

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LES DÉTERMINANTS
Autor: Krawtchouk, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20674>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

M^{lle} M. Byck dans sa note « Sur les déterminants dont les éléments sont des déterminants¹ » attire l'attention sur la relation:

$$\left| \begin{array}{|c|c|} \hline v_1 & w_1 \\ \hline x_1 & y_1 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|c|} \hline v_2 & w_2 \\ \hline x_1 & y_1 \\ \hline \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{|c|c|} \hline v_1 & w_1 \\ \hline x_2 & y_2 \\ \hline \end{array} \right| \cdots = \pm \left| \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & \cdots \\ \hline x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \hline 0 & 0 & v_2 & w_2 & \cdots \\ \hline v_1 & w_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline \end{array} \right|. \quad (1)$$

Parmi toutes ses généralisations² possibles nous notons ici seulement la suivante.

En décomposant le déterminant

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccccccc} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1, n_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2_{11} & \cdots & 2_{1, n_2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2, n_2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1, n_p+1} & & & \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p, n_p+1} \\ 1_{11} & \cdots & 1_{1, n_1+1} & 2_{11} & \cdots & 2_{1, n_2+1} & p_{11} & \cdots & p_{1, n_p+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1_{p,1} & \cdots & 1_{p, n_1+1} & 2_{p,1} & \cdots & 2_{p, n_2+1} & p_{p,1} & \cdots & p_{p, n_p+1} \end{array} \right| . (-1)^{(p-1)n_1 + (p-2)n_2 + \cdots + n_{p-1}} \quad (2)$$

¹ *L'Enseignement mathém.*, t. 24, 1924–25.

² Ici nous ne prenons pas les relations du type

$$\left| \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline c_1 & d_1 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & f_1 \\ \hline g_1 & h_1 \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 d_1 & b_1 c_1 & e_1 h_1 & f_1 g_1 \\ \hline a_2 d_2 & b_2 c_2 & e_2 h_2 & f_2 g_2 \\ \hline \end{array} \right| .$$

parce qu'elles ne sont qu'un cas particulier du type (1).

d'après les mineurs, constitués des colonnes renfermées entre deux traces verticales voisines, nous trouverons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1_{11} \dots 1_{1,n_1+1} & 2_{11} \dots 2_{1,n_2+1} & \dots & p_{11} \dots p_{1,n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{n_1 1} \dots 1_{n_1, n_1+1} & 2_{n_2 1} \dots 2_{n_2, n_2+1} & \dots & p_{n_p 1} \dots p_{n_p, n_p+1} \\ 1_{11} \dots 1_{1,n_1+1} & 2_{11} \dots 2_{1,n_2+1} & \dots & p_{11} \dots p_{1,n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{11} \dots 1_{1,n_1+1} & 2_{11} \dots 2_{1,n_2+1} & \dots & p_{11} \dots p_{1,n_p+1} \\ 1_{n_1 1} \dots 1_{n_1, n_1+1} & 2_{n_2 1} \dots 2_{n_2, n_2+1} & \dots & p_{n_p 1} \dots p_{n_p, n_p+1} \\ 1_{p1} \dots 1_{p, n_1+1} & 2_{p1} \dots 2_{p, n_2+1} & \dots & p_{p1} \dots p_{p, n_p+1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

D'autre part, la décomposition du déterminant Δ d'après les mineurs, constitués des lignes renfermées entre chaque deux traces horizontales voisines, donne

$$\Delta = \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_p+p(1+n_1+\dots+n_p)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_p}^{(p)} \cdot X_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad (4)$$

où

$$x_{i_\beta}^{(\alpha)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1, i_\beta-1}, \alpha_{1, i_\beta+1} \dots \alpha_{1, n_\beta+1} \\ \alpha_{21} \dots \alpha_{2, i_\beta+1}, \alpha_{2, i_\beta+1} \dots \alpha_{2, n_\beta+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_\beta 1} \dots \alpha_{n_\beta, i_\beta-1}, \alpha_{n_\beta, i_\beta+1} \dots \alpha_{n_\beta, n_\beta+1} \end{vmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p),$$

$$X_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} 1_{1i_1} 1_{2i_2} \dots 1_{pi_p} \\ 1_{2i_1} 1_{2i_2} \dots 1_{2i_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1_{pi_1} 1_{pi_2} \dots 1_{pi_p} \end{vmatrix} \quad (i_\gamma = 1, 2, \dots, n_\gamma).$$

L'égalité des expressions (3) et (4) est une généralisation du théorème connu de Sylvester; car, si nous faisons:

$$n_1 = n_2 = \dots = n_p = n,$$

$$l_{hi} = m_{hi} = x_{hi}; \quad l_{ji} = m_{ji} = x_{n+j,i};$$

$$l_{h,n+1} = x_{h,n+l}, \quad k_{j,n+1} = x_{n+j,n+k}$$

$$(h, i = 1, 2, \dots, n; j, k, l, m = 1, 2, \dots, p; k, l, m = 1, 2, \dots, p),$$

cette égalité prendra la forme:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{array} \right|, \quad \dots, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{array} \right|, \quad \dots, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{ccccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \dots & x_{1,n+p} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \dots & x_{2,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \dots & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \dots & x_{n+1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \dots & x_{n+p,n+p} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{c} x_{11} \dots x_{1n} \\ x_{21} \dots x_{2n} \\ \vdots \\ x_{n1} \dots x_{nn} \end{array} \right|^{p-1}
 \end{array}$$

NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

THÉORÈME I. Soient B et Γ deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe ζ ; soit de plus n le rapport de similitude de ces cercles, α leurs centres de similitude et