

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1926)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES ÉPREUVES RÉPÉTÉES ET LA MÉTHODE DES FRACTIONS CONTINUES DE MARKOFF  
**Autor:** Mirimanoff, D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20679>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

il suffit de former le quotient de deux termes consécutifs de la suite  $s_m$  qui figure dans (23)

$$\frac{s_m}{s_{m+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{e}$$

et appliquer encore une fois les inégalités (19) (v. E. CESÀRO, *Elementares Handbuch der algebraischen Analysis*. Leipzig. 1904; p. 154-155).

Lwów, Pologne, mars 1926.

## LES ÉPREUVES RÉPÉTÉES

ET LA

## MÉTHODE DES FRACTIONS CONTINUES DE MARKOFF

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Considérons une suite de  $s$  épreuves comportant deux événements contradictoires A et B de probabilités constantes  $p$  et  $q$  (conditions de Bernoulli) et soit P la probabilité pour que le nombre de réalisations  $m$  de l'événement A soit compris au sens large entre deux nombres donnés  $m_1, m_2$ . On sait que P est égale à la somme

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} C_s^m p^m q^{s-m}.$$

Envisageons le binôme

$$\begin{aligned} (q + p)^s &= q^s + C_s' p q^{s-1} + \dots \\ &+ C_s^{m_1} p^{m_1} q^{s-m_1} + \dots + C_s^{m_2} p^{m_2} q^{s-m_2} \\ &+ C_s^{m_2+1} p^{m_2+1} q^{s-m_2-1} + \dots + p^s. \end{aligned} \tag{1}$$

La probabilité cherchée est égale à la somme des termes qui figurent dans la deuxième ligne.

Lorsque  $s$  est petit, le calcul direct de cette somme est praticable. Mais les difficultés augmentent rapidement avec  $s$ . Pour  $s$  ne dépassant pas 1000, l'évaluation peut se faire à l'aide des excellentes tables de factorielles de M. DUARTE publiées récemment <sup>1</sup>. C'est ainsi que M. DE MONTESSUS DE BALLORE, M. Duarte et moi-même avons pu calculer les sommes de cette sorte pour  $s = 50, 200, 1000$  et pour un grand nombre d'autres valeurs de  $s$ .

On pourrait aussi calculer les termes du binôme à l'aide de la formule de Stirling; mais les calculs deviennent de plus en plus laborieux, lorsque le nombre des termes à calculer augmente.

Je m'occuperai dans un autre travail des formules approchées, telles que celles de Laplace et d'Eggenberger. Mais il existe, pour le calcul de ces probabilités, une méthode générale extrêmement remarquable imaginée par A. MARKOFF en 1899 <sup>2</sup> permettant de calculer la probabilité cherchée avec une approximation aussi grande qu'on veut, méthode que je crois peu connue, bien que Markoff l'ait esquissée dans son *Calcul des Probabilités*. Aussi ai-je pensé qu'il ne serait pas inutile de la préciser et de la compléter. C'est ce que j'essaierai de faire à présent.

Je commencerai par faire remarquer que la somme des termes de (1) étant égale à 1, il suffit, pour évaluer la probabilité cherchée, de calculer les deux sommes qui figurent dans la 1<sup>re</sup> et la 3<sup>me</sup> ligne: somme initiale, somme finale. Il suffirait aussi de calculer les deux sommes finales partant de  $m_1$  et de  $m_2$ , ou bien encore les deux sommes initiales aboutissant à  $m_1$  et  $m_2$  (qu'on retranchera l'une de l'autre). Or une somme initiale devient une somme finale en permutant  $p$  et  $q$ . Il suffit donc, pour résoudre le problème, de savoir calculer une somme de la forme

$$C_s^m p^m q^{s-m} + C_s^{m+1} p^{m+1} q^{s-m-1} + \dots + p^s,$$

où  $m > sp$ , somme que je désignerai par  $X$ . Or en mettant en

<sup>1</sup> Table à 12 décimales de  $\log n!$  pour toutes les valeurs de  $n$  de 1 à 1000, par R. DE MONTESSUS DE BALLORE et F. J. DUARTE (*Mémorial de l'Office national météorologique de France*, n° 10, Paris, Etienne Chiron, 1925).

