SUR CERTAINES FRACTIONS CONTINUES RELATIVES A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

La série hypergéométrique de Gauss est maintenant entrée dans l'enseignement. On sait que Gauss a donné des développements en fraction continue qui s'y rattachent (Oeuvres, t. III, p. 134 et suiv.) et qui ont été ramenés à un point de vue général. Voici d'autres fractions continues obtenues également en partant des relations entre les fonctions contiguës. Gauss a donné [*ibid.* p. 130 éq. (15)] la relation suivante que nous écrivons ici en changeant γ en $\gamma + 1$ et en posant

$$F_0 = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad F_1 = F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x),$$
$$F_2 = F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x),$$

$$-\gamma(\gamma + 1)(1 - x) F_0 + (\gamma + 1)[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x] F_1 + (\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta) x F_2 = 0 . \tag{1}$$

Divisons par le terme du milieu et posons:

$$\Psi = \frac{\gamma(1 - x)}{\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x} \frac{F_0}{F_1} .$$

En appelant Ψ_1 la quantité déduite de Ψ en y changeant γ en $\gamma + 1$

$$\Psi_1 = \frac{(\gamma + 1)(1 - x)}{\gamma + 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 3)} \frac{F_1}{F_2} ,$$

la relation (1) devient

$$-\Psi + 1 + \frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta)x}{(\gamma + 1)[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x]} \frac{F_2}{F_1} = 0 ,$$

$$\Psi = 1 + \frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta)x(1 - x)}{[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x][\gamma + 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 3)x]} \frac{1}{\Psi_1} .$$

On a de même

$$\Psi_1 = 1 + \frac{(\gamma+2-\alpha)(\gamma+2-\beta)x(1-x)}{[\gamma+1-(2\gamma-\alpha-\beta+3)x][\gamma+2-(2\gamma-\alpha-\beta+5)x]}\,\frac{1}{\Psi_2},$$

et ainsi de suite, en changeant chaque fois γ en $\gamma+1$. On obtient ainsi la fraction continue

$$\Psi = 1 + \cfrac{u_1}{1+\cfrac{u_2}{1+\cfrac{u_3}{1+\cfrac{u_4}{1+\cdots}}}},$$

$$u_\nu = \frac{(\gamma+\nu-\alpha)(\gamma+\nu-\beta)x(1-x)}{[(\gamma+\nu-1)-(2\gamma-\alpha-\beta+2\nu-1)x][(\gamma+\nu)-(2\gamma-\alpha-\beta+2\nu+1)x]},$$

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu = \frac{x(1-x)}{(1-2x)^2}, \qquad \lim \Psi_\nu = \frac{1-x}{1-2x}.$$

Exemple. — On a (Gauss, *ibid.*, p. 127, éq. XXI et XVI).

$$\cos nt = \cos t\,F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \sin^2 t\right) = \cos t\,F(\alpha,\beta,\gamma,x),$$

$$\sin nt = n\sin t\,F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \sin^2 t\right) = n\sin t\,F(\alpha,\beta,\gamma',x),$$

$$\alpha=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\quad \beta=-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\quad \gamma=\frac{1}{2},\quad \gamma'=\gamma+1=\frac{3}{2},\quad x=\sin^2 t.$$

Alors

$$\Psi = \frac{n\operatorname{cotg} nt}{2\operatorname{cotg} 2t}, \qquad u_\nu = \frac{1}{4}\,\frac{\nu^2-\frac{n^2}{4}}{\nu^2-\frac{1}{4}}\operatorname{tg}^2 2t,$$

$$\frac{n\operatorname{cotg} nt}{2\operatorname{cotg} 2t} = 1 + \cfrac{\frac{1}{4}\,\frac{1-\frac{n^2}{4}}{1-\frac{1}{4}}\operatorname{tg}^2 2t}{1+\cfrac{\frac{1}{4}\,\frac{4-\frac{x^2}{4}}{4-\frac{1}{4}}\operatorname{tg}^2 2t}{1+\cdots}},$$

formule finie si $n^2 = 4\nu^2$.

