Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POLYNOMES DE FONTANA-BESSEL
Autor: Appell, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20681

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES POLYNOMES DE FONTANA-BESSEL

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

Les formules connues de la théorie des différences appliquées aux polynomes

$$Q_\nu(x) = \frac{x(1-x)\dots(\nu-1-x)}{1.2\dots\nu} = -\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{1.2\dots\nu}, \quad (\alpha = -x)$$

$$Q_0(x) = -1, \qquad Q_\nu(x+1) - Q_\nu(x) = -Q_{\nu-1}(x) \qquad (1)$$

donnent évidemment des formules relatives aux polynomes

$$P_{\nu+1}(x) = \int_0^x Q_\nu(x)\,dx\ ; \qquad P_1(x) = -x \qquad (2)$$

qui ont été considérés par Bessel pour $x = 1$ à propos d'une formule de Fontana (Voyez, pour une bibliographie détaillée, une Note de M. Giovanni Vacca, dans les *Atti della reale Accademia Nazionale dei Lincei*, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie Sesta, Vol. 1, Fasc. 3, Seduta del 28 febbraio 1925, p. 206 et suiv.). Nous appellerons ces polynomes $P_{\nu+1}(x)$ les polynomes de Fontana-Bessel. M. Ser a donné dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (2me Série, t. IV, 1925, p. 126 et suiv.) des formules relatives à ces polynomes. Il écrit notamment la formule suivante, dans laquelle C désigne la constante d'Euler

$$\log\Gamma(x+1) + Cx = P_2(x) + \frac{P_3(x)}{2} + \frac{P_4(x)}{3} + \dots \qquad (3)$$

qui donne la formule de Fontana pour $x = 1$; dans ce qui suit, nous désignerons par p_2, p_3, ... les nombres rationnels $P_2(1)$, $P_3(1)$, ... En dérivant (3) par rapport à x on a

$$\Psi(x) + C = Q_1(x) + \frac{Q_2(x)}{2} + \frac{Q_3(x)}{3} + \dots \qquad (4)$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de Gauss. $\Psi(x) + C$ est, d'après Gauss (*Oeuvres*, t. III, p. 154 et suiv.) exprimable en termes finis quand x est commensurable; il en est de même de la série qui forme le second membre de (4). Par exemple les équations

$$\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) + C = -2\log 2\,, \qquad \Psi\left(-\frac{1}{4}\right) + C = \frac{1}{2}\pi - 3\log 2$$

donnent

$$-2\log 2 = Q_1\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}Q_2\left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots$$

$$-\frac{1}{2}\pi - 3\log 2 = Q_1\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}Q_2\left(-\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

Comme $\Psi(x+1) - \Psi(x) = \dfrac{1}{x+1}$, on a, d'après (1),

$$\frac{1}{1+x} = -\left[Q_0 + \frac{Q_1(x)}{2} + \frac{Q_2(x)}{3} + \ldots\right];$$

de même

$$\frac{1}{2+x} - \frac{1}{1+x} = \left[\frac{Q_0(x)}{2} + \frac{Q_1(x)}{3} + \ldots\right];$$

. . . . . .

En intégrant ces relations, par rapport à x, de 0 à x, on a une série de formules dont la première a été donnée par M. Ser (*loc. cit.*); en les intégrant par rapport à x de 0 à 1 on voit apparaître les p.

La formule (1) intégrée par rapport à x, donne

$$P_{\nu+1}(x+1) - P_{\nu+1}(x) = -P_\nu(x) + p_{\nu+1}\,,$$

qui exprime $P_{\nu+1}(x+1)$ en

$$P_{\nu+1}(x) \qquad \text{et} \qquad P_\nu(x)\,.$$

La formule (4) se trouve déjà dans le *Calcul intégral* de J. Bertrand, p. 160; en l'ordonnant par rapport à x et identifiant avec

$$S_2 x - S_3 x^2 + \ldots\,,$$

où

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots\,,$$

on obtient des formules dignes d'attention.