Th. De Donder. — Théorie mathématique de l'électricité. Première partie: Introduction aux équations de Maxwell, rédigée par C. Van Lerberghe. — Un volume in-4° de 200 pages et 82 figures. Prix : 45 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Une bibliographie de 67 pages termine le volume. La figure 41, pour nettement distinguer divers chemins d'intégration, a été tirée en trois couleurs. Merveilles d'impression engendrées par une merveille mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

Th. De Donder. — **Théorie mathématique de l'électricité**. Première partie: *Introduction aux équations de Maxwell*, rédigée par C. Van Lerberghe. — Un volume in-4° de 200 pages et 82 figures. Prix : 45 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925.

Ce bel ouvrage, présenté comme une Introduction aux équations de Maxwell, est à coup sûr, de ceux dont l'étude conduit, par la voie physique et tangible, aux plus récentes théories de la Physique mathématique moderne. Il y avait beaucoup dans l'œuvre de Maxwell ; c'était un *électromagnétisme* renouvelé, à conséquences *électroptiques* que Hertz ne devait confirmer qu'un quart de siècle plus tard.

Il y avait aussi, ce qui ne fût aperçu que beaucoup plus tard encore, des possibilités de compléments *électrogravifiques*. N'anticipons pas sur cette immense synthèse ; il ne s'agit ici que de la partie électromagnétique allant jusqu'au seuil de l'électroptique, mais chacun sait que M. De Donder est également l'auteur d'une *Gravifique einsteinienne* et la comparaison fournit l'occasion de remarquer, une fois de plus, que les considérations quadridimensionnelles et non euclidiennes de la Gravifique n'interdisent nullement l'usage de l'espace et du temps ordinaires. Cet espace et ce temps semblent constituer des cadres élémentaires et rigides dont tous les phénomènes ne s'accommodent pas avec une égale facilité ; nous commençons ici par ceux qui s'en accommodent aisément et la meilleure manière de parvenir aux autres est, sans doute, de bien étudier les premiers.

L'enchaînement logique de l'œuvre paraît de toute première qualité et l'esprit synthétique se trouve bien suffisamment satisfait rien que par les nombreux parallélismes qu'offrent les phénomènes électriques et les phénomènes magnétiques.

Mais venons à une analyse détaillée pour laquelle nous respecterons la division en trois Livres adoptée par l'auteur.

Livre I : *Le champ électrostatique.* — L'étude d'un tel champ commence par des généralités qui sont les mêmes que celles relatives à l'attraction newtonienne ; c'est aussi l'occasion de faire connaissance avec les éléments du Calcul vectoriel. Au potentiel et à la force électrique qui en dérive s'associe immédiatement la force électromotrice qui, elle, est relative à une ligne du champ. Le flux de force à travers une surface (théorème de Gauss) se présente très élégamment avec la notion géométrique d'angle solide. Après la loi de Coulomb se manifestent les premières équations de dimensions, puis la conservation de l'énergie électrostatique ainsi que l'égalité de l'action et de la réaction.

En principe, tout ceci doit pouvoir s'étendre au cas où la répartition électrique devient continue, soit en volume, soit en surface. Mais les choses ne vont pas sans minuties de continuité qui se traduisent par des différences essentielles suivant la position des éléments potentiés par rapport aux ensembles potentiants. Le type de tels résultats est le fameux théorème de

Poisson qui exprime une discontinuité des dérivées secondes du potentiel V quand on pénètre dans les volumes électrisés.

Avant d'aborder les dérivées partielles du potentiel dû à une surface électrisée, il est nécessaire d'étudier une intégrale en $\tau\, d\omega$ où $d\omega$ est l'angle solide élémentaire.

L'analyse en a toujours été délicate, mais M. De Donder la résume en une règle mnémonique très simple. Le rot F de la formule de Stokes est interprété cinématiquement comme une vitesse angulaire (tourbillon ou *Wirbel* de Helmholtz). Enfin, toujours quant au point potentié tendant vers un point P d'une surface électrisée, il faut signaler les théorèmes de la résultante *normale* bien déterminée et de la résultante tangentielle qui, au contraire, dépend de la loi suivant laquelle une plage entourant P tend vers ce point. Un remarquable exemple d'indétermination est donné en opposant aux plages circulaires de centre P d'autres plages ayant subi une ablation segmentaire.

