Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONCEPTION ACTUELLE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES ET MÉROMORPHES

Autor: Bloch, A.

Kapitel: I. Deux principes directeurs.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20677

générales, de nature à dominer les diverses parties de la théorie; cependant, plusieurs exemples particuliers seront présentés à l'appui de ces considérations.

I. Deux principes directeurs.

1. Deux principes généraux, deux idées directrices, encore assez difficiles à formuler de manière précise, se dégagent dès à présent de l'ensemble des faits acquis et contribuent notablement à faciliter les recherches. Ces principes jouent un rôle analogue à celui joué par le principe de continuité, auquel on eut fréquemment recours, tant en analyse qu'en géométrie, à une époque où l'emploi des imaginaires n'était pas encore légitimé de façon rigoureuse, par le principe classique en géométrie énumérative sous le nom de « loi de conservation du nombre », et par d'autres encore qui ont tenu ou continuent à tenir une place importante en mathématiques.

2. Le premier de ces deux principes, dont la portée n'est d'ailleurs pas restreinte à la théorie dont il s'agit, peut s'exprimer sous forme d'apophtegme: « *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito.* » On entend par là que dans une partie quelconque des mathématiques, toute proposition dans l'énoncé de laquelle intervient l'infini actuel peut toujours être regardée comme un corollaire à peu près immédiat d'une proposition où il ne figure pas, d'une proposition en termes finis. Le rôle de l'infini actuel est donc uniquement un rôle d'abréviation, rôle qu'il ne paraît d'ailleurs pas possible de lui contester: toute propriété de la fonction exponentielle e^x correspond à une propriété de la fonction x^m, mais cette dernière est d'un énoncé plus compliqué, puisqu'il y figure l'indéterminée m.

3. Comme application de ce principe, posons-nous la question suivante: du théorème de M. Picard, peut-on conclure celui de M. Landau ? Le théorème de M. Picard est certainement contenu dans une proposition en termes finis, mais quelle est-elle ? Rien ne paraît empêcher *a priori* que ce soit: « Connaissant les deux premiers coefficients a_0 et a_1 de la fonction entière $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$ et sa borne supérieure M dans le cercle $|x| \leqq 1$,

il existe un nombre R dépendant uniquement de a_0, a_1 et M, tel que dans le cercle $|x| \leqq$ R la fonction prenne soit la valeur 0, soit la valeur 1.» Cette proposition en termes finis ne semble pas équivalente au théorème de M. Landau.

A vrai dire, de chacune des démonstrations connues du théorème de M. Picard, l'on déduit aisément en la resserrant convenablement, une démonstration du théorème de M. Landau, si bien que la question ici posée peut paraître oiseuse. Mais dans bien des cas, il n'en est pas de même. Ainsi, pour une proposition donnée par M. Borel dans le tome XX des *Acta Mathematica*, ou plutôt pour la proposition claire et naturelle par laquelle nous l'avions remplacée, il n'était possible d'aboutir, en en resserrant la démonstration, qu'à un énoncé en termes finis analogue à celui que l'on vient de lire. L'obtention du théorème véritable ne résulta que d'un remaniement complet de la question; ce théorème [cf. A. Bloch, travaux notés *c*) et *h*], consiste en une limitation de la variation de fonctions holomorphes dans un cercle, ne s'y annulant pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité.

4. Appliquons aussi le principe à l'étude de la question suivante, signalée à l'auteur du présent article, par M. G. Valiron: *Est-il vrai, est-il faux qu'une fonction entière* f(x) *satisfaisant à la condition d'être, quel que soit* R *toujours inférieure à un en un point du cercle* |x| = R *admette nécessairement dans le plan des* x *un chemin allant vers l'infini, où elle demeure bornée* ?

Cette fois, il n'y a pas de doute à avoir, si le fait est vrai, sur la proposition en termes finis correspondante; celle-ci ne peut être raisonnablement que la suivante: «Si une fonction $f(x)$, holomorphe dans le cercle-unité $|x| \leqq 1$ est inférieure ou égale à un en un point au moins de tout cercle $|x|=r<1$, il existe un chemin partant de l'origine et aboutissant au cercle-unité où elle demeure inférieure ou égale à une certaine constante universelle k».

Or, tout d'abord, k ne peut être égal qu'à un; en effet, s'il est supérieur à un, on voit, en appliquant la proposition à la fonction $[f(x)]^m$, qu'on peut le remplacer par sa racine $m^{\text{ième}}$, c'est-à-dire par un nombre aussi voisin de 1 que l'on veut, et par suite par le nombre 1 lui-même.

