

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1926)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Rubrik:** BIBLIOGRAPHIE

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BIBLIOGRAPHIE

---

P. APPEL. — **Henri Poincaré.** — Un volume petit in-8° de 120 pages, avec un portrait. Prix : 6 fr.; Plon, Paris, 1925.

Ce volume appartient à une Collection, intitulée : *Nobles vies, Grandes œuvres*, en laquelle nous trouvons déjà des ouvrages consacrés à Guynemer, Victor-Hugo, Charles de Foucauld, Jean-Henri Fabre. Ces quatre noms suffisent à montrer qu'aucun jugement *a priori* n'intervient, dans la pensée des éditeurs, quant au rôle des grands hommes ou la nature de leur œuvre. C'est pour bien des raisons différentes qu'un noble cœur, un vaste esprit peuvent être proposés à l'admiration des jeunes générations; cette diversité est même nécessaire afin que tous ceux qui sont susceptibles de s'élever puissent trouver chacun le modèle dont ils s'inspireront avec leur tempérament propre et leurs capacités particulières.

Henri Poincaré inspirera toujours les esprits profonds curieux du mécanisme analytique de la Pensée et de l'Univers; il donnera aussi une perpétuelle leçon de modestie aux conquérants de gloire puisqu'il a su acquérir celle-ci sans la chercher, en la dédaignant presque, en tout cas par des méthodes se réduisant toujours au seul travail.

Nombreuses sont les voix qui se sont élevées pour célébrer la valeur d'un tel homme; peu sont aussi autorisées que celle de M. Paul Appell, qui en fut un ami d'enfance et qui, illustre mathématicien lui-même, était admirablement placé pour analyser la formation, au cours des successives années, d'une formidable œuvre mathématique.

On trouve dans l'ouvrage les premiers jugements portés sur Poincaré par le ou les camarades de classe, sur son attitude parfois déconcertante aux examens, sur sa méthode de travail qui se trahissait sous forme de distractions alors qu'il se trouvait en soirée, en promenade, en missions dues à son titre d'Ingénieur des Mines, bref en des moments où beaucoup déclareraient que le nombre et la variété de leurs occupations empêchent précisément de profondes et délicates réflexions.

Des pages éloquentes nous montrent le patriote désapprouvant justement la discussion logique du patriotisme pour lui donner un fondement moral autrement supérieur dans les affinités spirituelles propres à une race. Il y a là un cas particulier de l'effrayante lutte qui se livre souvent entre sentiments simples et raisonnements simplistes.

M. P. Appell a fait, à l'auteur des présentes lignes, le grand honneur de reproduire, en son livre, quelques fragments de l'article publié par *L'Enseignement mathématique* (t. XV, 1913, p. 9) peu après la mort de Poincaré. Qu'il me soit permis de l'en remercier bien vivement.

A. BUHL (Toulouse).

**A. MAROGER.** — **Le Problème de Pappus et ses cent premières solutions**, avec une préface de P. Montel. Un vol. in-8° de VIII-386 pages et 44 figures. Prix : 25 fr.; Vuibert, Paris, 1925.

L'ouvrage est assez inattendu et fort curieux. On sait en quoi consiste le fameux problème : *Par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener un segment de longueur donnée limité aux côtés de l'angle.* Comme le fait ressortir M. P. Montel dans la Préface, un tel problème a forcément des solutions algébriques propres de par ses seules symétries génératrices de groupes; en changeant de coordonnées, de paramètres de lieux ou de segments auxiliaires etc., on fera apparaître les propriétés de ces groupes sous des physionomies pouvant être variées à l'infini. Voilà pour le point de vue scientifique strict. Cependant l'extrême richesse des développements suffit à justifier le livre de M. Maroger; toutes les branches des mathématiques élémentaires et spéciales sont atteintes; la Théorie des Nombres elle-même trouve son compte en l'étude de certaines identités.

Il faut voir aussi dans l'ouvrage un succès, un encouragement pédagogiques qui pourront inspirer bien des professeurs de l'Enseignement secondaire; si ceux-ci ont parfois pu croire qu'ils avaient à enseigner une science trop peu élevée, trop monotone, ne permettant point des cours variés et diversement colorés, ils verront ici de quelle variété un maître habile peut parer les questions les plus simples.

Les cent premières solutions dont il s'agit sont fort bien classées; elles ne chevauchent point l'une sur l'autre et deux solutions très voisines ne sont généralement comptées que pour une seule. La patience de M. Maroger dut être grande mais il n'exerce jamais inutilement celle du lecteur.

A. BUHL (Toulouse).

**R. DELTHEIL.** — **Probabilités géométriques.** Fascicule II, tome II du *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications* publié par M. Emile Borel avec la collaboration de L. Blaringhem, C.-V.-L. Charlier, R. Deltheil, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Traynard. — Un vol. gr. in-8° de 124 pages. Prix : 22 francs; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Cet intéressant fascicule s'ajoute à ceux faisant partie du même *Traité* et qui ont été récemment analysés ici même. Il représente des Leçons professées par l'auteur, au Collège de France, en 1922-1923.

La question des probabilités *géométriques* ou *continues* n'est pas récente; des noms célèbres, tels que ceux de Buffon, Sylvester, Crofton,... suffiraient déjà à la situer dans le passé. Sans sortir de *L'Enseignement mathématique*, nous trouvons dans notre Revue (t. V, 1903, p. 387) l'analyse d'un ouvrage de E. Czuber: *Probabilités et moyennes géométriques*, publié en 1902. Cet ouvrage ne manquait point d'intérêt, mais l'auteur du compte-rendu bibliographique, le regretté G. Combebiac, voyait surtout des « récréations mathématiques » dans des problèmes réunis sans laisser suffisamment transparaître la trame d'une théorie fondamentale.

M. Deltheil nous montre que nous sommes beaucoup plus avancés aujourd'hui et que l'illustre Henri Poincaré a marqué le sujet de sa griffe géniale.

La probabilité pour qu'un point, placé au hasard sur  $Ox$ , se trouve sur un certain élément  $dx$  est évidemment de la forme  $F(x) dx$ ; mais que savons-nous de la fonction  $F$  qui se présente d'ailleurs aussi bien, avec un nombre quelconque de variables, dans des espaces plus généraux ? L'intéressant est justement ici de bâtir la théorie avec le minimum d'hypothèses sur  $F$ . Il y a d'abord les cas où l'événement géométrique envisagé a une probabilité indépendante du choix de  $F$ .

Puis viennent ceux, traités avec une particulière originalité par M. Deltheil, où certaines propriétés présentées par  $F$ , dans une région spatiale  $R$ , se conservent, ou se transforment de manière connue, dans toutes les régions qui se déduisent de  $R$  par les transformations d'un groupe continu, d'où une digression préliminaire sur la théorie de ces groupes. Et comme le rôle de  $F$  engage cette fonction sous des signes d'intégration, nous sommes amenés, entre autres choses, à l'étude des invariants intégraux associés à un groupe.

Ajoutons que les correspondances de région spatiale à région spatiale sont aussi susceptibles d'être vivement éclairées par des correspondances d'ensemble à ensemble où intervient la notion de *mesure* créée par MM. Borel et Lebesgue.

On voit sur quels fondements très modernes s'appuie une théorie qui, ainsi supportée, n'en présentera qu'avec plus de certitude ses problèmes si élégants et faisant si facilement image au point de vue géométrique.

Dans les problèmes relatifs à des points à situer par rapport à diverses régions, nous trouvons une élégante méthode différentielle qui permet de débarrasser ces problèmes des intégrales multiples; cette méthode est appliquée à la formation du quadrilatère convexe en domaine convexe (Sylvester). La question admet d'ailleurs bien des variantes et conduit aisément à concevoir comme fonctions de lignes les probabilités du type envisagé.

Les problèmes relatifs aux droites du plan ont une origine fameuse en celui de l'aiguille d'abord jetée sur des droites, équidistantes et parallèles puis sur des quadrillages.

Voici les contours fermés  $C_1$  et  $C_2$ , diversement situés l'un par rapport à l'autre; quelle est la probabilité pour qu'une sécante de  $C_1$  coupe  $C_2$  ? Ces questions conduisent, tout naturellement, à de célèbres et élégants théorèmes dus au géomètre anglais Crofton et qui, comme le fait remarquer M. Deltheil, sont vraiment trop peu connus en France. L'aire et la longueur d'un contour fermé convexe  $C$  sont en relation très simple avec les mesures de l'ensemble des couples de sécantes se coupant à l'intérieur de  $C$  et de l'ensemble des couples de points également intérieurs à  $C$ .

Nous avons des considérations analogues dans l'espace notamment avec un curieux théorème de Minkowski sur la mesure de l'ensemble des plans coupant une surface fermée convexe. Dans l'hyperespace, l'hypersphère se prête à des évaluations probabilitaires qui font revenir aux lois de la Mécanique statistique comme à la loi de Laplace pour la distribution des valeurs d'une quantité fonction d'un très grand nombre de variables.

Tout ce résumé paraît encore bien succinct. Les lecteurs de M. Deltheil dégageront sans doute beaucoup d'autres choses de son exposition particulièrement captivante et suggestive.

**E. GAU. — Calculs numériques et graphiques.** — Un volume in-16 de vi-206 pages, avec 33 graphiques et 10 tables (Collection Armand Colin). Prix: broché, 6 fr., relié 7 fr.; Armand Colin, Paris, 1925.

M. Emile Gau, Doyen de la Faculté des Sciences de Grenoble, nous rappelle, dès la première ligne de la Préface le nom d'un savant mort prématu-rement, en 1918; celui de Samuel Lattès, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. C'est Lattès qui avait conçu un premier plan du présent ouvrage et qui devait l'écrire.

Ayant été moi-même, à Toulouse, collègue du disparu, ce m'est un devoir de me joindre à M. Gau pour rappeler la valeur scientifique et saluer la mémoire de celui qui fut l'un des tout premiers collaborateurs, sinon effectifs du moins désignés, pour la Collection Armand Colin.

L'œuvre bâtie définitivement par M. Gau à l'usage des mathématiciens praticiens peut être caractérisée en quelques mots; il s'agit de toutes les questions traitées dans un Cours de Mathématiques générales des plus complets, réexaminées non pas au point de vue de leur théorie analytique mais au point de vue de la mise en nombres, quand on entend les terminer par des calculs arithmétiques ou par des constructions graphiques pouvant en tenir lieu.

Après les calculs élémentaires, nous trouvons des théories sommaires sur les erreurs, les opérations abrégées, les tables fondées sur l'emploi des différences, l'interpolation, les règles à calculs, les nomogrammes. Puis viennent les sommations de séries, l'évaluation approximative des intégrales définies (dont les intégrales elliptiques), les équations différentielles avec leurs courbes intégrales plus ou moins approchées et quelques mots sur les intégrateurs mécaniques. L'ouvrage se termine par la résolution des équations algébriques ou transcendantes. Il contient dix tables numériques sur les carrés, les cubes, les racines carrées et cubiques, les inverses, les logarithmes népériens des entiers de 0 à 100, les lignes trigonométriques naturelles de 10 en 10 minutes, quelques fonctions simples de  $\pi$  et  $g$ , les intégrales indéfinies les plus usuelles, l'exponentielle, ses combinaisons hyperboliques et enfin les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Encore une fois, joli complément et des plus pratiques à adjoindre à beaucoup de cours de Mathématiques générales.

A. BUHL (Toulouse).

**A. TRESSE. — Eléments de Géométrie analytique.** — Un volume in-16 de ii-200 pages et 91 figures (Collection Armand Colin); Prix: 7 francs; Armand Colin, Paris, 1925.

Ouvrage élémentaire mais élégant et dû à un auteur également connu par de véritables travaux scientifiques. Cet auteur montre d'ailleurs ici un esprit éclectique sachant s'appuyer aussi bien — la bibliographie qui termine le livre en fait foi — sur Pruvost que sur Clebsch et Bouligand.

Les commodités de la méthode vectorielle sont largement mises à contribution, les coniques sont d'abord définies comme le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite fixes est constant, les constructions de courbes paramétriques sont ingénieuses, les branches paraboliques sont discutées aussi bien que les branches asymptotiques proprement dites.

Un chapitre est spécialement consacré aux enveloppes, développées et développantes en géométrie plane.

La géométrie dans l'espace est reprise par les méthodes vectorielles. La courbure des surfaces est illustrée par l'indicatrice, les théorèmes de Meusnier et d'Euler. Il y a cinquante ans, on ne connaissait de telles choses qu'en approchant de la licence; maintenant c'est la géométrie du néophyte, à peine au-dessus du baccalauréat. Encore un demi-siècle et l'on utilisera certainement, au pays bien connu de Mathélem, des méthodes de Calcul différentiel absolu. Peu de détails sur les quadriques présentées simplement comme exemples de surfaces gauches particulièrement élémentaires.

