, et qui peuvent être exprimées au moyen d'un certain argument constant w:

$$\mathfrak{p}2w = \frac{1}{3}(2\gamma^2 + 1)\,, \qquad \mathfrak{p}'2w = -\gamma(1+\gamma^2)\,,$$

$$\mathfrak{p}4w = \frac{11\gamma^6 + 20\gamma^4 - 20\gamma^2 - 32}{48(\gamma^2+1)^2}\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w - \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2+2)\,, \qquad \mathfrak{p}'\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma\,, \qquad \mathfrak{p}''\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma^2\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w + \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2-4)\,, \qquad \mathfrak{p}'\left(w + \frac{v}{2}\right) = -\gamma\,, \qquad \mathfrak{p}'' = 2 - \gamma^2\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w - \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = -\frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 16}{\gamma^3}\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w + \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 20\gamma^2 + 8}{6(\gamma^2-2)^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{2\gamma^4 - 3\gamma^2 + 8}{(2-\gamma^2)^3}\,,$$

$$\mathfrak{p}(2w - v) = -\frac{1}{12}(\gamma^2+8)\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{1}{4}\gamma^3\,,$$

$$\mathfrak{p}(2w + v) = \frac{-\gamma^4 + 4\gamma^2 + 12}{12\gamma^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 8}{4\gamma^3}\,,$$

$$\mathfrak{p}(4w - 2v) = \frac{11\gamma^8 + 16\gamma^6 + 96\gamma^4 + 768\gamma^2 + 768}{48\gamma^6}\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(3w - \frac{v}{2}\right) = \frac{\gamma^4 + 20\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{5\gamma^4 + 20\gamma^2 + 16}{\gamma^3}\,.$$

L'ÉQUATION $\mu y^2 = x^4 + a$.

7. — Soient a et μ deux nombres rationnels donnés et soit $(x_0 y_0)$ une solution primitive de l'équation indéterminée

$$\mu y^2 = x^4 + a\,.$$

Cette solution particulière peut être rejetée à l'infini par la transformation homographique

$$x = x_0 + \frac{\mu y_0^2}{X}\,, \qquad y = y_0 . Y\,,$$

qui transforme l'équation considérée en l'équation suivante de FERMAT:

$$(YX^2)^2 = X^4 + 4x_0^3X^3 + 6\mu x_0^2 y_0^2 X + 4\mu^2 x_0 y_0^4 X + \mu^3 y_0^6\,.$$