Dès lors, considérons le polynome $4x^2+2x-1$ dans le cercle-unité; il y devient bien égal à 1 en module sur tout cercle centré à l'origine; mais il n'existe pas de chemin satisfaisant aux conditions prescrites ($k=1$). Donc la question posée doit être résolue par la négative.

Il serait probablement possible, en se guidant sur ce raisonnement, de trouver un exemple de fonction entière mettant le fait en évidence. Mais ce qui précède paraît suffisant dans l'état actuel de la science pour engendrer la certitude, bien que cette certitude n'ait pas une base logique irréprochable.

5. On peut pousser le finitisme plus loin encore et adopter un point de vue très voisin de celui préconisé en algèbre et en analyse par Kronecker et par M. Drach. Un cas particulier du principe « *Nil est in infinito...* » est en effet le suivant: « Toute proposition sur une fonction holomorphe ou méromorphe dans le cercle-unité est exacte dès qu'elle l'est, dans le même cercle, pour un polynome ou une fraction rationnelle. » Cet énoncé est encore un peu vague et assurément incomplet; mais il ne paraît pas actuellement indispensable de le perfectionner, car dans chaque cas particulier, il n'y aura jamais aucune difficulté à discerner sous quelle forme il est applicable.

Observons cependant que si le passage d'une proposition sur les fonctions holomorphes ou méromorphes dans le cercle-unité à la proposition qu'elle entraîne sur les fonctions entières ou méromorphes dans tout le plan est toujours immédiat, il n'en est plus tout à fait de même ici: le raisonnement qui permet de passer de la proposition sur les polynomes ou les fractions rationnelles, envisagées à l'intérieur du cercle-unité, à celle sur les fonctions holomorphes ou méromorphes dans le même cercle peut être un peu long; mais il est toujours de nature simple et ne repose que sur les premiers éléments de la théorie des fonctions analytiques. On pourra s'en convaincre en cherchant, la proposition suivante étant supposée établie pour le cas d'un polynome, à la démontrer en général:

Soit $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x}+\ldots$ *une fonction holomorphe dans le cercle-unité, s'annulant à l'origine et y ayant une dérivée égale à un: le domaine riemannien correspondant contient un cercle à un seul feuillet (de centre réel) de rayon supérieur à une certaine constante absolue* K [A. Bloch, *g*) et *j*].

La théorie des fonctions entières et méromorphes dans tout le plan se trouve ainsi ramenée à l'algèbre, puisqu'elle est réductible à la théorie des fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité, et que celle-ci se ramène à son tour à un ensemble de questions concernant les polynomes et les fractions rationnelles; mais il n'en résulte pas actuellement une bien grande simplification, car les diverses questions d'algèbre auxquelles on se trouve ainsi ramené sont presque toutes entièrement nouvelles; leur étude n'en paraît pas moins s'imposer aux efforts des algébristes.

6. Le second principe jouant un rôle important dans la théorie dont il s'agit est le *principe de continuité topologique.* Il consiste en ce qu'une proposition exacte avec un certain énoncé demeure encore exacte si l'on modifie les données au point de vue métrique, mais non au point de vue topologique. Ici encore, il serait prématuré de chercher à donner au principe une forme précise; nous nous bornerons à indiquer dans des cas particuliers quelle signification il peut avoir et quel usage on en peut faire.

7. Envisageons la proposition suivante [cf. A. Bloch, *e*].

Les fonctions f(x) *holomorphes dans un domaine et telles que,* a, b, c *étant trois certains nombres distincts, les équations* f(x) = a, f(x) = b, f(x) = c *n'aient dans ce domaine que des racines multiples, engendrent une famille normale.*

L'hypothèse signifie que la fonction inverse de $f(x)$ n'a pas de branche uniforme au voisinage de a, b, c; d'ailleurs, l'énoncé subsiste évidemment si a, b, c, au lieu d'être fixes, sont supposés contenus dans trois cercles fixes extérieurs les uns aux autres. Faisons maintenant un pas de plus et supposons seulement qu'à l'intérieur de chacun de ces trois cercles la fonction inverse n'ait aucune branche partout définie et uniforme; le principe de continuité topologique nous dit que la proposition subsiste avec cette nouvelle hypothèse; autrement dit *(ibid.)*:

Les fonctions holomorphes dans un domaine et telles que le domaine riemannien correspondant ne possède pas de cercle à un seul feuillet coïncidant avec l'un ou l'autre de trois cercles donnés du plan, extérieurs les uns aux autres, engendrent une famille normale.