En résumé, condensation heureuse, adroite, avec beaucoup d'exercices. Je ne crains pas de vanter le livre plus que M. Tresse lui-même en disant qu'il me semble suffisant pour une préparation à l'Ecole Centrale.

Mais quelle que soit leur destination, les jeunes gens y verront certainement un guide commode et même aimable vers des régions mathématiques plus élevées.

A. BUHL (Toulouse).

N.-N. SALTYKOW. — **Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.** Conférences faites sous les auspices de la *Fondation Universitaire* dans les quatre Universités Belges (1923-1924). — Un volume gr. in-4° de 172 pages; Gauthier-Villars et Cie, Paris; Maurice Lamertin, Bruxelles, 1925.

Voici véritablement un grand, très grand ouvrage sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. L'auteur est un spécialiste connu partout et particulièrement en France où la primeur de beaucoup de ses travaux a été réservée aux *Comptes rendus* de Paris.

Il s'agit évidemment d'une exposition très savante, très imposante, prenant, dès le début, le cas de  $n$  variables pour des équations en  $x, p$  et l'on conçoit qu'il n'est pas aisé de donner une idée d'une telle œuvre dans un article comme celui-ci d'où les formules sont généralement bannies.

Cependant les idées fondamentales de M. Saltykow sont simples, ainsi qu'il convient dans une théorie ayant vraiment de la valeur, et il me semble surtout en distinguer deux principales.

La première consiste à étudier l'équation aux dérivées partielles en elle-même, sans recours à une autre théorie, telle la théorie des groupes. Ce n'est pas dire que celle-ci soit exclue; le nom, les formules de Lie reviennent souvent dans ces belles pages mais cela vient quand les équations à étudier y conduisent naturellement. Les problèmes d'intégration sont toujours traités à partir des équations à intégrer.

La seconde grande idée, combien justifiée par la seule symétrie, est de ne rien laisser dans l'ombre des rapports qui unissent l'équation avec son système caractéristique  $S$  qui, pour les équations en  $x, p$ , est le système canonique classique.

Or, à ce point de vue, bien des ouvrages élémentaires donnent des idées insuffisantes et dissymétriques. Ainsi, pour prendre un exemple très simple, on lit couramment, dans nombre de traités élémentaires, que pour intégrer la petite équation des problèmes géométriques de l'espace ordinaire, l'équation en  $x, y, z, p, q$ , il suffit de trouver une intégrale de  $S$ . Cela permettra, avec l'équation donnée elle-même, de calculer  $p$  et  $q$  d'où  $dz$  et la

formation de l'intégrale complète par intégration d'une équation différentielle totale. Sans doute cela suffit pour obtenir *une* intégrale complète mais cela ne donne qu'une vue très insuffisante sur les harmonies cependant si remarquables qui unissent l'équation et son système caractéristique. Et, même dans le petit problème de géométrie, l'intégrale complète trouvée par la méthode précédente peut ne présenter que des propriétés peu ou pas intéressantes alors qu'on aurait eu beaucoup mieux avec une autre intégrale de S.

Dans les cas les plus généraux, M. Saltykow cherche justement à préciser tout ce que l'on peut obtenir des éléments analytiques accessibles; certes on n'a pas toujours des systèmes complets d'intégrales pour des systèmes différentiels tant soit peu compliqués mais il faut savoir reconnaître toutes les propriétés des éléments possédés. Les propriétés *involutives* jouent naturellement un très grand rôle en tout ceci. Considérées à un point de vue par trop immédiat et utilitaire ces propriétés sont souvent décevantes; ainsi deux intégrales d'un système canonique, combinées par la parenthèse de Poisson, doivent en donner une troisième... qui se réduit le plus souvent identiquement à une constante ou à une intégrale déjà possédée. Il y a comme cela des *cycles* d'intégrales desquels on ne peut plus sortir et le théorème de Poisson apparaît alors comme vain. Or ce n'est pas là le vrai point de vue: un système différentiel révèle quelque chose de sa nature intime par ses cycles, ses groupes fonctionnels d'intégrales qui peuvent permettre de transformer le système et d'y reconnaître de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Les grandes conceptions de ce genre sont nombreuses dans ce magnifique ouvrage qui remet en honneur la théorie des caractéristiques avec une pureté digne de Cauchy. Tous les résultats essentiels sont étendus finalement aux équations qui contiennent *explicitement* les fonctions inconnues.

Quelques mots sur la personnalité de l'auteur, je pense, ne sembleront point superflus.

Voici bien trente années que les publications de M. Saltykow ont attiré mon attention et seulement quelques semaines que je l'ai rencontré en personne, à Bruxelles, dans cette Belgique si accueillante aux proscrits et particulièrement à la pensée proscrite. Belgrade lui fut d'abord un port de salut car il fallut fuir Kharkow et son Université, dans des conditions atroces où d'autres intellectuels laissèrent non seulement leurs biens mais leur vie.

Et l'on se demande avec stupeur quel bénéfice un grand pays comme la Russie peut trouver à se séparer de tels hommes.

A. BUHL (Toulouse)

P. APPEL. — *Traité de Mécanique rationnelle*. Tome V. *Eléments de Calcul tensoriel, Applications géométriques et mécaniques*, avec la collaboration de R. THIRY. — Un volume gr. in-8° de vi-198 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Grâce à M. P. Appell et à son collaborateur M. R. Thiry, on peut dire que maintenant les théories einsteinniennes triomphent *officiellement* en France. Ce triomphe a même quelque chose de particulièrement éclatant puisqu'il est consacré par un cinquième volume venant s'ajouter à un *Traité de Mécanique* dont la renommée est absolument universelle. Et l'esprit dans lequel est fait le nouvel exposé est véritablement excellent;

il ne pouvait même l'être davantage. Il ne s'agit pas de savoir si la Gravifique d'Einstein est parfaite au point de vue physique ; elle ne l'est certainement pas, pour la bonne raison que jamais conception humaine ne fut parfaite, mais cette Gravifique, cette « Géométrie électromagnétique dans laquelle la partie métrique constitue la Gravitation » n'en est pas moins un des monuments les plus admirablement ordonnés que le génie ait jamais conçu.

Il s'agit donc ici du « Calcul tensoriel » ou « Calcul différentiel absolu ».

Les débuts de ce calcul commencent à être bien connus. Tout le monde assimile facilement les jeux de bascule et surtout le rôle si curieux des indices répétés deux fois dans un terme monome, lesquels sont, de ce fait, indices de sommation. On a vraiment l'impression que les termes ainsi composés ont, les uns pour les autres, des affinités aussi étranges qu'utiles ; ils ne demandent qu'à s'agglomérer de la manière la plus profitable à l'obtention de quelque résultat saillant. Sylvester disait déjà quelque chose d'analogue à propos de la théorie des déterminants et, au fond, les principaux résultats tensoriels ont des symétries que l'on peut généralement ramener à celles de déterminants ordinaires ou symboliques. L'algèbre tensorielle engendre une analyse tensorielle, de même que les déterminants algébriques engendrent des déterminants fonctionnels. Les symboles à trois indices de Christoffel, ceux à quatre indices de Riemann, les dérivées covariantes et contrevariantes ont les plus esthétiques propriétés qui ont été heureusement rassemblées, à la fin du Chapitre II, en des tableaux dont le seul aspect aidera puissamment la mémoire.

Mais le plus curieux est que ces symétries analytiques correspondent à des faits physiques. Les généralités vectorielles, les formules propres à la déformation d'un milieu continu, les équations de l'équilibre élastique, celles d'Euler pour le mouvement du solide à point fixe et tant d'autres ne semblent plus que des cas particuliers de constructions tensorielles abstraites comme si, derrière les phénomènes les plus divers, nous saisissions vraiment une pensée constructrice unique.

Avec le déplacement parallèle généralisé apparaissent très simplement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un  $ds^2$  caractérise un espace euclidien. Le parallélisme doit être alors celui qui correspond au sens antique du mot ; le vecteur transporté de A en A est toujours le même, quel que soit le chemin fermé parcouru et, à ce caractère univoque, correspond une condition d'intégrabilité qui conduit à la nullité de symboles riemanniens bien connus.

Ces mêmes idées sont reprises plus loin avec la notion de courbure riemannienne ; cette fois le transport, par parallélisme vectoriel, de A en A, conduit, en général, à la considération de deux vecteurs différents et ceci suffirait à trahir la courbure pour des êtres ne percevant rien hors de la variété supportant le transport.

Les géométries de Weyl et d'Eddington, en lesquelles les symboles de Christoffel restent indéterminées ou sont déterminés autrement qu'en géométrie riemannienne, conduisent naturellement aux généralisations de M. Elie Cartan, aux espaces affines qui, contrairement aux espaces gravifiques d'abord employés, peuvent avoir une *torsion* non nulle. Reste à savoir si l'avenir nous révélera des phénomènes physiques interprétables dans des espaces tordus. Telles sont, très brièvement, les idées essentielles exposées par MM. Appell et Thiry. Elles sont encadrées par un premier et

un dernier chapitre provenant d'un cours de M. E. Borel, rédigé par M. H. Mineur. Le premier chapitre a trait aux propriétés essentielles des formes linéaires et quadratiques ; le dernier traite de la géométrie de Cayley.

Il s'agit alors de formes quadratiques au sens algébrique de cette expression ; les *absolus* sont des coniques, des quadriques..., tandis que les théories riemannniennes et einsteinniennes du corps de l'ouvrage exigent l'étude de formes *differentielles* quadratiques, notamment de  $ds^2$ . Mais il s'agit évidemment, dans les deux cas, de généralisations des concepts géométriques élémentaires ; les deux choses sont à rapprocher le plus possible. Félicitons-nous, encore une fois, de les voir passer dans l'enseignement officiel, à l'abri de noms dont l'autorité n'est contestée par personne.

A. Buhl (Toulouse).

S. BERNSTEIN. — *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle*, professées à la Sorbonne. — Un volume gr. in-8° de x-208 pages. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris. 1926.

Pour bien situer cet ouvrage, il conviendrait peut-être de rappeler un théorème de Weierstrass sur la représentation approchée, par fonctions entières, de fonctions, analytiques ou non, pouvant former des ensembles étendus. Ce théorème a déjà joué un rôle important dans les *Leçons sur les Fonctions de variables réelles* publiées, en 1905, par M. Emile Borel, dans sa « Collection de Monographies » où, d'ailleurs, le présent volume de M. Bernstein est également publié. Mais il s'agit ici de précisions, dues particulièrement aux idées de Tchebyscheff, auprès desquelles le théorème de Weierstrass ne semble plus qu'une généralité assez diffuse.

D'abord, comme le remarque l'auteur, il est évident qu'on ne peut parler, sans précautions spéciales, de convergence *uniforme* sur l'axe *réel* et il faut étendre cette notion à cet axe. Le *polynome* est également généralisé et devient une somme de termes tels que  $a_i \varphi_i(x)$ , les  $\varphi_i$  étant bornées et continues sur de certains segments.

Bien entendu, ces expressions peuvent devenir des polynomes ordinaires en lesquels on retrouve celui de Tchebyscheff qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment A ( $-1, +1$ ). Puis, de ce problème fort particulier, nous nous élevons de nouveau à des généralités de plus en plus étendues avec les cas où le polynome cherché satisfait à des conditions extérieures à A, comme d'avoir, hors de A, des valeurs ou des racines données.

Les  $\varphi_i$  peuvent également devenir des fractions rationnelles, des fonctions circulaires... ; il y a, pour les polynomes généralisés, une règle de Descartes généralisée, et, dans le même ordre d'idées, des polynomes *oscillateurs* qui se prêtent notamment à la représentation de  $|x|$ . Enfin, on peut chercher à construire les polynomes d'approximation en tenant compte de propriétés imposées à leur dérivée. Tout ceci forme un premier chapitre se rapportant aux segments finis.

Avec le chapitre II, nous considérons les propriétés extrémales *sur tout l'axe réel* des fonctions dépendant d'un nombre fini ou infini de paramètres. Ici, d'ingénieuses propositions se présentent d'abord pour certaines fractions algébriques dont le numérateur est un polynome et dont le dénominateur est la racine carrée d'un autre polynome. On étudie de même des fractions rationnelles compliquées qui ne s'écartent que faiblement de types beaucoup

plus simples, à termes quadratiques par exemple. Puis, voici diverses conditions pour qu'une  $f(x)$  soit développable en série de fractions rationnelles à *pôles donnés*. De mieux en mieux, nous atteignons les conditions pour qu'une fonction entière puisse rester bornée sur l'axe réel puis sur des demi-droites issues de l'origine et séparées par des angles égaux. En somme, il y a là, pour les fonctions entières, des lemmes de croissance qui sont lemmes de comparaison avec des expressions algébriques, trigonométriques..., généralement d'une simplicité et d'une originalité remarquables.

Cette impression s'accentue encore avec le Chapitre III relatif à la représentation par des polynomes de fonctions analytiques à singularité donnée. Les théorèmes curieux abondent.

