Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

Autor: Krawtchouk, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20674

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

PAR

M. Krawtchouk (Kieff).

M$^{\text{lle}}$ M. Byck dans sa note « Sur les déterminants dont les éléments sont des déterminants[1] » attire l'attention sur la relation:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \cdots \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & \cdots \\ x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & v_2 & w_2 & \cdots \\ v_1 & w_1 & 0 & 0 & \cdots \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

Parmi toutes ses généralisations[2] possibles nous notons ici seulement la suivante.

En décomposant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1,n_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2_{11} & \cdots & 2_{1,n_2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2,n_2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1,n_p+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p,n_p+1} \\ \mathbf{1}_{11} & \cdots & \mathbf{1}_{1,n_1+1} & \mathbf{2}_{11} & \cdots & \mathbf{2}_{1,n_2+1} & \mathbf{p}_{11} & \cdots & \mathbf{p}_{1,n_p+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{1}_{p,1} & \cdots & \mathbf{1}_{p,n_1+1} & \mathbf{2}_{p,1} & \cdots & \mathbf{2}_{p,n_2+1} & \mathbf{p}_{p,1} & \cdots & \mathbf{p}_{p,n_p+1} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(p-1)n_1+(p-2)n_2+\cdots+n_{p-1}} \qquad (2)$$

---

[1] *L'Enseignement mathém.*, t. 24, 1924-25.

[2] Ici nous ne prenons pas les relations du type

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 d_1 & b_1 c_1 & e_1 h_1 & f_1 g_1 \\ a_2 d_2 & b_2 c_2 & e_2 h_2 & f_2 g_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

parce qu'elles ne sont qu'un cas particulier du type (1).

d'après les mineurs, constitués des colonnes renfermées entre deux traces verticales voisines, nous trouverons:

$$
\Delta = \left\| \begin{array}{cccc}
\begin{vmatrix} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} \\ . & \cdots & . \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1,n_1+1} \\ \mathbf{1}_{11} & \cdots & \mathbf{1}_{1,n_1+1} \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 2_{11} & \cdots & 2_{1,n_2+1} \\ . & \cdots & . \\ 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2,n_2+1} \\ \mathbf{2}_{11} & \cdots & \mathbf{2}_{1,n_2+1} \end{vmatrix} & \cdots &
\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n_p+1} \\ . & \cdots & \vdots \\ p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p,n_p+1} \\ \mathbf{p}_{11} & \cdots & \mathbf{p}_{1,n_p+1} \end{vmatrix} \\
. \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . & . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\
\begin{vmatrix} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} \\ . & \cdots & . \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1,n_1+1} \\ \mathbf{1}_{p1} & \cdots & \mathbf{1}_{p,n_1+1} \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 2_{11} & \cdots & 2_{1,n_2+1} \\ . & \cdots & . \\ 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2,n_2+1} \\ \mathbf{2}_{p1} & \cdots & \mathbf{2}_{p,n_2+1} \end{vmatrix} & \cdots &
\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n_p+1} \\ . & \cdots & . \\ p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p,n_p+1} \\ \mathbf{p}_{p1} & \cdots & \mathbf{p}_{p,n_p+1} \end{vmatrix}
\end{array} \right\| . \qquad (3)
$$

D'autre part, la décomposition du déterminant Δ d'après les mineurs, constitués des lignes renfermées entre chaques deux traces horizontales voisines, donne

$$
\Delta = \sum (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+p(1+n_1+\cdots+n_p)} x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(p)}_{i_p} . \mathrm{X}_{i_1 i_2 \cdots i_p} , \qquad (4)
$$

où

$$
x^{(\alpha)}_{i_\beta} = \begin{vmatrix}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,i_\beta-1} , & \alpha_{1,i_\beta+1} & \cdots & \alpha_{1,n_\beta+1} \\
\alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,i_\beta+1} , & \alpha_{2,i_\beta+1} & \cdots & \alpha_{2,n_\beta+1} \\
. & \cdots & . & . & \cdots & . \\
\alpha_{n_\beta 1} & \cdots & \alpha_{n_\beta,i_\beta-1} , & \alpha_{n_\beta,i_\beta+1} & \cdots & \alpha_{n_\beta,n_\beta+1}
\end{vmatrix} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots p) ,
$$

$$
\mathrm{X}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \begin{vmatrix}
\mathbf{1}_{1i_1} & \mathbf{1}_{2i_2} & \cdots & \mathbf{1}_{1i_p} \\
\mathbf{1}_{2i_1} & \mathbf{1}_{2i_2} & \cdots & \mathbf{1}_{2i_p} \\
. & . & \cdots & . \\
\mathbf{1}_{pi_1} & \mathbf{1}_{pi_2} & \cdots & \mathbf{1}_{pi_p}
\end{vmatrix} \qquad (i_\gamma = 1, 2, \ldots, n_\gamma) .
$$

L'égalité des expressions (3) et (4) est une généralisation du théorème connu de Sylvester; car, si nous faisons:

$$
n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n ,
$$

$$
l_{hi} = m_{hi} = x_{hi} ; \qquad \mathbf{l}_{ji} = \mathbf{m}_{ji} = x_{n+j,i} ;
$$

$$
l_{h,n+1} = x_{h,n+l} , \qquad \mathbf{k}_{j,n+1} = x_{n+j,n+k}
$$

$$
(h, i = 1, 2, \ldots, n ; \quad j, k, l, m = 1, 2, \ldots, p ; \quad \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{p}) ,
$$

cette égalité prendra la forme:

$$
\left\| \begin{matrix}
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ . & \cdots & . & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{vmatrix}, &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ . & \cdots & . & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{vmatrix} & , \ldots , &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ . & \cdots & . & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{vmatrix} \\
. & . & & . \\
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ . & \cdots & . & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{vmatrix}, &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ . & \cdots & . & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{vmatrix} & , \ldots , &
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ . & \cdots & . & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{vmatrix}
\end{matrix} \right\|
$$

$$
= \begin{vmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \cdots & x_{1,n+p} \\
x_{21} & \cdots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{2,n+p} \\
. & \cdots & . & . & \cdots & . \\
x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \cdots & x_{n,n+p} \\
x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \cdots & x_{n+1,n+p} \\
. & \cdots & . & . & \cdots & . \\
x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \cdots & x_{n+p,n+p}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & \cdots & x_{2n} \\
. & \cdots & . \\
x_{n1} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}^{p-1} .
$$

NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. Krawtchouk (Kieff).

Théorème I. *Soient* B *et* Γ *deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe* ζ; *soit de plus* n *le rapport de similitude de ces cercles,* α *leurs centres de similitude et*