Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE
Autor: Turrière, É.
Kapitel: Formules pour $ g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1) $, $ g_3 = 0 $.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

En prenant maintenant r de la forme spéciale $r = \sin\theta\cos\theta$ (avec $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ rationnel), l'invariant g_2 est précisément égal à $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ et les formules précédentes s'appliquent au premier cas qui se pose dans l'étude générale du problème de Diophante, sous le point de vue même qui a été exposé sur des exemples numériques.

Ce même type d'équation, mais avec l'hypothèse $r = \frac{1}{2}$, contient la solution d'un problème célèbre. Ce cas ne rentre pas dans celui des équations associées au problème de DIOPHANTE, car la relation $2\sin\theta\cos\theta = 1$ exprime que l'aire de l'arithmotriangle pythagorique est carré parfait, ce qui est impossible (FERMAT). Mais alors l'équation avec $g_2 = \frac{1}{2}$, $g_3 = 0$, n'est autre que celle des *triangles pythagoriques dont l'hypoténuse est carré parfait, ainsi que la somme ou la différence des côtés de l'angle droit* et des diverses équations indéterminées qui ont été rattachées par EULER, LAGRANGE, etc., à ce problème (voir *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli*, dans l'*Enseignement mathématique* de juin 1919, t. XX, p. 245-268) [1].

FORMULES POUR $g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)$, $g_3 = 0$.

5. — Un second cas à traiter est celui où g_2 est égal à

$$g_2 = \sin^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta \qquad \text{ou} \qquad \cos^4\theta + \sin^4\cos^4\theta\ ;$$

par une transformation immédiate, il est réductible à

$$g_2 = 1 + \cos^4\theta \qquad \text{ou} \qquad 1 + \sin^4\theta\ .$$

Nous prendrons:

$$g_2 = (1 - t^2)^4 + (1 + t^2)^4 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)\ ,$$

t est un nombre rationnel arbitraire; $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$. Les fonctions $\wp u$ et $\wp' u$ ont été multipliées par les facteurs

$$\frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{(1 + t^2)^6}{8t^3}\ .$$

[1] Je profite de l'occasion pour signaler que, sur la même question et en même temps que mon travail, paraissait un mémoire de M. Michele CIPOLLA: *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*, dans les *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, V^{me} série, vol. XI, mémoire XI, 1° maggio 1919.

Si donc nous posons toujours

$$\wp'^2 u = 4\wp u(\wp^2 u - g_2) \ ,$$

avec la valeur spécifiée ci-dessus de l'invariant g_2 en fonction entière de t^4, les formules de correspondance avec le problème de DIOPHANTE sont maintenant:

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u} \ , \qquad U = x^2 - 2\wp u \ ,$$

$$y = 1 - t^2 \ , \qquad z = 1 + t^2 \ .$$

Parmi les solutions, celle de DIOPHANTE est

$$x = \frac{1 - t^4}{2t} \ , \qquad U = \frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} - (1 - t^2)^2 \ .$$

La solution correspondante de l'équation de la fonction de WEIERSTRASS est:

$$\wp u = -2t^2 \ , \qquad \wp' u = \pm 2t(t^4 - 1) \ ,$$

$$\wp(u + \omega_2) = \frac{g_2}{8t^2} \ , \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm \frac{g_2(1 + t^2)}{8t^3} \ ,$$

$$\sqrt{\wp 2u} = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{4t(t^4 - 1)} \ ,$$

$$\wp' 2u = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{32t^3(t^4 - 1)^3}(t^{16} - 36t^{12} - 186t^8 - 36t^4 + 1) \ ;$$

à remarquer la présence du facteur octaédrique $t^8 + 14t^4 + 1$.

Pour $t = 2$, ces formules donnent $g_2 = 706 = 2 \times 353$,

$$\wp u = -8 \ , \qquad \wp' u = 60 \ ,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{120}\right)^2 , \qquad \wp' 2u = \frac{130\,111 \times 481}{2^8 . 3^3 . 5^3} \ .$$

d'où la solution $x = \dfrac{130\,111}{2^3 . 3 . 5 . 481}$, $y = 3$, $z = 5$ antérieurement donnée.

SUR CERTAINS TRIANGLES ARITHMOGÉOMÉTRIQUES.

6. — La question précédente pose la recherche des *triangles tels que la somme des quatrièmes puissances de deux de leurs côtés*