La comparaison, avec une certaine suite géométrique, de la meilleure approximation par polynomes, d'une  $f(x)$ , conduit à une ellipse d'holomorphie pour cette  $f(x)$ . La singularité donnée peut être algébrique, logarithmique, essentielle, ce dernier cas étant naturellement le plus compliqué de beaucoup ; toutes les fois que le problème peut se résoudre, il l'est par des formules élégantes et simples. Le sujet a suscité également de beaux travaux de M. de la Vallée Poussin. M. Bernstein s'efforce plutôt de compléter que de reproduire ceux-ci.

Deux Notes terminent l'ouvrage. Dans la première, le savant auteur définit la fonction analytique dans le domaine *réel*, par la forme *continue* de son approximation polynomiale ; à une forme analogue mais *discontinue* correspond la fonction *quasi-analytique*. Ceci conduit à des théorèmes dus à MM. Hadamard, Denjoy, Carleman, ainsi qu'à M. Bernstein lui-même. La seconde Note a trait aux propriétés exceptionnelles des fonctions entières de genre zéro. On peut conclure, croyons-nous, que l'ouvrage est un des meilleurs qui soient quant au rattachement du réel à l'analytique ; il est, en son genre, aussi peu abstrait que possible, puisqu'il recherche dans les  $f(z)$  ce qui permet de les représenter pour le mieux en  $x$ . Et la représentation éclaire souvent bien des points obscurs dans le champ complexe.

A. BUHL (Toulouse).

J. HADAMARD. — **Cours d'Analyse** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Premier fascicule. — 1 vol. gr. in-8° de 336 pages. Prix de la souscription au tome complet : 60 francs. J. Hermann. Paris. 1925.

On a souvent dit que le Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, publié autrefois par Camille Jordan, était aussi bien le Cours du Collège de France. On peut affirmer hautement que cette assertion restera vraie, avec plus de force encore, pour le cours de M. Hadamard. C'est de la rigueur présentée avec une élégance incomparable, ce qui saute aux yeux dès la Première Partie consacrée à des Compléments de Calcul différentiel. La plupart des choses enseignées en Mathématiques spéciales sont généralement admises, mais complétées en leurs points faibles avec une sûreté d'aperçus et une concision frappantes. Par exemple, nous voyons d'abord, comment une dérivée seconde peut, à l'instar d'une dérivée première, être considérée comme un quotient.

Les Jacobiens sont susceptibles d'une interprétation géométrique où intervient l'étendue, à deux ou trois dimensions, associée à des segments infiniment petits, interprétation qui, réciproquement, permet d'orienter rigoureusement de tels segments les uns par rapport aux autres.

Sur des surfaces, un élément de fonction peut être prolongé jusqu'à l'obtention d'ordonnées multiples, sans que l'on ait, pour cela, besoin de franchir des contours apparents.

Les changements de variables sont appliqués à l'équation des cordes vibrantes et conduisent aux transformations de contact ; quand de telles transformations changent une surface en une ligne, celle-ci peut être considérée comme une surface canal très déliée.

Enfin, la délicate théorie des maxima ou minima des fonctions de plusieurs variables mène à la théorie des valeurs stationnaires qui permet notamment de passer de la notion de forme quadratique à celle de forme adjointe.

Avec la deuxième partie du fascicule nous passons aux Principes du Calcul intégral.

Il faut montrer que la notion géométrique d'intégrale définie, que l'on peut parfaitement conserver en vue des besoins les plus immédiatement utilitaires, est cependant susceptible d'extensions logiques qui éclairent sa véritable nature. Les conceptions, si étroitement unies, de continuité et de bornes dans un intervalle demandent d'abord une exposition serrée suivie de la notion de continuité uniforme plus précise, en apparence, que celle de continuité pure et simple, mais pouvant cependant se ramener à cette dernière. Alors seulement la fonction bornée intégrable pourra être bâtie sur un terrain inébranlable où l'on retrouvera logiquement les propriétés de l'intégrale d'abord conçues intuitivement. Une généralisation maintenant abordable est celle de Stieltjes ; il s'agit d'intégrales qui porteraient sur des éléments  $f(x) g'(x) dx$  et qui n'auraient rien de nouveau si  $g(x)$  avait toujours une dérivée, mais qu'on peut précisément s'arranger à conserver quand celle-ci disparaît. Et voilà un chapitre, très clair et même très court, qui n'en suffit pas moins pour aller jusqu'aux pensées profondes dues à Riemann et généralisées, au début du siècle, par M. Lebesgue.

Pour les intégrales indéfinies, notons la remarque d'Hermite permettant l'intégration d'une fraction rationnelle sans connaissance des racines du dénominateur pourvu que l'intégrale soit également rationnelle. Ensuite, nous passons à l'étude des intégrales hyperelliptiques.

Les intégrales définies conduisent à l'intégration des séries, d'où les discussions nécessaires de la convergence uniforme, puis aux méthodes d'intégration approchée avec de curieux compléments sur les corrections successives qu'on peut leur faire subir. Ces corrections sont capricieuses ; leur demander trop, c'est parfois les compromettre, c'est faire usage de séries apparemment convergentes dans leurs premiers termes, mais finalement divergentes. La notion d'intégrale définie demande ensuite à être étendue au cas des limites infinies et au cas des infinis de la fonction à intégrer. C'est l'occasion de préciser la notion d'*espèce* pour les intégrales hyperelliptiques.

Les intégrales multiples, présentées très simplement au point de vue physique, n'en offrent pas moins quelques difficultés, dès qu'il faut quitter ce point de vue. Ces difficultés tiennent notamment aux variétés d'infinitude et aussi à la question de l'interversion des intégrations toujours délicate dès que vient à disparaître un sens physique manifestement indépendant d'un ordre de variables. Après l'intégration et la dérivation sous les signes sommatoires, la question des lignes et surfaces d'infinitude est brièvement traitée, d'ailleurs sur d'élégants exemples.

Reste une troisième partie. C'est une application des propriétés des

intégrales. Calculs d'intégrales. Fonctions eulériennes. Intégrales de Dirichlet. Volume de l'hypersphère.

Un dernier et important chapitre est consacré aux séries trigonométriques. C'est d'abord l'intégrale de Dirichlet qui s'y associe, puis le procédé de Fourier pour la formation des coefficients. En gros, de tels développements s'appliquent aux fonctions intégrables évidemment beaucoup plus générales que celles susceptibles d'un développement taylorien pour lesquelles la dérivation doit être indéfiniment possible. M. Hadamard a donné d'ingénieux exemples de lignes brisées représentables trigonométriquement. Sous le nom de « phénomène de Gibbs », il étudie la représentation d'une discontinuité, en  $x = c$ , par une somme  $S_n(x)$  de termes qui ne devient la série complète que pour  $n$  croissant indéfiniment. Or, des bizarries se manifestent suivant les manières de faire tendre  $x$ , vers  $c$ , et  $n$ , vers l'infini. Le phénomène de Gibbs est l'exagération du saut de l'ordonnée dans les approximations ainsi envisagées.

Nous en resterons là en attendant la publication du fascicule qui terminera ce beau volume. Non seulement un tel ouvrage sera comme le pain des esprits logiques, mais il sera pour tous un instrument de travail de premier ordre ; il contient de nombreux exercices placés non à la fin des chapitres, mais mêlés à ceux-ci, indiquant ainsi à chaque pas la réflexion à faire dans un esprit que le lecteur pourra rendre personnel. Décidément le cours de l'Ecole Polytechnique conduira facilement sur les bancs du Collège de France.

A. BUHL (Toulouse).

G. JUVET. — **Mécanique analytique et Théorie des Quanta.** — Un volume gr. in-8° de vi-154 pages. Prix : 20 francs. A. Blanchard. Paris. 1926.

Pour situer commodément l'analyse de cet intéressant ouvrage, je suis tenté de renvoyer le lecteur à mon second article sur *La Pédagogie des Théories d'Einstein*, publié dans le précédent volume de cette Revue. Je montrais notamment (p. 201) qu'aux symétries *stokiennes*, sur lesquelles on peut faire reposer les théories d'Einstein, s'associent naturellement des symétries *antistokiennes* qui donnent naissance aux équations canoniques de Jacobi et Hamilton, ainsi qu'aux propriétés essentielles de ces équations. A ce point de vue, la mécanique einsteinienne et la mécanique analytique classique se font pendant avec la plus remarquable esthétique.

Or, la théorie des quanta nous mène à la mécanique analytique, parce que c'est la moderne théorie de l'atome à constitution corpusculaire, à noyau solaire central autour duquel gravitent de plus minuscules électrons. Il y a de grandes différences entre un tel système et un système planétaire astronomique, ne serait-ce que parce que les corpuscules planétaires du premier ont des charges de même signe, d'où il suit qu'ils ne sont attirés que par le noyau central, mais qu'ils se repoussent entre eux. N'importe ; les méthodes générales exposées par Henri Poincaré dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* trouvent ici un nouveau champ d'application et il faut alors commencer tout naturellement par l'analyse des équations canoniques. Il n'est pas impossible que Poincaré ait prévu cela un peu avant sa mort ; il nous a laissé, dans cet ordre d'idées, des lignes fort suggestives, où il était déjà question de quanta. Mais assurément, il ne pouvait en prévoir tant quand il se lançait dans la Mécanique céleste avec son fameux mémoire de Stockholm et, cependant, c'est cela qui maintenant triomphe une fois

de plus. Quelle lumineuse et prophétique puissance du génie. Quel démenti aux esprits ultra-utilitaires qui ne jugent bonnes, en science, que les choses à applications visiblement immédiates.

Revenons aux quanta. Un problème de gravitation corpusculaire peut être à peu près résolu à l'image d'un problème astronomique sans que la *quantification* soit encore opérée. Celle-ci consiste généralement à disposer de constantes d'intégration, de conditions initiales, de telle manière que la circulation électronique se fasse sur des trajectoires *stationnaires*. Il faut de plus s'attendre à des phénomènes qui n'ont point leur équivalent en astronomie. Les trajectoires stationnaires, comme leur nom l'indique, ne varient évidemment point de manière continue, mais le corpuscule qui les parcourt peut sauter, tout à coup, d'une trajectoire sur une autre, ce qui s'accompagne de brusques variations, de *quanta* énergétiques. L'idéal est de trouver des équations de mouvement valables après le saut comme avant, dût-on simplement y changer, de manière discontinue, par *quanta*, la valeur de certaines constantes. Ajoutons que si nous ne pouvons observer la gravitation corpusculaire aussi directement que l'astronome observe la gravitation planétaire, la première théorie a cependant une correspondance remarquable dans la distribution des raies spectrales dues à la lumière émise par l'atome.

Tel est le captivant sujet résumé par M. Juvet. La mécanique analytique de l'ouvrage est presque toujours celle de Poincaré ; les quantifications sont étudiées ensuite, conformément à la théorie de Bohr, sur l'atome d'hydrogène, sur l'atome d'hélium ionisé, sur l'atome de lithium doublement ionisé.

Viennent ensuite les problèmes à deux degrés de liberté, les systèmes quasi-périodiques et la notion d'invariants adiabatiques permettant la quantification de systèmes dégénérés. Tout cela fait partie d'une théorie générale des perturbations qui appelle encore de nombreuses recherches et les plus divers compléments. Quant au moindre mérite que l'on puisse attribuer à M. Juvet, c'est de venir au secours des chercheurs, en leur fourniissant un résumé concis et commode de l'état actuel d'une question qui tend, au moins autant que la Gravifique, à renouveler la Physique mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

N. E. NÖRLUND. — **Vorlesungen über Differenzenrechnung.** — Un volume gr. in-8° de x-552 pages et 54 figures. Prix : 6 dollars, broché, 24 M. ; cartonné, 25,20. J. Springer. Berlin. 1924.

Beau livre qui ne va point sans réminiscences. A peine l'avais-je sous les yeux que je me souvenais de la *Theorie der linearen Differenzengleichungen* de A. Guldborg et G. Wallenberg, analysée jadis par *L'Enseignement Mathématique* (t. XIV, 1912, p. 77).

Cette dernière analyse ayant été fort élogieuse, je me hâte de dire que les meilleures traditions ont été exzellentement maintenues par M. Nörlund.

Des géomètres de valeur jugent la théorie des différences comme quelque peu en marge de la science classique, de celle du continu et des équations différentielles. Cependant des fonctions fort simples, comme la fonction gamma, satisfont naturellement non à une équation différentielle, mais à une équation aux différences.

De plus, ces dernières équations portent à considérer des suites de nombres à noms illustres (nombres de Bernoulli, d'Euler, etc.), des suites de polynomes dénommées de même et enfin une foule de formules éminemment esthétiques et toujours constructibles comme celles des théories d'Abel et de Cauchy. Les propriétés fonctionnelles approchées sont ici rarement de mise.

