

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE
Autor: Turrière, É.
Kapitel: Formules pour $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20683>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dans le cas de l'équation II, les valeurs $x = 20$, $U = 81.881$ conduisent à

$$p^u = -\frac{81}{2}, \quad p'u = -20.81,$$

$$p(u + \omega_3) = \frac{881}{2}, \quad p'(u + \omega_3) = 20.881,$$

$$p^{2u} = \left(\frac{481}{40}\right)^2, \quad p'^{2u} = \frac{481 \times 88.639}{40^3},$$

d'où la solution:

$$x = \frac{88.639}{80.481}, \quad y = 12, \quad z = 15,$$

Enfin dans le III^e cas,

$$g_2 = 5^4 \times 337, \quad g_3 = 0,$$

la solution primitive sera

$$p^u = \frac{625}{2}, \quad p'u = 12 \times 625, \quad p''u = 625 \times 769$$

$$p(u + \omega_2) = -\frac{337}{2}, \quad p'(u + \omega_2) = 12 \times 337, \quad p''(u + \omega_2) = 337 \times 193$$

d'où:

$$p^{2u} = \left[\frac{13 \times 37}{24}\right]^2.$$

FORMULES POUR $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$.

4. — Soit une équation définissant, d'une manière plus générale, une fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$; r est un paramètre rationnel et quelconque. Quelle que soit la valeur de ce paramètre r , l'équation cubique admet les solutions:

$$p^u = \frac{1}{2}, \quad p'u = \pm r;$$

$$p(u + \omega_2) = r^2 - \frac{1}{2}, \quad p'(u + \omega_2) = \pm r(2r^2 - 1);$$

$$p^{2u} = \left(\frac{r^2 - 1}{2r}\right)^2, \quad p'^{2u} = \pm \frac{r^2 - 1}{4r^3} (r^4 + 2r^2 - 1);$$

$$p(2u + \omega_2) = \frac{r^2(2r^2 - 1)}{(r^2 - 1)^2}, \quad p'(2u + \omega_2) = \pm r(r^4 + 2r^2 - 1) \frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^3}.$$

En prenant maintenant r de la forme spéciale $r = \sin \theta \cos \theta$ (avec $\tan \frac{1}{2} \theta$ rationnel), l'invariant g_2 est précisément égal à $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ et les formules précédentes s'appliquent au premier cas qui se pose dans l'étude générale du problème de Diophante, sous le point de vue même qui a été exposé sur des exemples numériques.

Ce même type d'équation, mais avec l'hypothèse $r = \frac{1}{2}$, contient la solution d'un problème célèbre. Ce cas ne rentre pas dans celui des équations associées au problème de DIOPHANTE, car la relation $2 \sin \theta \cos \theta = 1$ exprime que l'aire de l'arithmotriangle pythagorique est carré parfait, ce qui est impossible (FERMAT). Mais alors l'équation avec $g_2 = \frac{1}{2}$, $g_3 = 0$, n'est autre que celle des *triangles pythagoriques dont l'hypoténuse est carré parfait, ainsi que la somme ou la différence des côtés de l'angle droit* et des diverses équations indéterminées qui ont été rattachées par EULER, LAGRANGE, etc., à ce problème (voir *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli*, dans l'*Enseignement mathématique* de juin 1919, t. XX, p. 245-268)¹.

FORMULES POUR $g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)$, $g_3 = 0$.

5. — Un second cas à traiter est celui où g_2 est égal à

$$g_2 = \sin^4 \theta + \sin^4 \theta \cos^4 \theta \quad \text{ou} \quad \cos^4 \theta + \sin^4 \cos^4 \theta ;$$

par une transformation immédiate, il est réductible à

$$g_2 = 1 + \cos^4 \theta \quad \text{ou} \quad 1 + \sin^4 \theta .$$

Nous prendrons :

$$g_2 = (1 - t^2)^4 + (1 + t^2)^4 = 2(t^8 + 6t^4 + 1) ,$$

t est un nombre rationnel arbitraire; $t = \tan \frac{1}{2} \theta$. Les fonctions pu et $p'u$ ont été multipliées par les facteurs

$$\frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} \quad \text{et} \quad \frac{(1 + t^2)^6}{8t^3} .$$

¹ Je profite de l'occasion pour signaler que, sur la même question et en même temps que mon travail, paraissait un mémoire de M. Michele CIPOLLA: *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*, dans les *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, V^{me} série, vol. XI, mémoire XI, 1^o maggio 1919.