Arrivons à la théorie des conducteurs parfaits caractérisés intérieurement par un potentiel V constant.

Les questions dominantes concernent ici *l'influence* ; elles entraînent des problèmes de Dirichlet. A noter le rôle du conducteur faisant *écran électrique* par rapport à une cavité. Avec les charges et les *capacités mutuelles* de deux conducteurs s'introduit une analyse de déterminants qu'on pourrait retrouver en beaucoup de questions mais qui a surtout été mise à la mode par la Gravifique.

L'étude de la répartition *dipolaire* peut se ramener, à divers points de vue également ingénieux, à celle de la répartition électrique continue ; on peut parler de *fluide fictif* équivalent à un ensemble de dipôles. La définition de la force électrique H est facile à conserver ; il en est de même pour la résultante électrique R, mais, dans le cas où le point potentié P est à l'intérieur d'un volume polarisé, cette résultante dépend de la forme de l'alvéole constitué autour de P ; d'où des études élégantes et à caractère presque exclusivement géométrique pour différentes formes alvéolaires (cylindre allongé, cylindre aplati, sphère, ellipsoïde).

Ceci est très important et fort original. M. De Donder donne même (p. 77) des formules explicites et d'une symétrie remarquable qui montrent, comment, en général, R diffère de H. Et ce qui est ainsi établi, pour force et résultante *électriques*, se retrouvera, plus loin, pour force et résultante *magnétiques*.

Le cas de l'alvéole cylindrique aplati conduit à un vecteur formé linéairement avec H et l'intensité de polarisation P.

Ce vecteur B est *l'induction électrique* où le *déplacement* de Maxwell ; il donne des théorèmes analogues à ceux concernant H.

C'est ainsi qu'il y a un théorème de Gauss pour le flux d'induction et un théorème de Poisson $\operatorname{div} B = 4\pi\varrho$.

Le *potentiel vecteur électrique* Π donne un *potentiel vecteur de polarisation* V^d tel que $\operatorname{rot}\Pi \equiv V^d$.

Il est naturellement dû aux dipôles et sa divergence est nulle.

L'évaluation de l'énergie électrostatique peut être dite *microscopique*, si l'on tient compte des dipôles, *macroscopique* dans le cas contraire, mais les deux choses se lient aisément grâce au fluide fictif qui représente l'état polarisé et à l'idée *d'énergie localisée* due à Maxwell.

Un *diélectrique, parfait, homogène et isotrope*, a une intensité de polarisa-

tion P de la forme $P^0 + kH$ si P^0 est la *polarisation rémanente* et k la *susceptibilité*. Cette formule binome classe immédiatement les diélectriques en *polarisés*, *doux paraélectriques*, *doux diaélectriques*, *permanents*, *non polarisables*. Là encore, les densités fictives obéissent à des lois linéaires très simples et à une équation de Poisson généralisée ; aux surfaces de contact entre conducteurs et diélectriques apparaissent des conditions aux limites qui ont déjà notablement exercé le talent mathématique. Pour les diélectriques solides, la théorie des *pôles* est une géométrie des *charges* tout à fait analogue à la géométrie des masses dans la théorie des centres d'inertie.

Une couche de glissement, dans un volume d'abord neutralisé, provient d'une translation *infiniment petite* de l'un des fluides, du fluide positif, par exemple. Evidemment le caractère dipolaire doit immédiatement apparaître, mais il apparaît alors d'une manière infinitésimale particulièrement simple; des interprétations par répartition superficielle s'offrent sans peine dans les cas remarquables de la *sphère de Mossoti* et de l'alvéole sphérique.

Pour l'ellipsoïde, il faut bien connaître la théorie du potentiel ellipsoïdal ou avoir quelque idée des coordonnés elliptiques mais le paragraphe contient tout ce qui est nécessaire à cet égard. Les esprits comparateurs pourront se reporter aux *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme* de P. Duhem ou au *Traité de Mécanique* de M. P. Appell.

Au sujet de la répartition dipolaire en surface, nous retrouvons les surfaces génératrices de discontinuités pour la force électrique ; il y a toujours une *réfraction de la force électrique*, phénomène que la dipolarité ne paraît pas compliquer de manière spéciale.