Le but le plus essentiel de la théorie est la résolution des équations aux différences. Bien que le présent ouvrage contienne quelques équations non linéaires, les généralités théoriques ne se développent guère que sur les équations linéaires, mais combien cela suffit pour ravir l'amateur d'élegantes combinaisons ; il y en a tant qu'on ne sait quel exemple donner. D'ailleurs, l'auteur associe à la différence de deux ordonnées consécutives la somme ou plutôt la demi-somme de celles-ci, c'est-à-dire la notion de valeur moyenne, d'où des opérations  $\Delta$  et  $\nabla$ .

Les polynomes ayant d'abord joué un grand rôle dans la résolution des équations fonctionnelles, les séries trigonométriques réelles interviennent ensuite ; mais le plus grand intérêt est, encore un peu plus loin, dans le domaine complexe où les théorèmes de Cauchy s'appliquent admirablement.

La fonction gamma et les fonctions immédiatement associées donnent, comme toujours, un curieux chapitre, après lequel on passe à des polynomes de Bernoulli et d'Euler d'ordre supérieur, qui permettent notamment d'exprimer les différences et les valeurs moyennes d'une fonction par des séries d'aspect taylorien. Les formules sommatoires de Boole et d'Euler sont généralisables d'une manière analogue.

Les opérateurs  $\Delta$  et  $\nabla$  sont susceptibles d'être introduits sous des signes sommatoires spéciaux, d'où des transformations qui rappellent celles des équations intégrales ; ils engendrent de même une sommation partielle analogue à l'intégration par parties.

L'interpolation apparaît avec les séries de Stirling, de Gauss et Bessel, de Newton et il s'y adjoint naturellement la différentiation et l'intégration *numériques*, c'est-à-dire à effectuer quand on ne connaît que des valeurs isolées de la fonction. Les séries de « facultés » sont, très en gros, des séries à termes analogues à la fonction gamma ; des classes étendues de fonctions admettent un tel mode de représentation.

Nous voici maintenant aux généralités sur les équations aux différences, linéaires et homogènes. La scission entre ces équations et les équations différentielles a son origine en le lemme déjà indiqué : impossibilité, pour la fonction gamma, de satisfaire à une équation différentielle algébrique (Hölder). Mais cette scission n'empêche pas un déroulement analogue des deux théories : équations adjointes, multiplicateurs, cas des coefficients constants, etc. Dans le cas des coefficients rationnels, les théories de Fuchs apparaissent encore. Une théorie spéciale devient possible pour des coefficients développables en séries de facultés.

Une unique équation à  $n$  différences peut être remplacée par  $n$  équations à une seule (Birkhoff). Les équations à second membre relèvent de méthodes dont la première est celle de Lagrange. Il y a aussi des liens avec les équations différentielles d'ordre infini (Hilb).

Les tableaux de différences conduisent à des tableaux de fractions continues livrant notamment la formule d'interpolation de Thiele ; ce sont là de nouveaux instruments dont peuvent profiter à la fois les équations différentielles et les équations aux différences.

Une bibliographie de 67 pages termine le volume. La figure 41, pour nettement distinguer divers chemins d'intégration, a été tirée en trois couleurs. Merveilles d'impression engendrées par une merveille mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

**Th. DE DONDER.** — **Théorie mathématique de l'électricité.** Première partie: *Introduction aux équations de Maxwell*, rédigée par C. Van LERBERGHE. — Un volume in-4° de 200 pages et 82 figures. Prix : 45 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925.

Ce bel ouvrage, présenté comme une Introduction aux équations de Maxwell, est à coup sûr, de ceux dont l'étude conduit, par la voie physique et tangible, aux plus récentes théories de la Physique mathématique moderne. Il y avait beaucoup dans l'œuvre de Maxwell ; c'était un *électromagnétisme* renouvelé, à conséquences *électroptiques* que Hertz ne devait confirmer qu'un quart de siècle plus tard.

Il y avait aussi, ce qui ne fût aperçu que beaucoup plus tard encore, des possibilités de compléments *electrogravifiques*. N'anticipons pas sur cette immense synthèse ; il ne s'agit ici que de la partie électromagnétique allant jusqu'au seuil de l'électroptique, mais chacun sait que M. De Donder est également l'auteur d'une *Gravifique einsteinienne* et la comparaison fournit l'occasion de remarquer, une fois de plus, que les considérations quadridimensionnelles et non euclidiennes de la Gravifique n'interdisent nullement l'usage de l'espace et du temps ordinaires. Cet espace et ce temps semblent constituer des cadres élémentaires et rigides dont tous les phénomènes ne s'accordent pas avec une égale facilité ; nous commençons ici par ceux qui s'en accordent aisément et la meilleure manière de parvenir aux autres est, sans doute, de bien étudier les premiers.

L'enchaînement logique de l'œuvre paraît de toute première qualité et l'esprit synthétique se trouve bien suffisamment satisfait rien que par les nombreux parallélismes qu'offrent les phénomènes électriques et les phénomènes magnétiques.

Mais venons à une analyse détaillée pour laquelle nous respecterons la division en trois Livres adoptée par l'auteur.

**Livre I : Le champ électrostatique.** — L'étude d'un tel champ commence par des généralités qui sont les mêmes que celles relatives à l'attraction newtonienne ; c'est aussi l'occasion de faire connaissance avec les éléments du Calcul vectoriel. Au potentiel et à la force électrique qui en dérive s'associe immédiatement la force électromotrice qui, elle, est relative à une ligne du champ. Le flux de force à travers une surface (théorème de Gauss) se présente très élégamment avec la notion géométrique d'angle solide. Après la loi de Coulomb se manifestent les premières équations de dimensions, puis la conservation de l'énergie électrostatique ainsi que l'égalité de l'action et de la réaction.

En principe, tout ceci doit pouvoir s'étendre au cas où la répartition électrique devient continue, soit en volume, soit en surface. Mais les choses ne vont pas sans minuties de continuité qui se traduisent par des différences essentielles suivant la position des éléments potentielisés par rapport aux ensembles potentiant. Le type de tels résultats est le fameux théorème de

Poisson qui exprime une discontinuité des dérivées secondees du potentiel  $V$  quand on pénètre dans les volumes électrisés.

Avant d'aborder les dérivées partielles du potentiel dû à une surface électrisée, il est nécessaire d'étudier une intégrale en  $\tau d\omega$  où  $d\omega$  est l'angle solide élémentaire.

L'analyse en a toujours été délicate, mais M. De Donder la résume en une règle mnémonique très simple. Le rot  $F$  de la formule de Stokes est interprété cinématiquement comme une vitesse angulaire (tourbillon ou *Wirbel* de Helmholtz). Enfin, toujours quant au point potentiel tendant vers un point  $P$  d'une surface électrisée, il faut signaler les théorèmes de la résultante *normale* bien déterminée et de la résultante tangentielle qui, au contraire, dépend de la loi suivant laquelle une plage entourant  $P$  tend vers ce point. Un remarquable exemple d'indétermination est donné en opposant aux plages circulaires de centre  $P$  d'autres plages ayant subi une ablation segmentaire.

Arrivons à la théorie des conducteurs parfaits caractérisés intérieurement par un potentiel  $V$  constant.

Les questions dominantes concernent ici *l'influence* ; elles entraînent des problèmes de Dirichlet. A noter le rôle du conducteur faisant *écran électrique* par rapport à une cavité. Avec les charges et les *capacités mutuelles* de deux conducteurs s'introduit une analyse de déterminants qu'on pourrait retrouver en beaucoup de questions mais qui a surtout été mise à la mode par la Gravifique.

L'étude de la répartition *dipolaire* peut se ramener, à divers points de vue également ingénieux, à celle de la répartition électrique continue ; on peut parler de *fluide fictif* équivalent à un ensemble de dipôles. La définition de la force électrique  $H$  est facile à conserver ; il en est de même pour la résultante électrique  $R$ , mais, dans le cas où le point potentiel  $P$  est à l'intérieur d'un volume polarisé, cette résultante dépend de la forme de l'alvéole constitué autour de  $P$  ; d'où des études élégantes et à caractère presque exclusivement géométrique pour différentes formes alvéolaires (cylindre allongé, cylindre aplati, sphère, ellipsoïde).

Ceci est très important et fort original. M. De Donder donne même (p. 77) des formules explicites et d'une symétrie remarquable qui montrent, comment, en général,  $R$  diffère de  $H$ . Et ce qui est ainsi établi, pour force et résultante *électriques*, se retrouvera, plus loin, pour force et résultante *magnétiques*.

Le cas de l'alvéole cylindrique aplati conduit à un vecteur formé linéairement avec  $H$  et l'intensité de polarisation  $P$ .

Ce vecteur  $B$  est *l'induction électrique* où le *déplacement* de Maxwell ; il donne des théorèmes analogues à ceux concernant  $H$ .

C'est ainsi qu'il y a un théorème de Gauss pour le flux d'induction et un théorème de Poisson  $\operatorname{div} B = 4\pi\varrho$ .

Le *potentiel vecteur électrique*  $\Pi$  donne un *potentiel vecteur de polarisation*  $V^d$  tel que  $\operatorname{rot} \Pi \equiv V^d$ .

Il est naturellement dû aux dipôles et sa divergence est nulle.

L'évaluation de l'énergie électrostatique peut être dite *microscopique*, si l'on tient compte des dipôles, *macroscopique* dans le cas contraire, mais les deux choses se lient aisément grâce au fluide fictif qui représente l'état polarisé et à l'idée d'*énergie localisée* due à Maxwell.

Un *diélectrique, parfait, homogène et isotrope*, a une intensité de polarisa-

tion  $P$  de la forme  $P^0 + kH$  si  $P^0$  est la *polarisation rémanente* et  $k$  la *susceptibilité*. Cette formule binôme classe immédiatement les diélectriques en *polarisés, doux paraélectriques, doux diaélectriques, permanents, non polarisables*. Là encore, les densités fictives obéissent à des lois linéaires très simples et à une équation de Poisson généralisée ; aux surfaces de contact entre conducteurs et diélectriques apparaissent des conditions aux limites qui ont déjà notablement exercé le talent mathématique. Pour les diélectriques solides, la théorie des *pôles* est une géométrie des *charges* tout à fait analogue à la géométrie des masses dans la théorie des centres d'inertie.

*Une couche de glissement*, dans un volume d'abord neutralisé, provient d'une translation *infiniment petite* de l'un des fluides, du fluide positif, par exemple. Evidemment le caractère dipolaire doit immédiatement apparaître, mais il apparaît alors d'une manière infinitésimale particulièrement simple ; des interprétations par répartition superficielle s'offrent sans peine dans les cas remarquables de la *sphère de Mossotti* et de l'alvéole sphérique.

Pour l'ellipsoïde, il faut bien connaître la théorie du potentiel ellipsoïdal ou avoir quelque idée des coordonnées elliptiques mais le paragraphe contient tout ce qui est nécessaire à cet égard. Les esprits comparateurs pourront se reporter aux *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme* de P. Duhem ou au *Traité de Mécanique* de M. P. Appell.

Au sujet de la répartition dipolaire en surface, nous retrouvons les surfaces génératrices de discontinuités pour la force électrique ; il y a toujours une *réfraction de la force électrique*, phénomène que la dipolarité ne paraît pas compliquer de manière spéciale.

**Livre II : Le champ électromagnétique stationnaire.** — Nous abordons l'électricité en mouvement *stationnaire* avec la notion fondamentale de *courant de convection*  $C = \rho V$ . Ces courants se peuvent considérer dans les volumes et sur les surfaces, d'où une dualité rendue particulièrement manifeste par M. De Donder qui a été jusqu'à diviser les pages en deux parties pour présenter, à gauche, les propriétés du courant spatial et, à droite, en regard, avec comparaison faite alinéa par alinéa, les propriétés correspondantes du courant superficiel.

Le rotor du potentiel vecteur conduit à la *force magnétique* aisément exprimable, à son tour, sous une forme intégrale qui constitue la *loi de Biot et Savart*.

Les relations maxwelliennes commencent à apparaître dès que l'on cherche à lier potentiel vecteur, force magnétique et courant de convection. Notons encore qu'au *tube de courant* spatial correspond le *ruban de courant* superficiel. Au courant élémentaire  $\delta J$ , passant dans le tube ou dans le ruban, correspond encore une expression intégrale en  $\omega(A) \delta J$  soit  $\mathcal{O}$ . Alors  $\omega(A)$  est de la nature d'un angle spatial et la force magnétique  $\mathcal{H}$  est — grad  $\mathcal{O}$ .

On a ainsi un *potentiel scalaire*  $\mathcal{O}$  dû aux courants *fermés*  $J$ .

La *force magnétomotrice* s'introduit par intégration de la force magnétique le long d'une ligne fermée du champ.

La considération des conducteurs parfaits nous amène à la loi de Laplace, au théorème d'Ampère, bref aux forces mécaniques agissant entre éléments de courant ; l'accord avec les idées énergétiques de Maxwell est bien digne d'être remarqué.