(Pour les fonctions méromorphes, il faut introduire *cinq* cercles de la sphère au lieu de trois cercles du plan.)

Signalons aussi à cette occasion la proposition légèrement différente que voici:

Le domaine riemannien correspondant à un polynome ou à une fonction entière d'ordre inférieur à un (envisagés dans tout le plan) contient toujours un cercle à un seul feuillet coïncidant avec l'un ou l'autre de deux cercles donnés, extérieurs l'un à l'autre. Le domaine riemannien correspondant à une fonction transcendante entière d'ordre quelconque contient toujours une infinité de cercles à un seul feuillet coïncidant avec l'un ou l'autre de trois cercles donnés extérieurs les uns aux autres.

Ces diverses propositions peuvent d'ailleurs s'établir par une adaptation suffisamment savante des démonstrations des propositions analogues relatives au cas où les cercles sont remplacés par des points; le principe de continuité topologique est ici *l'affirmation de la possibilité de cette adaptation*; une remarque analogue sera vraie pour les deux exemples suivants.

8. Appliquons le principe à l'obtention de la proposition classique : *Deux fonctions méromorphes dans tout le plan, liées par une relation algébrique de genre supérieur à l'unité, se réduisent nécessairement à deux constantes.*

On établit aisément de manière « élémentaire » qu'une fonction méromorphe $f(x)$ telle que pour cinq valeurs distinctes de a, finie ou infinie, l'équation $f(x) = a$ n'ait que des racines d'ordre de multiplicité pair est nécessairement une constante; par conséquent, la proposition ci-dessus est exacte pour toute relation. hyperelliptique de genre supérieur à un. Or, la surface de Riemann d'une courbe non hyperelliptique est topologiquement identique à celle d'une courbe hyperelliptique de même genre. De manière plus précise, on peut décomposer la surface de Riemann d'une courbe hyperelliptique de genre p en deux sphères, portant chacune $2p + 2$ points correspondant aux $2p + 2$ points de ramification, sphères d'ailleurs identiques; pour une courbe non hyperelliptique, de genre p, on peut décomposer encore, au point de vue conforme, la surface de Riemann en deux sphères portant chacune $2p + 2$ points correspondant encore à $2p + 2$ point de ramification, mais non plus identiques; il suffit pour le voir d'appliquer le théorème de Clebsch-Lüroth et de représenter conformément sur une sphère la surface de genre zéro formée par tous les feuillets, sauf le dernier. Ainsi, notre principe s'applique encore.

9. Passons enfin à un troisième exemple: considérons une surface générique du quatrième degré $f_4(x, y, z) = 0$, et demandons-nous si elle est uniformisable par les fonctions méromorphes, c'est-à-dire s'il existe des fonctions méromorphes, non fonctions d'une seule d'entre elles, satisfaisant à son équation. Cette surface est identique topologiquement à la surface $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$, car l'une et l'autre sont sans singularités et l'on peut passer de manière continue de l'une à l'autre, sans avoir jamais de singularités.

On est donc ramené, en vertu du principe, à rechercher si la surface $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ est uniformisable par les fonctions méromorphes, et la réponse négative est vraisemblable; quoi qu'il en soit, la solution de cette question sera considérablement facilitée, si l'on commence par déterminer tous les systèmes de fonctions méromorphes d'une seule variable satisfaisant à cette dernière équation, c'est-à-dire si l'on résout l'équation $X + Y + Z - 1 = 0$ en fonctions méromorphes dont tous les zéros et tous les pôles sont d'ordre égal à 4 ou multiple de 4. Il est probable que les méthodes de MM. Valiron et Nevanlinna donneront la solution de cette dernière question (voir p. ex. R. Nevanlinna, *b*); il faudra naturellement appliquer ici la double dérivation. Observons que les ∞^1 sections de la surface $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ par ses plans bitangents donnent ∞^1 courbes répondant à la question.

II. L'algébrisation de la théorie des fonctions entières et méromorphes.

10. La théorie des fonctions entières et méromorphes doit, pour se rapprocher de la perfection, prendre de plus en plus modèle sur l'algèbre. Certes, de nombreux obstacles sont encore à surmonter dans cette voie; cependant, l'on peut entrevoir dès à présent deux manières différentes de réaliser cette algébrisation de la théorie, seule susceptible de lui donner toute la précision qu'elle comporte. La première consistera dans l'étude des fonc-