<sup>2</sup> *Bulletin de la Société physico-mathém. de Kasan*, 2<sup>me</sup> série, t. 9, 1899 (en russe).

évidence le premier terme, la somme  $X$  s'écrit

$$X = C_s^m p^m q^{s-m} \left( 1 + \frac{s-m}{m+1} r + \frac{(s-m)(s-m-1)}{(m+1)(m+2)} r^2 + \dots \right), \quad (2)$$

en posant  $r = \frac{p}{q}$ .

$X$  est donc égale au produit de deux facteurs que j'appellerai  $T$  et  $M$ , en posant

$$T = C_s^m p^m q^{s-m}, \quad M = 1 + \frac{s-m}{m+1} r + \dots \quad (3)$$

Le facteur  $T$ , qui est un terme du binôme, peut être calculé soit à l'aide des tables de M. Duarte, si  $s \leq 1000$ , avec une approximation très grande, soit à l'aide de la formule de Stirling.

Tout se ramène donc finalement au calcul de  $M$ . Or le polynôme  $M$ , comme l'a fait remarquer Markoff, peut être mis sous la forme d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss. On a, en effet,

$$M = \frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} \quad (4)$$

en posant  $\alpha = -s + m$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = m$ ,  $x = -r$ . Or, en vertu d'un théorème de Gauss<sup>1</sup>, un quotient de cette forme peut toujours être réduit en fraction continue. Dans le cas qui nous occupe cette fraction s'écrit

$$M = \frac{1}{1} - \frac{c_1}{1} + \frac{c'_1}{1} - \frac{c_2}{1} + \frac{c'_2}{1} - \dots - \frac{c_{s-m}}{1} + \frac{c'_{s-m}}{1} \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{(s-m-k+1)(m+k-1)}{(m+2k-2)(m+2k-1)} \frac{p}{q} \\ c'_k &= \frac{k(s+k)}{(m+2k-1)(m+2k)} \frac{p}{q} \end{aligned} \quad (6)$$

La fraction continue est finie, son élément terminal est

$$c'_{s-m} = \frac{s-m}{2s-m-1} \frac{p}{q}.$$

<sup>1</sup> GAUSS. Disquisitiones generales circa functiones a serie infinita  $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$ , 1811.

Id. Allgemeine Unters. über die unendliche Reihe  $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$ , p. 20.

Pour calculer  $M$  avec une approximation aussi grande qu'on veut, il suffit donc de calculer un certain nombre de réduites de (5).

*Réduites.* — Je commencerai par rappeler les relations classiques, déjà connues d'Euler, permettant de calculer les réduites de proche en proche.

Soient  $\frac{P_k}{Q_k}$  la réduite arrêtée à l'élément  $c_k$ .

$\frac{P'_k}{Q'_k}$  la réduite arrêtée à l'élément  $c'_k$ .

On a les formules de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} P_k &= P'_{k-1} - P_{k-1} c_k ; & P'_k &= P_k + P'_{k-1} c'_k \\ Q_k &= Q'_{k-1} - Q_{k-1} c_k ; & Q'_k &= Q_k + Q'_{k-1} c'_k . \end{aligned} \quad (7)$$

Posons

$$D_k = (-1)^k c_1 c_2 \dots c_k c'_1 c'_2 \dots c'_k .$$

Il vient

$$\begin{aligned} \frac{P'_k}{Q'_k} - \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{D_k}{Q'_k Q_k} , \\ \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P'_k}{Q'_k} &= \frac{c_{k+1} D_k}{Q_{k+1} Q'_k} , \\ \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{D_k}{Q_{k+1} Q_k} , \\ \frac{P'_{k+1}}{Q'_{k+1}} - \frac{P'_k}{Q'_k} &= \frac{c_{k+1} D_k}{Q'_{k+1} Q'_k} . \end{aligned} \quad (8)$$

Ces dernières formules nous permettront d'abrégier les calculs.