La répartition dipolaire magnétique, en volume et en surface, rappelle l'étude précédemment faite dans le cas dipolaire électrique. On voit d'abord

qu'à grande distance un courant fermé donne le même potentiel qu'un dipôle *fictif* à charges magnétiques.

Il y a un potentiel vecteur de polarisation magnétique interprétable aussi par les courants fictifs et une énergie magnétique saisissable tantôt microscopiquement, tantôt macroscopiquement.

Les pôles magnétiques, les couches de glissement, les doubles couches magnétiques reviennent toujours comme dans la théorie dipolaire électrique ; il n'y a même pas lieu de trop insister sur ces analogies, car ce serait paraître croire que l'électromagnétisme est découvert d'hier. Répétons plutôt que Maxwell et les théoriciens les plus modernes peuvent prétendre à l'accord le plus esthétique avec des devanciers déjà lointains, tels Laplace et Ampère.

**Livre III : Le champ électromagnétique variable.** — Il s'agit maintenant du champ à support matériel invariable, mais en lequel les modifications électromagnétiques peuvent être quelconques. Il est régi par les *équations de Maxwell* proprement dites, lesquelles proviennent, en partie, de conservations de propriétés des inductions électrique et magnétique, d'autre part, de variations de ces propriétés faites d'accord avec les vues de Faraday, le tout harmonisé par une symétrie vectorielle assurant, une fois de plus, le rapprochement entre l'électricité et le magnétisme.

A noter que ces fameuses équations de Maxwell, prises ici sous une forme aussi générale que possible, n'en sont pas moins du type analytique qui correspond à l'évanouissement de deux intégrales doubles portant chacune sur une forme différentielle du type

$$M_{ij} dx_i dx_j \quad \text{avec} \quad M_{ij} = -M_{ji} .$$

et  $i, j$  prenant les valeurs 1, 2, 3, 4. Ceci est d'une grande importance pour l'électrogravifique. Cf. *L'Ens. math.*, T. 24, 1924-25, p. 203.

A ces équations différentielles s'associent immédiatement des théorèmes intégraux ; elles sont accompagnées par des conditions aux limites d'une étude plus épineuse que celle des équations mêmes, ce qui, répétons-le, ne surprend plus les mathématiciens de la Physique. Elles sont, par contre, heureusement transformables, grâce aux potentiels électromagnétiques, en équations *dalemberttiennes*, où l'on retrouve les formes à la Poisson intuitivement étendues.

Elles s'accompagnent également d'un théorème concernant la conservation de l'énergie, théorème qui se présente sous une forme intégrale assez complexe tenant compte de l'effet Joule, de l'énergie électromagnétique, des énergies mises en jeu par les forces électriques, des énergies dissipées par hystérèses électrique et magnétique.

La somme de toutes ces variations d'énergies, par unité de temps, est une intégrale portant sur le *vecteur radiant* de Poynting.

Enfin, on sait que Maxwell a imaginé toute une mécanique de tensions et de pressions ressemblant à celles de l'élasticité, mais ne provenant cependant que de l'action du champ électromagnétique. Les vecteurs s'y élèvent à la dignité de *tenseurs*, ce qui fait d'ailleurs percevoir la marche parfaitement continue qui a prolongé l'Electromagnétisme par la Gravifique. Et nous voici parvenus à la fin de ce premier et magnifique volume où la plus grande généralité possible a certainement voisiné partout avec la simplicité maximum. N'oublions pas cependant les dernières pages avec leurs

riches tableaux d'unités et de dimensions ; ces tableaux sont d'ailleurs suivis d'explications permettant des choix aisés suivant la nature des simplifications que l'on peut avoir à souhaiter. Citons aussi, dans cet ordre d'idées, le système de Lorentz-Heaviside qui donne aux équations de Maxwell la forme vraisemblablement la plus réduite.

Un autre tableau récapitulatif des opérations vectorielles contient de véritables définitions de ces opérations. On voit que partout se révèle le souci d'être complet. Un tel ouvrage manquait aux physiciens et aussi aux mathématiciens intéressés par la Gravifique mais insuffisamment érudits en l'Electromagnétisme qui y a conduit.

A. BUHL (Toulouse).

**M. LECAT.** — **Coup d'œil sur la Théorie des Déterminants supérieurs dans son état actuel.** — Un fascicule grand in-8° de 60 pages. Prix : 10 francs. F. Ceuterick, Louvain, 1926.

Le prodigieux travail de M. Maurice Lecat, sur les déterminants à  $n$  dimensions, est universellement connu. Le fascicule que nous signalons ici n'est d'ailleurs qu'un résumé devant servir de préface à un grand et nouvel ouvrage en trois volumes.

Le sujet est ingrat, mais d'une manière assez spéciale ; il ne l'est certainement pas intrinsèquement et a été jugé tout autrement par Cayley, Sylvester Kronecker..., en attendant qu'il enthousiasme M. Lecat lui-même. Il est ingrat, parce que des préventions assez injustes sont dressées contre lui ; on le croit pauvre en applications. De plus, il nécessite, dans l'hyperespace, un sens topologique particulièrement précis. Alors qu'en géométrie à  $n$  dimensions on peut souvent raisonner sur des étendues continues, sans en localiser bien exactement les éléments, on ne saurait se permettre un tel vague avec des matrices dont les éléments ont besoin d'être exactement localisés pour avoir un signe précis ou une signification non équivoque. Ce n'est plus l'hyperespace défini en vertu de généralités analytiques ; c'est l'algèbre même qui envahit cet hyperespace, au lieu de se borner à le représenter. Or, il suffit de dépeindre les choses de cette manière pour avoir confiance en la théorie. Ce n'est pas au moment où les extensions géométriques de tout genre font florès qu'une extension algébrique peut continuer à souffrir d'un singulier ostracisme.

D'ailleurs, les meilleurs auteurs qui ont écrit sur les déterminants à deux dimensions, même dans des ouvrages classiquement rédigés et déjà assez loin de nous au point de vue historique, ont tenu à honneur de présenter les permutations à deux indices d'une manière qui appelle manifestement le cas d'indices en nombre quelconque. Tel est, par exemple, le cas de M. Mansion qui, non seulement, place ses *Eléments de la Théorie des Déterminants* (1883) sous les auspices de la fameuse devise de Sylvester, reprise par M. Lecat, « Algebra upon algebra », mais qui, dans une note (p. 22), indique nettement la génération extensive et logique des déterminants supérieurs avec citation de ses principaux créateurs. L'extension en litige a donc de profondes racines dans le passé ; les abondants rameaux qu'elle peut donner à l'heure actuelle résultent d'une évolution naturelle qui ne peut tourner qu'à l'avantage de l'Algèbre.

A. BUHL (Toulouse).

M. KRAITCHIK. — **Le Problème des Reines.** — Un fascicule in-4° de 24 pages. Prix : 7 francs. « L'Echiquier ». Bruxelles, 1926.

Ce n'est pas sans curiosité que j'ai parcouru ce fascicule écrit par un mathématicien de talent. Rien n'est plus banal, en effet, que d'entendre les joueurs d'échecs invoquer les mathématiques à tort et à travers, cependant que beaucoup de mathématiciens dédaignent le jeu. Un passage de Diderot, cité par M. Kraitchik, confond les deux classes d'individus dans une même réprobation, attendu que « la *chose* du mathématicien n'a pas plus d'existence dans la nature que celle du joueur ». Diderot n'avait pas l'esprit hellène !

Ici les *chooses* sont fort bien mises en place. Il y a des questions communes aux mathématiques et au jeu d'échecs et, plus précisément, il y a des questions mathématiques qui empruntent leurs données au même jeu.

Sur l'échiquier ordinaire, de 64 cases, le problème des 8 reines consiste à placer celles-ci de telle manière qu'aucune ne puisse être prise par une autre. Or, c'est là un problème très mathématique, déjà traité, en partie, dans les *Récréations* d'Edouard Lucas, généralisable pour le cas de  $n^2$  cases, qui admet des symétries, des rotations, des réflexions, des groupes permettant de construire des ensembles de solutions à partir de l'une d'elles. L'auteur a pu former ainsi des tableaux arithmétiques d'une condensation ingénieuse, ce qui ne l'a pas empêché d'illustrer son exposition de nombreux échiquiers dont l'un a jusqu'à 625 cases. Dans de tels développements, le mathématicien domine certainement le joueur.

A. BUHL (Toulouse).

P. LÉVY. — **Analyse fonctionnelle** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. V). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1925.

L'auteur des *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, professées au Collège de France et publiées en 1922, a dû considérer comme un simple divertissement d'écrire ce fascicule qui peut jouer, quant aux *Leçons* précédentes, le rôle d'une Introduction d'une très grande clarté.

Il s'agit des *fonctionnelles* définissables, si l'on veut, comme fonctions des  $n$  valeurs fixes que l'on peut attribuer approximativement à une  $x(t)$ , dans les  $n$  intervalles partageant le segment  $t(0, 1)$ , mais quand  $n$  croît indéfiniment.

A cette limite, l'idée ne renferme plus rien d'approximatif et la fonctionnelle est une sorte de fonction, d'une infinité de variables, représentable dans un espace fonctionnel à une infinité de dimensions. Cet espace possède sa géométrie et rien que ceci suffirait à le légitimer. De plus, des fonctionnelles linéaires, quadratiques... apparaissent sous forme intégrale à partir de formes linéaires, quadratiques... ordinaires.

Les variations fonctionnelles conduisent aux dérivées fonctionnelles et ceci donne une origine des plus naturelles à une foule d'équations intégrales (Fredholm, Volterra...).

Les équations aux dérivées fonctionnelles généralisent les équations aux différentielles totales ; leur condition d'intégrabilité revient à une perméabilité des dérivées partielles, ce qui les rapproche précisément de tant d'autres équations d'analyse courante. L'intégration ici généralisée admet également une extension de la théorie des caractéristiques de Cauchy accom-

pagnée, ce qui est fort naturel, d'une autre extension concernant les équations de Jacobi-Hamilton.

L'intégration dans le domaine fonctionnel donne lieu à des considérations fort curieuses. Deux volumes semblables sont en rapport  $k^n$  dans l'espace à  $n$  dimensions ; or, pour  $n$  infini, deux étendues fonctionnelles sont en rapport nul ou infini. On ne juge alors de tels rapports qu'avec les notions d'ensemble, de mesure, de nombres transfinis...

L'espace *différentiel* de M. Norbert Wiener est un espace à coordonnées probables déjà considéré sous d'autres espèces par R. Gateaux. L'espace, très habituel et à deux dimensions, nous manque pour en dire davantage mais ceci suffira certainement pour diriger bien des curiosités vers l'exposition simple et brillante du fascicule de M. Paul Lévy.

A. BUHL (Toulouse).

**E. GOURSAT.** — **Le Problème de Bäcklund** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. VI). — Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1925.

Le problème de Bäcklund, au sens *strict*, consiste à déterminer deux éléments de surfaces  $x, y, z, p, q$  et  $x', y', z', p', q'$  liés par *quatre* relations données à l'avance. Au sens *large*, il faut entendre que, des deux surfaces qui se correspondent ainsi, l'une d'elles peut dégénérer en une courbe et même en un point.

La résolution de ce problème n'était point aisée et M. Goursat semble y travailler depuis plus de vingt ans, parmi, bien entendu, tant et tant d'autres beaux travaux qui occupèrent le même savant. Aujourd'hui, on peut considérer la question comme résolue ; c'est un prolongement de la théorie des transformations de contact, une sorte de réplique de la théorie des groupes qui, comme cette dernière, revêt sa forme la plus simple par l'usage judicieux des formes de Pfaff accompagnées de la notion de covariant bilinéaire.

Il peut arriver que les  $z$  et  $z'$  des surfaces en correspondance satisfassent à des équations aux dérivées partielles du second ordre, soit du type de Monge-Ampère, soit d'un type plus complexe ; on passe alors de l'une à l'autre équation par une *transformation de Bäcklund* et c'est peut-être ce dernier point de vue qui a le plus fait pour l'extension d'une théorie qui fut d'abord d'origine géométrique avec les surfaces à courbure totale constante et celles de Weingarten. C'est ainsi que l'on trouve déjà l'étude de la « Transformation de M. Bäcklund » dans la *Théorie des Surfaces* de Gaston Darboux (T. III, p. 438). G. Darboux déplorait alors la non originalité véritable de la dite transformation, combinaison de deux autres dues à Lie et Bianchi. Maintenant les choses sont généralisées de manière telle, dans le domaine analytique, que le problème de Bäcklund et les transformations y attachées ont une originalité indéniable, une grande et puissante généralité quant aux changements de formes dont les équations aux dérivées partielles sont susceptibles.