Livre II : *Le champ électromagnétique stationnaire.* — Nous abordons l'électricité en mouvement *stationnaire* avec la notion fondamentale de *courant de convection* $C = \rho V$. Ces courants se peuvent considérer dans les volumes et sur les surfaces, d'où une dualité rendue particulièrement manifeste par M. De Donder qui a été jusqu'à diviser les pages en deux parties pour présenter, à gauche, les propriétés du courant spatial et, à droite, en regard, avec comparaison faite alinéa par alinéa, les propriétés correspondantes du courant superficiel.

Le rotor du potentiel vecteur conduit à la *force magnétique* aisément exprimable, à son tour, sous une forme intégrale qui constitue la *loi de Biot et Savart*.

Les relations maxwelliennes commencent à apparaître dès que l'on cherche à lier potentiel vecteur, force magnétique et courant de convection. Notons encore qu'au *tube de courant* spatial correspond le *ruban de courant* superficiel. Au courant élémentaire δJ, passant dans le tube ou dans le ruban, correspond encore une expression intégrale en $\omega(A)\delta J$ soit $\mathcal{O}$. Alors $\omega(A)$ est de la nature d'un angle spatial et la force magnétique $\mathcal{H}$ est $-$ grad $\mathcal{O}$.

On a ainsi un *potentiel scalaire* $\mathcal{O}$ dû aux courants *fermés* J.

La force *magnétomotrice* s'introduit par intégration de la force magnétique le long d'une ligne fermée du champ.

La considération des conducteurs parfaits nous amène à la loi de Laplace, au théorème d'Ampère, bref aux forces mécaniques agissant entre éléments de courant ; l'accord avec les idées énergétiques de Maxwell est bien digne d'être remarqué.

La répartition dipolaire magnétique, en volume et en surface, rappelle l'étude précédemment faite dans le cas dipolaire électrique. On voit d'abord

qu'à grande distance un courant fermé donne le même potentiel qu'un dipôle *fictif* à charges magnétiques.

Il y a un potentiel vecteur de polarisation magnétique interprétable aussi par les courants fictifs et une énergie magnétique saisissable tantôt microscopiquement, tantôt macroscopiquement.

Les pôles magnétiques, les couches de glissement, les doubles couches magnétiques reviennent toujours comme dans la théorie dipolaire électrique ; il n'y a même pas lieu de trop insister sur ces analogies, car ce serait paraître croire que l'électromagnétisme est découvert d'hier. Répétons plutôt que Maxwell et les théoriciens les plus modernes peuvent prétendre à l'accord le plus esthétique avec des devanciers déjà lointains, tels Laplace et Ampère.

Livre III : *Le champ électromagnétique variable.* — Il s'agit maintenant du champ à support matériel invariable, mais en lequel les modifications électromagnétiques peuvent être quelconques. Il est régi par les *équations de Maxwell* proprement dites, lesquelles proviennent, en partie, de conservations de propriétés des inductions électrique et magnétique, d'autre part, de variations de ces propriétés faites d'accord avec les vues de Faraday, le tout harmonisé par une symétrie vectorielle assurant, une fois de plus, le rapprochement entre l'électricité et le magnétisme.

A noter que ces fameuses équations de Maxwell, prises ici sous une forme aussi générale que possible, n'en sont pas moins du type analytique qui correspond à l'évanouissement de deux intégrales doubles portant chacune sur une forme différentielle du type

$$M_{ij}\,dx_i\,dx_j \qquad \text{avec} \qquad M_{ij} = -\,M_{ji}\ .$$

et i, j prenant les valeurs 1, 2, 3, 4. Ceci est d'une grande importance pour l'électrogravifique. Cf. *L'Ens. math.*, T. 24, 1924-25, p. 203.

A ces équations différentielles s'associent immédiatement des théorèmes intégraux ; elles sont accompagnées par des conditions aux limites d'une étude plus épineuse que celle des équations mêmes, ce qui, répétons-le, ne surprend plus les mathématiciens de la Physique. Elles sont, par contre, heureusement transformables, grâce aux potentiels électromagnétiques, en équations *dalembertiennes*, où l'on retrouve les formes à la Poisson intuitivement étendues.