Voici maintenant quelques propriétés des réduites et des éléments qui découlent d'une part de l'hypothèse  $m > sp$  et d'autre part des formules (6):

1. L'hypothèse  $m > sp$  entraîne  $c_1 < 1$ , et comme les nombres  $c_k$  forment une suite décroissante, tous les  $c_k < 1$ .

2. Les réduites d'indices impairs forment une suite décroissante, celles d'indices pairs une suite croissante.

Marquons le point dont l'abscisse est  $M$ . Les points figurant les réduites d'indices impairs se rapprochent de  $M$  du côté droit, les points figurant les réduites d'indices pairs se rapprochent de  $M$  du côté gauche.

Posons

$$\delta_k = \left| M - \frac{P_k}{Q_k} \right|, \quad \delta'_k = \left| M - \frac{P'_k}{Q'_k} \right|.$$

La question suivante se pose: a-t-on toujours  $\delta_k < \delta'_{k-1}$ ? En d'autres termes, le point  $M$  est-il plus rapproché de  $\frac{P_k}{Q_k}$  que de  $\frac{P'_{k-1}}{Q'_{k-1}}$ ?

On établit aisément le critère suivant

Si

$$c'_k < (1 - c_k)(1 - c_{k+1}),$$

on a aussi

$$\delta_k < \delta'_{k-1}. \quad (9)$$

Si donc  $k$  est pair,

$$M < \frac{1}{2} \left( \frac{P'_{k-1}}{Q'_{k-1}} + \frac{P_k}{Q_k} \right)$$

et si  $k$  est impair,

$$M > \frac{1}{2} \left( \frac{P'_{k-1}}{Q'_{k-1}} + \frac{P_k}{Q_k} \right).$$

Le critère s'applique aux exemples que j'ai envisagés avec  $M$ . Duarte.

Je tiens à en indiquer deux pour donner une idée de la valeur réelle de la méthode de Markoff et des calculs qu'elle exige.

1<sup>er</sup> exemple. — Envisageons d'abord le cas où  $s = 200$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$ . Demandons nous quelle est la probabilité pour que le nombre  $m$  vérifie l'inégalité

$$80 \leq m \leq 120,$$

c'est-à-dire pour que l'écart soit compris au sens large entre — 20 et 20.

Pour résoudre ce problème, il suffira de calculer la somme finale commençant par le terme en  $p^{121}$ . Soit  $X$  la valeur de cette somme. La probabilité cherchée  $P = 1 - 2X$ .

Mais au lieu de calculer le terme  $T$  relatif à  $m = 121$ , il est préférable, comme Markoff l'a fait lui-même dans un autre exemple, de calculer le terme qui précède relatif à  $m = 120$ . Si  $M$  est la somme finale correspondante,

$$X = TM - T = T(M - 1)$$

nous ferons donc  $m = 120$ , nous calculerons  $T$  et  $M$ , puis  $X$ ,  $2X$  et  $1 - 2X$ .

Voici les calculs

$$\begin{array}{ll} c_1 = 0,6612 & c'_1 = 0,0136 \\ c_2 = 0,6370 & c'_2 = 0,0265 \\ c_3 = 0,6139 & \end{array}$$

On en tire

$$\begin{array}{ll} P_1 = 1 & Q_1 = 0,3388 \\ P'_1 = 1,0136 & Q'_1 = 0,3524 \\ P_2 = 0,3766 & Q_2 = 0,1366 \\ P'_2 = 0,4034 & Q'_2 = 0,1459 \\ P_3 = 0,1722 & Q_3 = 0,0621 \\ \frac{P'_2}{Q'_2} > 2,7649 & \frac{P_3}{Q_3} < 2,7743 \end{array}$$

D'autre part

$$T = 0,001025 \text{ .}$$

$X$  est compris entre 0,001809 et 0,001819. On en tire la valeur de  $P$  avec 4 décimales exactes

$$P = 0,9963 \text{ .}$$

En poussant les calculs plus loin, M. Duarte a obtenu les résultats suivants

$$\frac{P'_5}{Q'_5} = 2,77297444 ; \quad \frac{P_6}{Q_6} = 2,77296305$$

$$T = 0,001\,025\,104\,022$$

et enfin

$$P = 0,9963650$$

avec 7 décimales exactes.