Le Maître qui a le plus travaillé le sujet, je veux dire M. Goursat, a naturellement aiguillé vers celui-ci les recherches de plusieurs de ses élèves. Qu'il me soit permis de donner un dernier souvenir à la mémoire de l'un de ceux-ci, à celle du brave Jean Clairin, tué à l'ennemi au cours de la Grande Guerre.

A. BUHL (Toulouse).

A. BUHL. — **Séries analytiques. Sommabilité.** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. VII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1925.

La question fondamentale envisagée dans ce fascicule est celle du prolongement analytique. Dans le champ complexe, l'origine O n'étant pas un point singulier, on a un développement taylorien valable, autour de O, dans un certain cercle de convergence C. Les  $n + 1$  premiers termes d'un tel développement sont des *polynômes tayloriens*  $s_n$ . Avec ceux-ci et des termes  $c_n$  appartenant au développement d'une fonction *entièr*e  $f(\xi)$ , on forme des séries à terme général  $c_n s_n$ . Ce sont ces séries de polynômes, ou certaines de leurs formes limites, qui réalisent, hors de C, des prolongements de plus en plus étendus donnant finalement l'*étoile* de M. G. Mittag-Leffler. L'idée essentielle du procédé n'est pas sans couleur philosophique. Les  $s_n$ , pour  $n$  croissant indéfiniment, donnent, hors de C, des séries animées d'un détestable esprit de divergence. Les  $c_n$ , termes d'une  $f(\xi)$  *entièr*e, appartiennent à des séries convergeant dans tout le champ complexe des  $\xi$ . Que va-t-il se passer dans les séries en  $c_n s_n$  ; qui l'emportera de la tendance nihiliste des  $s_n$  ou du caractère d'ordre des  $c_n$  ? Eh bien, la victoire est pour les  $c_n$  ; voilà une consolation à opposer à la crainte des dangers révolutionnaires !

Une telle théorie ne va évidemment pas sans l'étude des fonctions sommatoires  $f(\xi)$ . Celle-ci nous conduit aux fonctions entières qui ne croissent en module, au-delà de toute limite, que dans un angle de sommet O et d'ouverture pouvant diminuer indéfiniment. Cet angle peut même se réduire à une demi-droite, laquelle peut disparaître à son tour, d'où la fonction entière qui tend vers zéro, au point à l'infini, dans toutes les directions *rectilignes* issues de O. Ceci n'est pas en contradiction avec le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass, car la fonction peut devenir infinie à l'infini en suivant d'autres chemins que de tels rayons vecteurs.

Signalons encore les curieux résultats obtenus avec la fonction sommatoire  $\sigma$ . Une  $F(z)$  peut alors être représentée non dans tout le continu du champ complexe, mais seulement sur certains ensembles dénombrables y contenus.

Belles théories à intérêt provenant souvent d'apparances paradoxales qui, toutefois, ne sont bien que des apparences.

H. FEHR.

Th. DE DONDER. — **Introduction à la Gravifique Einsteinienne** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. VIII). — Un fasc. gr. in-8° de 58 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1925.

M. De Donder se propose de publier, dans le « Mémorial », au moins trois fascicules sur la Gravifique. Le premier, que voici, est consacré à l'étude de l'espace et du temps suivant une méthode qui s'inspire directement des procédés créés par Einstein en Relativité *générale*. Ceci est de bon augure et paraît diminuer très heureusement le rôle de la Relativité dite *restreinte*. A ce dernier point de vue, il semble bien que des idées par trop simples aient été introduites dans la Science. On a abusé de la transformation de Lorentz pour expliquer des phénomènes complexes se rapportant au mouvement de la Terre, en semblant oublier que cette transformation n'était autre chose, au fond, qu'une rotation d'axes rectangulaires et qu'à un aussi minime appareil, il y avait quelque imprudence à faire correspondre trop de faits d'une observation d'ailleurs fort difficile. Ici la transformation de

Lorentz est mise exactement à sa place ; elle est attachée à l'espace de Minkowski. Cet espace est l'espace lumineux par excellence ; étalons et horloges y sont déterminés par des jeux de lumière. La géométrie et la cinématique y ont le caractère rigoureux et inébranlable des constructions mathématiques ; il reste simplement à savoir quelles sont celles de nos expériences physiques qu'on peut considérer comme minkowskienne.

Or, Einstein suppose précisément qu'il existe d'autres champs, dans lesquels le lumineux réseau minkowskien demande des adjonctions d'un caractère plus *matériel* et ne constitue plus qu'une *carte* qui est d'ailleurs fort commode pour la construction du  $ds^2$  *physique*. C'est alors qu'interviennent les considérations sur la courbure de l'espace représentées ici par le théorème du déplacement parallèle généralisé, de la translation géodésique. M. De Donder arrive tout naturellement à ces notions en comparant, avec la carte, les premiers termes tayloriens de l'approximation einsteinienne.

Il termine par une Cinématique dissociable dans l'espace et le temps ordinaires ; ses vitesses s'associent au déplacement parallèle et permettent de définir les accélérations conduisant à une extension du théorème de Coriolis. Ainsi les généralités actuelles se différencient aussi peu que possible de la trame encore classique ; pour empêcher des confusions comme il y en a tant eu dans ces régions si délicates, le savant auteur distingue le spectateur physicien du spectateur mathématicien. Espérons que ceux-ci s'uniront quand ils sauront reconnaître exactement quels liens doivent les unir.

A. BUHL (Toulouse).

E. CARTAN. — **La Géométrie des Espaces de Riemann** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. IX). Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1925.

Les théories des  $ds^2$  riemanniens, jugées difficiles jusqu'en ces dernières années, tendent maintenant vers une simplicité sans égale. Il fallait surtout bien préciser l'instrument analytique qui était approprié à une telle étude. Dans le bel arsenal des travaux de M. Cartan, ce sont les formes de Pfaff qui jouent le rôle fondamental ; ce sont elles qui permettent de bâtir, avec la plus grande aisance, le calcul différentiel absolu et il semble fort probable qu'on ne trouvera jamais mieux dans cet ordre d'idées. Rien de plus simple que d'exprimer que l'espace est ou non euclidien, de construire les symboles de Christoffel et de Riemann, d'aborder la théorie du parallélisme généralisé selon Levi-Civita, Weyl ou Eddington. Si l'on s'en tient strictement à l'espace riemannien, le parallélisme est d'abord celui de Levi-Civita. C'est le parallélisme ordinaire sur un plan, conservable quand le plan est roulé en développable et transportable, de A en B, sur une surface quelconque S quand, le long du chemin AB, on circonscrit à S une développable. Alors différents chemins allant, sur S, de A en B, donnent, en B, des vecteurs différents quoique tous issus, par parallélisme, d'un même vecteur associé d'abord à A. Ainsi se trahit la *courbure* de la surface ou plus généralement de la variété. Cette courbure, une fois conçue, peut être définie de bien des manières, toutes fort géométriques et susceptibles de généralisations. D'abord bivectorielle, elle est devenue *p*-vectorielle et il ne faudrait pas croire qu'il y ait là des abstractions éloignant l'idée de courbure des sens tangibles des théories d'Euler et de Gauss. M. Cartan nous montre soigneusement comment ces diverses idées se relient.

Les espaces de Riemann ont toujours une première représentation très intuitive en la surface  $S$  qui a deux dimensions dans l'espace à trois ; ils sont formés de fragments infiniment petits de nature euclidienne, de même que  $S$  est formée, si l'on veut, de facettes planes infiniment petites. Bien que cela ne soit pas nécessaire, on peut les étudier en les considérant comme plongés dans des hyperespaces euclidiens.

Que de belles choses, que de merveilleuse harmonie, laissant loin le point de vue euclidien ordinaire. Pour ceux qui croient à la Science esthétique, ceci n'est-il pas suffisant pour donner droit de cité aux Théories d'Einstein ?

A. BUHL (Toulouse).

P. HUMBERT. — **Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. X). Un fasc. gr. in-8° de 58 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Peu de points restent, à l'heure actuelle, obscurs dans la théorie des équations différentielles, du type fuchsien, admettant trois singularités. On ne saurait en dire autant des équations du même type en admettant quatre ; ces dernières peuvent se réduire à une forme due à Karl Heun, forme dans laquelle on peut distinguer l'équation de Lamé, comme cas particulier, et l'équation de Mathieu, comme cas de confluence. Ces équations ont un grand rôle dans les applications physiques et, d'ailleurs, Klein et Bôcher ont fait cette curieuse remarque que toutes les fonctions jouant un rôle en Physique mathématique satisfont à une équation obtenue par confluence à partir du type à cinq singularités : équations de Lamé, de Mathieu, de Riemann-Gauss, de Weber, de Bessel, de Stokes. Le présent fascicule n'est donc pas une étude, plus ou moins fortuite, de fonctions particulières ; c'est l'Introduction naturelle à l'étude de piliers fondamentaux de la Science.

Les fonctions de Lamé naissent très simplement lorsque, l'équation de Laplace, à trois variables, étant écrite en coordonnées elliptiques  $q, \mu, \nu$ , on en cherche une solution de la forme  $R(q) M(\mu) N(\nu)$ . C'est, toutes réductions faites, une équation différentielle linéaire, du second ordre, sans second membre, à coefficient elliptique ; dès que l'on en possède une solution particulière, par fonctions de Lamé de première espèce, on peut, par les procédés élémentaires bien connus, en trouver une autre par fonctions de Lamé dites alors de seconde espèce. D'où l'intégrale générale. Les dégénérescences vers des fonctions plus simples sont nombreuses ; les applications et les généralisations ne le sont pas moins. Les figures d'équilibre d'un fluide en rotation, les tourbillons, la déformation des surfaces et tant d'autres questions de mécanique ou de géométrie conduisent inéluctablement aux fonctions de Lamé.

L'équation de Mathieu naît aussi d'un problème physique (vibrations d'une membrane elliptique). Constituée comme l'équation de Lamé, son unique coefficient n'est que trigonométrique. Cependant, l'élévation de la théorie n'est pas moindre. On intègre encore par fonctions de Mathieu de deux espèces différentes. Par applications à la Physique indéniablement moderne, la seconde équation est plus proche de nous que la première ; c'est ainsi qu'elle intervient dans l'étude des oscillations hertziennes à la surface d'un sphéroïde. Mieux peut-être que l'équation de Lamé, elle se rattache aux équations intégrales. De tous côtés, dans de tels exposés, appa-

raissent les plus remarquables résultats transcendants nés, non de l'abstraction, mais d'énoncés physiques généralement très simples.

A. BUHL (Toulouse.)

**G. BOULIGAND.** — **Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. XI). Un fasc. gr. in-8° de 52 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Le domaine, exploré ici — et combien savamment — par M. Bouligand, donne une excellente idée de la portée des conceptions d'analyse qui se sont surtout développées depuis le commencement du siècle : généralisations intégrales telles que celle de Lebesgue, calcul fonctionnel, lemmes de croissance, etc.

Le Problème de Dirichlet est d'origine physique ; il consistait d'abord à trouver la distribution de la température dans un solide chauffé, par sa surface externe, suivant un mode connu. Il a été étendu à l'hyperespace et M. Bouligand y voit effectivement la recherche d'une fonction harmonique de  $n$  variables prenant des valeurs données sur une frontière donnée. Les procédés intégraux abondent immédiatement ce qu'on aperçoit déjà avec la théorie du potentiel dans l'espace ordinaire : théorème de Gauss, équation de Poisson, etc. Mais il faut ici, toujours dans l'hyperespace, faire jouer un rôle particulièrement important au théorème de la moyenne qui fait d'une fonction harmonique une fonction invariante par *médiation sphérique*.

La notion de « fonction de Green » est également primordiale ; cette fonction offre cette opposition qu'elle peut s'introduire dans des formules intégrales par sa *dérivée normale*. Elle conduit aussi à une première équation aux *dérivées fonctionnelles*.

La fonction harmonique à déterminer admet, en général, la frontière à distribution donnée comme variété singulière. On peut d'abord chercher à construire (principe de Picard) une telle fonction dans le cas, d'apparence relativement simple, d'une seule source frontière, tout le reste de cette frontière étant maintenu au zéro. Il faut imaginer aussi des sources d'absorption. On conçoit, de plus, que l'arbitraire qui préside au choix des sources permet de discriminer les modes de variation de la fonction harmonique dans le voisinage de ces sources mêmes ; c'est de là que provient l'important « principe de la séparation des croissances ».