On peut faire un usage analogue des équations (1) et (1 D) de Gauss (*loc. cit.* p. 130) en faisant jouer à α et β le rôle de γ.

En posant

$$\Psi = \frac{\gamma - \alpha - 1}{\gamma - 2\alpha - 2 - (\beta - \alpha - 1)x} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha + 1, \beta, \gamma, x)}$$

$$= \frac{\gamma - \alpha - 1}{\gamma - 2\alpha - 2 - (\beta - \alpha - 1)x} \frac{F_0}{F_1},$$

on a une fraction continue dans laquelle

$$u_\nu = \frac{(\alpha + \nu)(\gamma - \alpha - \nu - 1)(1 - x)}{[(\gamma - 2\alpha - 2\nu) - (\beta - \alpha - \nu)x][\gamma - 2\alpha - 2\nu - 2 - (\beta - \alpha - \nu - 1)x^2]},$$

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu = \frac{x - 1}{(x - 2)^2}, \qquad \lim \Psi_\nu = \frac{1}{2 - x}.$$

Pour l'équation (10) de Gauss il suffit de permuter dans ce qui précède α et β.

Dans le calcul différentiel de J. Bertrand on trouve (p. 430 et suiv.) des vues générales sur les fractions continues analytiques; le caractère de ces fractions a été mis en lumière par M. Padé dont nous indiquons les mémoires à la fin de cet article.

La série

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{1.2.3}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \cdots$$

considérée par Legendre dans une Note mise à la fin de sa Géométrie a été développée par lui en fraction continue. Elle se déduit de la série de Gauss en y supprimant, dans le terme général, les factorielles $\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)$ et $\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)$. Il y aurait intérêt à traiter de même la fonction

$$f(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

qui se réduit à e^z pour $\alpha = \gamma$. La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ devient, quand on y pose $\beta = k$, $x = \frac{z}{k}$ et qu'ensuite on fait $k = \infty$,

$$F\left(\alpha, k, \gamma, \frac{z}{k}\right) = f(\alpha, \gamma, z).$$

La même fonction où on fait

$$\alpha = k\,,\quad \beta = k\,,\quad \gamma = z\,,\quad x = \frac{a}{k^2}\,,\quad k = \infty$$

devient

$$F\left(k\,,\, k\,,\, z\,,\, \frac{a}{k^2}\right) = \varphi(z)\ .$$

Les formules (15) et (1) de Gauss (Oeuvres, t. IV, p. 130) se réduisent alors pour f à

$$0 = \gamma[\gamma - 1 + z]f(\alpha\,,\,\gamma\,,\,z) - (\gamma - \alpha)zf(\alpha\,,\,\gamma + 1\,,\,z) \\ - \gamma(\gamma - 1)f(\alpha\,,\,\gamma - 1\,,\,z) = 0\ ,$$

$$0 = (\gamma - 2\alpha + z)f(\alpha\,,\,\gamma\,,\,z) + \alpha f(\alpha + 1\,,\,\gamma\,,\,z) \\ - (\gamma - \alpha)f(\alpha - 1\,,\,\gamma\,,\,z) = 0\ ,$$

et pour φ

$$0 = z(z - 1)\varphi(z) + \alpha\varphi(z + 1) - z(z - 1)\varphi(z - 1)\ ,$$

qui, en y changeant z en $z + 1$ donne la relation de Legendre, remarque qui a probablement été faite. Les deux relations précédentes où on change γ en $\gamma + 1$ dans la première et α en $\alpha + 1$ dans la deuxième, donnent lieu à des fractions continues qu'il est facile d'écrire.

Voici pour terminer l'indication des Mémoires que M. Padé a publiés sur les fractions continues. Ces Mémoires ont tous paru dans les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*,

Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. 91 p. (9, 1892).

Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques. 32 p. (16, 1899).

Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction. 37 p. (19, 1902).

Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions. 60 p. (24, 1907).

Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm et sur la convergence de la table des réduites d'une fraction rationnelle. 16 p. (24, 1907).

A ces travaux il convient d'ajouter un Mémoire de M. Montessus de Ballore à Lille, *Sur les fractions continues algébriques*, (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. XIX, année 1905, p. 185-257).