Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE
Autor: Turrière, É.
Kapitel: Formules pour $ g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1) $, $ g_3 = 0 $.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En prenant maintenant r de la forme spéciale $r = \sin\theta\cos\theta$ (avec $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ rationnel), l'invariant g_2 est précisément égal à $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ et les formules précédentes s'appliquent au premier cas qui se pose dans l'étude générale du problème de Diophante, sous le point de vue même qui a été exposé sur des exemples numériques.

Ce même type d'équation, mais avec l'hypothèse $r = \frac{1}{2}$, contient la solution d'un problème célèbre. Ce cas ne rentre pas dans celui des équations associées au problème de Diophante, car la relation $2\sin\theta\cos\theta = 1$ exprime que l'aire de l'arithmotriangle pythagorique est carré parfait, ce qui est impossible (Fermat). Mais alors l'équation avec $g_2 = \frac{1}{2}$, $g_3 = 0$, n'est autre que celle des *triangles pythagoriques dont l'hypoténuse est carré parfait, ainsi que la somme ou la différence des côtés de l'angle droit* et des diverses équations indéterminées qui ont été rattachées par Euler, Lagrange, etc., à ce problème (voir *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli*, dans l'*Enseignement mathématique* de juin 1919, t. XX, p. 245-268) [1].

Formules pour $g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)$, $g_3 = 0$.

5. — Un second cas à traiter est celui où g_2 est égal à

$$g_2 = \sin^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta \quad \text{ou} \quad \cos^4\theta + \sin^4\cos^4\theta\ ;$$

par une transformation immédiate, il est réductible à

$$g_2 = 1 + \cos^4\theta \quad \text{ou} \quad 1 + \sin^4\theta\ .$$

Nous prendrons:

$$g_2 = (1 - t^2)^4 + (1 + t^2)^4 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)\ ,$$

t est un nombre rationnel arbitraire; $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$. Les fonctions $\wp u$ et $\wp' u$ ont été multipliées par les facteurs

$$\frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} \quad \text{et} \quad \frac{(1 + t^2)^6}{8t^3}\ .$$

[1] Je profite de l'occasion pour signaler que, sur la même question et en même temps que mon travail, paraissait un mémoire de M. Michele Cipolla: *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*, dans les *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, Vme série, vol. XI, mémoire XI, 1° maggio 1919.

Si donc nous posons toujours

$$\wp'^2 u = 4\wp u(\wp^2 u - g_2) ,$$

avec la valeur spécifiée ci-dessus de l'invariant g_2 en fonction entière de t^4, les formules de correspondance avec le problème de DIOPHANTE sont maintenant:

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u} , \qquad U = x^2 - 2\wp u ,$$

$$y = 1 - t^2 , \qquad z = 1 + t^2 .$$

Parmi les solutions, celle de DIOPHANTE est

$$x = \frac{1 - t^4}{2t} , \qquad U = \frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} - (1 - t^2)^2 .$$

La solution correspondante de l'équation de la fonction de WEIERSTRASS est:

$$\wp u = -2t^2 , \qquad \wp' u = \pm 2t(t^4 - 1) ,$$

$$\wp(u + \omega_2) = \frac{g_2}{8t^2} , \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm \frac{g_2(1 + t^2)}{8t^3} ,$$

$$\sqrt{\wp^2 u} = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{4t(t^4 - 1)} ,$$

$$\wp'^2 u = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{32t^3(t^4 - 1)^3}(t^{16} - 36t^{12} - 186t^8 - 36t^4 + 1) ;$$

à remarquer la présence du facteur octaédrique $t^8 + 14t^4 + 1$.

Pour $t = 2$, ces formules donnent $g_2 = 706 = 2 \times 353$,

$$\wp u = -8 , \qquad \wp' u = 60 ,$$

$$\wp^2 u = \left(\frac{481}{120}\right)^2 , \qquad \wp'^2 u = \frac{130\,111 \times 481}{2^8 . 3^3 . 5^3} .$$

d'où la solution $x = \frac{130\,111}{2^3 . 3 . 5 . 481}$, $y = 3$, $z = 5$ antérieurement donnée.

SUR CERTAINS TRIANGLES ARITHMOGÉOMÉTRIQUES.

6. — La question précédente pose la recherche des *triangles tels que la somme des quatrièmes puissances de deux de leurs côtés*