Le laplacien se transforme avec le  $ds^2$  à  $n$  variables, d'où des équations solitaires de l'équation de Laplace étudiées dans le fascicule X du Mémorial (P. Humbert). Quant à la méthode absolument générale, elle tend à s'affranchir des équations intégrales, introduisant trop de restrictions propres à leur nature et non au problème, et à recourir à l'équation aux *différences finies* des *fonctions préharmoniques* ; ces fonctions sont uniquement définies aux *nœuds* d'un *réseau* par des valeurs moyennes de celles prises aux *nœuds* voisins. Mieux vaut renoncer à l'analyse bibliographique en abordant ces merveilles de l'Analyse mathématique. Nous n'apprendrons d'ailleurs à personne combien est grand le retentissement des travaux de M. Bouligand ; le jeune et brillant géomètre vient de faire un cours étendu à l'Université de Cracovie, cours résumé en un nouveau Mémoire *Sur le Problème de Dirichlet*, publié, en 1925, dans les « Annales de la Société polonaise de Mathématiques ». Nul doute que les lecteurs du « Mémorial » ne soient au

moins aussi enthousiastes de toute cette grande œuvre que les professeurs et les étudiants de l'Institut mathématique de Cracovie.

A. BUHL (Toulouse.)

**R. GOSSE.** — **La Méthode de Darboux et les équations**  $s = f(x, y, z, p, q)$ . (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. XII). Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

L'étude entreprise d'abord est celle de l'équation du second ordre, en  $x, y, z, p, q, r, s, t$ , avec la notion générale de caractéristique. On peut se proposer de procéder, comme pour les équations de premier ordre, par adjonction d'une autre équation  $E$  à celle que l'on désire intégrer. Mais alors que la méthode, pour le premier ordre, dépend d'une fonction arbitraire, elle ne donne généralement, au second ordre, qu'un système s'intégrant avec des constantes. N'est-il pas possible de procéder de telle sorte que ces constantes soient en nombre infini ?

Cette première et importante question est résolue par l'affirmative quand  $E$  est en *involution* avec la proposée. Il en est ainsi, et l'involution est d'ordre  $n$ , quand les dérivées d'ordre  $n + 1$ , formées pour le développement taylorien de l'intégrale commune, sont données par des équations dont l'une rentre dans les autres. L'involution peut n'avoir lieu qu'en tenant compte de  $E$ , ou  $\varphi = 0$  ; elle peut avoir lieu, plus généralement, avec  $\varphi = c$ . Il y a alors *invariant* d'ordre  $n$ . C'est un des points les plus attachants de l'exposé de M. Gosse que de développer tous les liens qui unissent les caractéristiques et les invariants. La théorie est puissante et se révèle plus générale que ne pourraient le faire supposer ses prémisses. Ainsi, pour deux équations en involution, il pourrait déjà sembler joli que l'infinité de constantes disponibles permette de faire passer une intégrale commune par une courbe arbitraire ; or, on trouve mieux, cette intégrale commune dépendant encore d'un nombre fini de constantes.

Les équations intégrables par la méthode de Darboux sont des équations à invariants distincts, ceux-ci dépendant de trois involutions d'ordre différent et supérieur à 3. De telles équations sont alors recherchées par l'auteur dans le type  $s = f$ . Malgré la forme relativement réduite de cette équation, la transcendence est encore redoutable ; on retrouve surtout ici, comme types maniables, les types envisagés par Laplace, Lie, Moutard, Darboux, Goursat, Clairin, Gau... C'est, en tout cas, une belle liste de cas d'intégrabilité ou de réduction à des formes canoniques remarquables. Restent les équations  $s = f$  à intégrale intermédiaire ; il y a, là encore, des formes de  $f$  à discriminer avec habileté.

Intéressant fascicule revenant naturellement sur nombre de notions acquises à la Science mais avec une originalité brève, où l'auteur apporte la lumière de travaux récents, personnels et étendus.

A. BUHL (Toulouse).

**A. VÉRONNET.** — **Figures d'équilibre et Cosmogonie** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. XIII). Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Ce fascicule semble écrit avec une facilité extrême dans un domaine où abondent les analyses touffues, comme celles de Tisserand, à côté des

exposés concis mais ardu de Poincaré. Le cas d'un liquide *homogène* en rotation est illustré, dès la seconde page, par les figures ellipsoïdales d'équilibre qui sont aussi bien les ellipsoïdes de révolution de Mac-Laurin que les ellipsoïdes quelconques de Jacobi. Suivent des discussions visant successivement les variations de la forme géométrique, du moment cinétique et de la densité. Les ellipsoïdes de Mac-Laurin admettent des figures dérivées, *zonales*, *sectoriales*, *tesserales*; ceux de Jacobi « bifurquent », pour parler comme Henri Poincaré, vers des formes ovoïdes dites *piriformes* par l'illustre géomètre qui croyait qu'elles pouvaient s'étrangler en forme de poire. Un autre jacobien critique donne des formes renflées ou déprimées aux extrémités.

Dans le cas d'une masse hétérogène, nous trouvons d'abord l'importante théorie de Clairaut, puis une formule de D'Alembert liant l'aplatissement à des moments d'inertie. Poincaré renouvelle la question en donnant une limite de cet aplatissement indépendante de toute loi de densité; ce ne fut d'abord qu'une première approximation maintenant suivie d'une seconde due à M. Véronnet lui-même. La question se complique avec celle des formes plus approchées que l'on a voulu attribuer à la planète : tétraèdre, fuseau, ove.

On peut étudier maintenant l'équilibre d'un astre et de son atmosphère sous l'action d'un autre astre perturbateur. On passe de là à l'hypothèse cosmogonique de Laplace, à la figure des comètes et à celle de la Lune, travaux dus surtout à Roche. L'anneau de Saturne fait aussi partie des mêmes considérations. Une très mince couche de particules peut être équilibrée à grande distance d'un centre stellaire par la pression de radiation; ce peut être là une nouvelle photosphère ou surface visible pour les étoiles géantes.

Les questions de cosmogonie ou de structure de l'Univers peuvent être indéfiniment variées; M. Véronnet penche pour la conception einsteinienne d'un Univers fini. « Les limites de notre Univers seraient d'ailleurs relatives à l'observateur et voyageraient avec lui ». Quant à l'évolution thermodynamique, M. Véronnet examine la dégradation de l'énergie et la mort universelle, mais aussi la concentration énergétique, par condensation des amas et nébuleuses, qui pourra rajeunir indéfiniment le Cosmos. Le géomètre-astronome qui a écrit ces pages est doublé d'un profond philosophe.

A. Buhl (Toulouse).

F. Gomes TEIXEIRA. — **Panegíricos e Conferências.** Un vol. gr. in-8º de XII-318 pages. Imprensa da Universidade. Coimbra. 1925.

*L'Enseignement Mathématique* a déjà eu l'occasion de signaler l'activité, avec laquelle M. Francisco Gomes Teixeira se prodigue, tant à l'étranger qu'en Portugal, soit comme mathématicien soit comme historien de la Science (Cf. t. XXIII, 1923, pp. 137, 214, 217). Le savant portugais, suivant une exposition dont nos lecteurs ont eu un premier aperçu, a fait à Rome, au printemps de 1925, une nouvelle conférence sur *L'Œuvre des Mathématiques en Portugal du XV<sup>e</sup> au XVIII<sup>e</sup> siècle* (Memorie della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei; vol. VI-VII). Soulignons que cette conférence a été faite en français.

Dans le même ordre d'idées, M. Gomes Teixeira vient de publier des *Panegíricos e Conferências* qui se rapportent d'abord aux quatre géomètres

Pedro Nunes, José Monteiro da Rocha, José Anastacio da Cunha et Daniel Augusto da Silva. On trouvera précisément quelques lignes sur chacun d'eux dans l'article publié ici même, en 1923, et ces lignes peuvent évidemment servir d'invitation à se reporter au nouvel exposé, incomparablement plus détaillé, concernant cette mathématique portugaise qui, d'origine nautique, n'en embrassa pas moins les parties les plus abstraites de l'Algèbre et de la Géométrie.

Vient ensuite dans le nouveau volume une *Conferéncia sobre quatro mulheres célebres na historia da Matematica*. Quatre femmes célèbres. Ce sont Hypatie, Maria Agnesi, Sophie Germain, Sophie Kowalevsky. Les trois dernières sont bien connues ; la première l'est moins et il faut savoir gré à l'auteur de rappeler à l'attention cette mathématicienne et philosophe qui professa à Alexandrie vers la fin du quatrième siècle, y fut remarquée tant pour sa beauté que pour son savoir et fut finalement massacrée comme païenne avec la plus fanatique et la plus affreuse cruauté.

Signalons encore deux autres Conférences *Sobre a Astronomia na Obra de S. Tomas de Aquino*, *Sobre o poder e a beleza da Matematicas* et enfin un discours inaugural intitulé *Colaboração dos Espanhois e Portugueses nas grandes navegações dos séculos X V e XVI*. Nous ne pouvons guère donner que ces titres. Ils suffisent à dépeindre M. Gomes Teixeira, sachant trouver la Science alliée avec la Foi, ayant foi dans la beauté de la Science et enfin n'oubliant point les collaborateurs voisins qui, poussés aussi par une foi exploratrice, ont aidé les Portugais à découvrir le monde.

A. BUHL (Toulouse)

LUDWIG SCHLESINGER. — **Automorphe Funktionen** (Göschens Lehrbücherei, Gruppe 1: Reine Mathematik, Band 5). — 1 vol. gr. in-8°, x et 205 p., avec 53 fig.; broché M. 8, relié M. 9,20; Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1924.

Destiné à initier les étudiants en mathématiques à la théorie des fonctions automorphes, le livre de M. Schlesinger, qui contient la matière des leçons, partiellement remaniées, faites par l'auteur en 1920-21 à l'Université de Giessen, vient prendre une place qu'on sentait vide. Les excellents livres de M. Giraud et de M. Fubini, qui se placent à un point de vue très élevé en envisageant dès le début les fonctions automorphes de plusieurs variables et le grand ouvrage de Fricke-Klein qui résume la plupart des résultats acquis à cette théorie depuis la publication des premiers mémoires de Poincaré, ne s'adressent pas aux commençants. Le livre de M. Schlesinger est donc appelé à rendre de réels services aux étudiants de nos facultés, où la théorie des fonctions automorphes n'est que fort rarement enseignée.

Laissant de côté certains prolongements que la pensée de Poincaré et de Klein a reçus dans les remarquables travaux de M. Picard et des jeunes mathématiciens d'aujourd'hui, l'auteur cherche avant tout à donner une vue d'ensemble sur l'état actuel de la théorie en se bornant aux fonctions automorphes les plus simples d'une variable. Et parallèlement à l'étude du problème relatif à la génération et à la construction de ces fonctions. M. Schlesinger envisage, et l'intérêt du livre s'en trouve singulièrement accru, le grand problème de l'uniformisation réalisable par l'intermédiaire des mêmes fonctions.

L'ouvrage est divisé en quatre sections: Dans la première, après avoir montré comment la considération de la riemannienne permet de résoudre

le problème de l'uniformisation dans le cas des fonctions élémentaires les plus simples, l'auteur donne une esquisse intéressante de la théorie des fonctions elliptiques et du problème classique de l'uniformisation qui se pose dans leur étude.

C'est en face de problèmes analogues qu'on se trouvera dans l'étude des fonctions automorphes de Poincaré et de Klein, mais on sera conduit à généraliser la méthode, en remplaçant le plan euclidien par le plan de Lobatchewski ou celui de Riemann.

Par un détour ingénieux, M. Schlesinger arrive, dans la deuxième section, à introduire et à préciser les notions fondamentales des géométries non euclidiennes « clef véritable, a dit Poincaré, du problème qui nous occupe » (lettre à F. Klein), ce qui lui permet de formuler d'une manière précise les problèmes fondamentaux qu'il traitera dans les deux dernières sections. Le premier de ces problèmes est relatif à la construction des polygones normaux et des fonctions automorphes correspondantes, le second est le problème général de l'uniformisation.

L'étude de ces grands problèmes n'est pas exempte de difficultés, les démonstrations sont parfois assez délicates, mais je ne pense pas qu'il soit possible, dans l'état actuel de la science, de les simplifier davantage. Je signalerai, dans la quatrième section, une démonstration intéressante du grand principe de la représentation conforme de Riemann. Quant au problème général de l'uniformisation par l'intermédiaire des fonctions automorphes, l'auteur le résout à l'aide d'une méthode déjà indiquée par Poincaré en 1882, qu'il simplifie considérablement.

Il est inutile d'insister sur l'importance de toutes ces théories qui ne figurent pas dans les programmes de nos facultés des sciences et que beaucoup de mathématiciens ignorent.

D. MIRIMANOFF (Genève).

**C. CRANZ.** — **Aeussere Ballistik** oder Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab bis zum eindringen in das Ziel (Lehrbuch der Ballistik). 5te Auflage, herausgegeben unter Mitwirkung von Prof. EBERHARD und Major Dr. K. BECKER. — 1 vol. in-8° de 711 p. avec 132 fig., un appendice, des tables et un diagramme. Julius Springer, Berlin.

Voici le premier volume de la nouvelle édition du grand ouvrage de Balistique du Dr C. CRANZ. Les balisticiens d'une part, les amateurs de mécanique rationnelle d'autre part, seront heureux d'y trouver, à côté de notions qui leur sont plus ou moins familières, les résultats des recherches les plus récentes, théoriques ou expérimentales.