Elles s'accompagnent également d'un théorème concernant la conservation de l'énergie, théorème qui se présente sous une forme intégrale assez complexe tenant compte de l'effet Joule, de l'énergie électromagnétique, des énergies mises en jeu par les forces électriques, des énergies dissipées par hystérèses électrique et magnétique.

La somme de toutes ces variations d'énergies, par unité de temps, est une intégrale portant sur le *vecteur radiant* de Poynting.

Enfin, on sait que Maxwell a imaginé toute une mécanique de tensions et de pressions ressemblant à celles de l'élasticité, mais ne provenant cependant que de l'action du champ électromagnétique. Les vecteurs s'y élèvent à la dignité de *tenseurs*, ce qui fait d'ailleurs percevoir la marche parfaitement continue qui a prolongé l'Electromagnétisme par la Gravifique. Et nous voici parvenus à la fin de ce premier et magnifique volume où la plus grande généralité possible a certainement voisiné partout avec la simplicité maximum. N'oublions pas cependant les dernières pages avec leurs

riches tableaux d'unités et de dimensions ; ces tableaux sont d'ailleurs suivis d'explications permettant des choix aisés suivant la nature des simplifications que l'on peut avoir à souhaiter. Citons aussi, dans cet ordre d'idées, le système de Lorentz-Heaviside qui donne aux équations de Maxwell la forme vraisemblablement la plus réduite.

Un autre tableau récapitulatif des opérations vectorielles contient de véritables définitions de ces opérations. On voit que partout se révèle le souci d'être complet. Un tel ouvrage manquait aux physiciens et aussi aux mathématiciens intéressés par la Gravifique mais insuffisamment érudits en l'Electromagnétisme qui y a conduit.

A. Buhl (Toulouse).

M. Lecat. — **Coup d'œil sur la Théorie des Déterminants supérieurs dans son état actuel.** — Un fascicule grand in-8° de 60 pages. Prix : 10 francs. F. Ceuterick, Louvain, 1926.

Le prodigieux travail de M. Maurice Lecat, sur les déterminants à n dimensions, est universellement connu. Le fascicule que nous signalons ici n'est d'ailleurs qu'un résumé devant servir de préface à un grand et nouvel ouvrage en trois volumes.

Le sujet est ingrat, mais d'une manière assez spéciale ; il ne l'est certainement pas intrinsèquement et a été jugé tout autrement par Cayley, Sylvester Kronecker..., en attendant qu'il enthousiasme M. Lecat lui-même. Il est ingrat, parce que des préventions assez injustes sont dressées contre lui ; on le croit pauvre en applications. De plus, il nécessite, dans l'hyperespace, un sens topologique particulièrement précis. Alors qu'en géométrie à n dimensions on peut souvent raisonner sur des étendues continues, sans en localiser bien exactement les éléments, on ne saurait se permettre un tel vague avec des matrices dont les éléments ont besoin d'être exactement localisés pour avoir un signe précis ou une signification non équivoque. Ce n'est plus l'hyperespace défini en vertu de généralités analytiques ; c'est l'algèbre même qui envahit cet hyperespace, au lieu de se borner à le représenter. Or, il suffit de dépeindre les choses de cette manière pour avoir confiance en la théorie. Ce n'est pas au moment où les extensions géométriques de tout genre font florès qu'une extension algébrique peut continuer à souffrir d'un singulier ostracisme.

D'ailleurs, les meilleurs auteurs qui ont écrit sur les déterminants à deux dimensions, même dans des ouvrages classiquement rédigés et déjà assez loin de nous au point de vue historique, ont tenu à honneur de présenter les permutations à deux indices d'une manière qui appelle manifestement le cas d'indices en nombre quelconque. Tel est, par exemple, le cas de M. Mansion qui, non seulement, place ses *Eléments de la Théorie des Déterminants* (1883) sous les auspices de la fameuse devise de Sylvester, reprise par M. Lecat, « Algebra upon algebra », mais qui, dans une note (p. 22), indique nettement la génération extensive et logique des déterminants supérieurs avec citation de ses principaux créateurs. L'extension en litige a donc de profondes racines dans le passé ; les abondants rameaux qu'elle peut donner à l'heure actuelle résultent d'une évolution naturelle qui ne peut tourner qu'à l'avantage de l'Algèbre.

A. Buhl (Toulouse).