2<sup>me</sup> exemple. — Supposons encore  $p = q = \frac{1}{2}$ , mais  $s = 20000$  et  $m$  compris au sens large entre 9800 et 10200.  $P$  est donc la probabilité pour que l'écart soit compris entre  $-200$  et  $+200$ .

J'ai tenu à pousser les calculs assez loin pour les raisons suivantes: cet exemple a déjà été envisagé par Markoff dans sa note du *Bulletin de Kasan*. Et avant Markoff le même exemple avait été traité par Nekrassoff dans un travail intéressant, publié en 1898<sup>1</sup>. Or il y avait un certain désaccord entre les résultats obtenus par les deux méthodes. D'autre part il était curieux de voir combien de décimales exactes étaient fournies par la formule de Laplace munie du terme complémentaire  $T$

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt + T \quad (10)$$

(ici  $t = 2$ ).

Markoff affirme qu'en poussant ses calculs plus avant, il a pu constater que la formule (10) fournissait 6 décimales exactes. J'ai tenu à le vérifier. Grâce au concours précieux de M. Duarte j'ai pu, en m'appuyant sur le critère (9), calculer la probabilité cherchée avec 7 décimales exactes et confirmer l'assertion de Markoff. A notre surprise, le calcul direct des réduites, malgré le grand nombre de décimales (15) calculées par M. Duarte, nous a fourni une approximation insuffisante. Aussi ai-je préféré partir de  $\frac{P'_6}{Q'_6}$  et calculer les réduites suivantes à l'aide des formules (8). J'ai pu obtenir ainsi, avec une approximation suffisante, les valeurs de  $\frac{P'_8}{Q'_8}$  et de  $\frac{P'_9}{Q'_9}$  et, en appliquant le critère (9), calculer ensuite la probabilité cherchée avec 7 décimales exactes. Voici le tableau des principaux résultats:

$$T = 0,000\,1033\,2674\,5448 \, ,$$

$$P'_6 = 0,00000\,03448\,85496 \, ; \quad Q'_6 = 0,00000\,00149\,08605$$

$$\frac{P'_6}{Q'_6} = 23,133316 \, .$$

<sup>1</sup> *Recueil mathémat. de Moscou*, t. XX (1898).



On en tire ensuite, à l'aide des relations (8),

$$\frac{P'_7}{Q'_7} = 23,135\,288, \quad \frac{P'_8}{Q'_8} = 23,134\,649$$

et

$$\frac{P_9}{Q_9} = 23,134\,873.$$

En tenant compte du critère (9), on trouve

$$22,134\,7617 < M - 1 < 22,134\,8739$$

et enfin

$$0,995\,42575 < P < 0,995\,425\,775$$

d'où

$$P = 0,995\,4257$$

avec 7 décimales exactes.

On voit que le même degré d'approximation (7 décimales) n'a été obtenu dans cet exemple qu'au prix de calculs beaucoup plus laborieux, ce qui était à prévoir.

Appliquons maintenant la formule (10). Pour  $t = 2$ , l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

est égale à 0,995322265. D'autre part  $T = 0,000103326$ .

D'où

$$P = 0,995\,42559.$$

On retrouve bien les 6 premières décimales, conformément à l'assertion de Markoff.

Je ferai connaître dans un autre travail l'expression de l'erreur commise en appliquant la formule (10). Nous en déduirons la valeur de  $P$  avec 8 décimales exactes.

Je tiens à ajouter, en terminant, qu'il n'est pas nécessaire en général d'avoir une approximation aussi grande. Dans les applications, 3 et même 2 décimales suffisent habituellement; les calculs se simplifient alors considérablement et l'on arrive rapidement au résultat soit par le calcul direct des premières réduites, soit à l'aide d'une table de logarithmes.

Avril 1926.