Le plan général de l'ouvrage entier est quelque peu modifié; il n'y aura plus de livre IV; les tables et graphiques, auxquels il était consacré, seront répartis dans les premiers livres; en particulier, les tables les plus importantes et les graphiques les plus usuels sont joints au livre I. Le plan de ce premier livre est resté à peu près le même; cependant les développements sont plus ou moins changés; l'ordre même des paragraphes n'est pas toujours celui de la précédente édition.

Il est compréhensible que les expériences de la guerre 1914-1918 aient influencé certains des chapitres fondamentaux de ce cours. Par exemple, les variations journalières de la densité de l'air, celles du vent, jouent un rôle plus important que ce n'était le cas dans les autres éditions. De même,

le chapitre VII donne un exposé des méthodes de résolution des problèmes établies pendant la guerre et auxquelles sont attachés les noms de Th. Vahlen, E. Brauer, C. Veithen, O. Wiener, A. von Brunn, F. von Zedlitz, E. Stübler, J. de Jougg. De même encore, dans le chapitre IX, l'auteur donne le calcul des oscillations et des déviations du projectile, et attribue à l'effet « magnus » une place point négligeable.

D'ailleurs, il faut signaler que le Dr C. CRANZ a bénéficié du concours de plusieurs balisticiens de talent; notamment de M. le major Dr K. BECKER, qui s'est chargé de rédiger le chapitre relatif aux tables de tir; de M. O. VON EBERHARD, qui a traité des méthodes de calcul du tir à grande distance; de M. l'ingénieur W. SCHMUNDT, et M. le professeur ROTHE.

Les chapitres suivants se retrouvent à peu près tels qu'ils étaient dans l'édition de 1917:

Les chapitres I (étude du mouvement d'un projectile dans le vide); IV et V (intégration dans le cas où l'on choisit une forme approchée de la fonction résistance de l'air); VI (développements en séries pour le calcul d'une trajectoire en un seul arc); X (déviations accidentelles; applications du calcul des probabilités); XI (action du projectile sur le but).

Par contre, les chapitres II, III, VII, VIII et IX présentent des modifications notables, comparés à la rédaction de 1917; et le chapitre XII est nouveau.

La lecture du chapitre II, consacré à l'étude de la résistance atmosphérique, est facilitée par la présence des graphiques et tables qui s'y rapportent, et qui étaient autrefois réunis dans le livre IV. Dans la dernière partie de ce chapitre II, l'auteur expose l'influence de la densité de l'air sur la résistance; on trouve là toute une série de renseignements nouveaux sur l'influence de la variation de densité avec la hauteur, renseignements dus aux expériences faites pendant la dernière guerre. En particulier, il convient d'indiquer le résultat des études de M. O. VON EBERHARD sur les très grandes hauteurs.

Le chapitre III comprend les équations générales du problème balistique principal, et les propriétés générales des trajectoires atmosphériques. L'auteur y donne, notamment, une équation nouvelle, signalée en 1921 par E. CAVALLI. Et cette équation nouvelle constitue un progrès remarquable pour l'intégration du problème balistique.

Le chapitre VII contient les solutions graphiques, ainsi que le calcul numérique des trajectoires atmosphériques par arcs partiels. Parmi les méthodes graphiques, signalons celle due à l'auteur, et celles, tout à fait récentes, de Th. VAHLEN (1918) et de E. BRAUER (1918). Quant aux méthodes de calcul numérique par arcs partiels, elles sont nombreuses; les plus récentes sont celles de C. VEITHEN (1919), de O. WIENER (1919), de A. VON BRUNN, de F. VON ZEDLITZ, de E. STÜBLER, de J. de JOUG.

La fin de ce chapitre VII donne quelques indications sur le tir à grande distance, rédigées par O. VON EBERHARD; c'est là un paragraphe nouveau, préparé d'après les expériences de la guerre.

Le chapitre VIII est entièrement consacré à une méthode de contrôle due au Dr C. CRANZ, méthode dite des « Normalbahnen », et à ses applications à la vérification des résultats obtenus par les différentes méthodes de résolution du problème.

Le chapitre IX, réservé aux déviations dites régulières ou systématiques, contient plusieurs détails nouveaux. On y trouve l'exposé des dernières

recherches, notamment de VEITHEN et de STÜBLER, sur l'influence d'une petite variation, soit de l'angle de projection, soit de la vitesse initiale, soit du coefficient balistique. On y trouve ensuite, relativement à la déviation due au vent, des indications inédites sur la variation de la vitesse du vent avec la hauteur. On trouve encore, à propos des déviations dues à la rotation du projectile autour de son axe longitudinal, des développements inaccoutumés relatifs à l'effet « magnus » (déviation due à l'influence de l'adhérence de l'air). L'auteur a d'ailleurs notablement étendu les paragraphes traitant du calcul de la trajectoire d'un « projectile-toupie ».

Le chapitre XII, enfin, entièrement nouveau, est dû à la plume du Dr K. BECKER; il s'agit ici de l'établissement des tables de tir, de la construction des graphiques, des tables spéciales pour le tir en montagne, des tables de corrections, etc.

Ce chapitre XII est suivi de la collection des tables et des graphiques dont on a parlé au début de cet article.

Voici, brièvement exposés, les perfectionnements que l'auteur a apportés au livre I de son ouvrage. Très certainement, ceux qui s'intéressent à la balistique trouveront grand plaisir à la lecture de ce volume.

G. TIERCY (Genève).

R. FERRIER. — **Les nouveaux Axiomes de l'Energétique** (Mécanique des Electrons). — 1 fasc. gr. in-8°, 61 p.; Blanchard, Paris, 1925.

Cette brochure est un tirage à part de trois articles parus dans la *Revue Générale de l'Electricité*. L'auteur y développe sa théorie des électrons, non pas d'une manière didactique, ce qui est regrettable, car on pourrait en mesurer beaucoup mieux la portée, mais en posant quelques hypothèses dont il convient d'attendre les conséquences avant de prendre parti, mais il nous semble que les idées de MM. de Broglie et Schrödinger mènent plus rapidement au but.

Ad. KNESER. — **Lehrbuch der Variationsrechnung**. Zweite umgearbeitete Auflage. — 1 vol. in-8°, VII-397 p.; Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1925.

Nous n'avons pas la première édition de cet ouvrage sous les yeux; il nous est donc impossible de dire en quoi cette deuxième édition en diffère, l'auteur d'ailleurs n'a point écrit de préface pour l'indiquer.

Disons-le d'emblée, ce livre est très clair et il expose nettement les éléments du calcul des variations; nous entendons ici par éléments les problèmes classiques et les solutions qu'on en a données avant qu'on ait inventé les méthodes directes (Lebesgue, Tonelli, etc.).

On y trouvera donc, illustrées par de nombreux exemples, les méthodes d'Euler, Lagrange, Jacobi, Weierstrass, la théorie des extrema liés, les problèmes qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur à l'unité sous l'intégrale dont on étudie la variation, les problèmes de Mayer et le calcul des variations des intégrales multiples. L'ouvrage se termine par un bref chapitre sur les solutions discontinues.

C. H. VAN Os. — **Moderne Integraalrekening** (Inleiding tot de leer der puntverzamelingen en der integralen van Lebesgue). Noordhoff's Verzamelingen van wiskundige Werken, Deel 10. — 1 vol. in-8°; 204 p., Noordhoff, Groningue, 1925.

Ce livre est une introduction — comme son sous-titre l'indique — à la

théorie des ensembles de points et à celle de l'intégrale de M. Lebesgue. Il compte 6 chapitres: I. Concepts fondamentaux; II. Opérations sur les ensembles de points; III. La mesure des ensembles de points; IV. Fonctions; V. Intégrales définies; VI. Intégrales indéfinies. Il rendra certainement des services aux jeunes mathématiciens hollandais qui veulent s'initier aux théories de la mesure et de l'intégration qu'on doit à MM. Lebesgue et Borel.

Alb. NODON. — **Eléments d'Astrophysique.** Introduction à l'Energétique solaire et stellaire. — 1 vol. gr. in-8°, VIII-244 p. et 42 fig.; 20 fr.; Librairie scientifique A. Blanchard, Paris, 1926.

Ce petit livre contient un exposé des principales découvertes qu'on a faites dans le domaine de la spectroscopie stellaire. Cet exposé élémentaire est très clair; il est suivi d'une cinquantaine de pages où l'auteur a rassemblé les règles ou les calculs qui sont à la base de la théorie des spectres et de la théorie de l'ionisation, ainsi que les principaux résultats numériques des belles théories de Saha et d'Eddington. M. Nodon a ajouté à son exposé quelques hypothèses sur la structure de l'éther et sur la gravitation, qui nous paraissent osées, leur conséquence relative à la vitesse de propagation de la gravitation est en contradiction avec la théorie d'Einstein.

Un grand nombre de figures bien tenues illustre cet ouvrage où l'on trouvera de nouvelles raisons d'aimer la science du ciel.

G. JUVET (Neuchâtel).

R. FRICKE. — **Lehrbuch der Algebra.** Verfasst mit Benutzung von H. Weber's gleichnamigem Buche. Zweiter Band: Ausführungen über Gleichungen niederen Grades. — 1 vol. in-8° de 418 p. avec 33 fig. dans le texte; M. 15.—; Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Le tome II du Traité d'Algèbre supérieure de M. Fricke comprend trois parties: I, Groupes finis de substitutions binaires; groupe polyèdrique; groupe icosaèdrique; équations du cinquième degré. — II, Groupes finis de substitutions ternaires et équations qui s'y rattachent; groupe de Klein et équations du septième degré; groupe de Valentiner et équation du sixième degré. — III, Applications géométriques; courbes planes du troisième et du quatrième degré.

Ce volume constitue une excellente introduction à l'étude de la théorie des fonctions polyèdriques et modulaires dans laquelle Klein et ses disciples, et tout particulièrement M. Fricke, ont fourni tant de remarquables travaux.

H. F.

NICOMACHUS OF GERASA. — **Introduction to Aritmetic.** Translated into English by M. Luther d'OOGHE, with Studies in Greek Arithmetic by F. E. ROBBINS and L. Ch. KARPINSKI. (University of Michigan Studies, Humanistic Series, Vol. XVI.) — 1 vol. in-4° de 318 p.; The Macmillan Company, New York et Londres, 1926.

Ce bel ouvrage apporte une importante contribution à l'histoire des mathématiques chez les Grecs. Il comprend non seulement une traduction en anglais de l'*Introduction à l'Arithmétique* de NICOMAQUE DE GERASA mais encore une étude d'un grand intérêt sur les connaissances arithmétiques

des Grecs et sur l'influence des écrits de Nichomaque sur le développement ultérieur des mathématiques.

Bien que moins illustre au point de vue de ses contributions personnelles à la science qu'Euclide, Nichomaque (100 après J. Ch.) a joué, dans le domaine de l'Arithmétique, un rôle analogue à celui de l'auteur des *Éléments* en Géométrie. Son introduction est le plus ancien ouvrage d'arithmétique de quelque importance qui nous soit parvenu de l'Antiquité.

Le texte anglais avait été établi par Martin Luther d'Ooge, décédé en septembre 1915; il a été revu et annoté avec soin par M. F. E. Robbins. Les notes historiques ont été rédigées par MM. L. Ch. Karpinski et F. E. Robbins. Il faut leur savoir gré d'avoir repris et complété le travail de leur savant collègue de l'Université du Michigan.

H. F.

### **Index Generalis. Annuaire général des Universités. Année 1925-1926.**

Publié sous la direction de R. de Montessus de Ballore. — 1 vol. in-16, relié, de 2350 p.; Editions Spès, 17, rue Soufflot, Paris.

Cette sixième édition marque un progrès considérable sur les précédentes, grâce aux renseignements toujours plus nombreux qu'elle apporte. La première partie du volume est consacrée aux universités et écoles supérieures du monde entier, avec l'indication des cours professés et des noms des professeurs. La seconde partie se rapporte aux observatoires, aux bibliothèques, aux Instituts savants, aux grandes académies et aux sociétés savantes. L'ouvrage se termine par des tables très complètes; la table alphabétique du personnel savant comprend environ 65,000 références relatives à près de 50,000 personnalités scientifiques et littéraires citées dans le volume.

Constamment mis à jour grâce à la collaboration des chefs de service des institutions mentionnées, l'Index Generalis a sa place marquée dans toutes les bibliothèques.

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

### **1. Livres nouveaux :**

*Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».*

N. ALTHILLER-COURT. — **College Geometry.** A second course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools. — 1 vol. in-8° de 254 p. avec 159 fig.; 4 doll.; Johnson Publishing Company, Richmond, Virginia.

L'auteur a groupé dans ce volume les compléments de géométrie qui forment à la fois une suite naturelle des éléments enseignés dans les établissements secondaires et une première introduction à la géométrie moderne.