

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1926)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EN RELISANT UN MÉMOIRE DE PLÜCKER SUR LA THÉORIE DES SURFACES  
**Autor:** Loria, Gino  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20673>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

une seule et même équation

$$\frac{d\vec{b}}{dv} \cdot \left( \frac{d\vec{a}}{dv} + u \frac{d\vec{b}}{dv} \right) = 0 .$$

représente l'arête de rebroussement si la surface est développable et la ligne de striction si la surface est gauche.

On s'explique cette particularité en remarquant que, dans l'un et l'autre cas, la ligne considérée peut être définie comme le lieu du point de chaque génératrice qui est à la distance minimum des génératrices infiniment voisines.

---

## EN RELISANT UN MÉMOIRE DE PLÜCKER SUR LA THÉORIE DES SURFACES

PAR

Gino LORIA (Gênes, Italie).

---

Dans sa *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes* (Journal de Crelle, T. IX, 1831, p. 124-135)<sup>1</sup> PLÜCKER a posé les fondements du système de coordonnées pour les plans de l'espace; la structure complète n'a été donnée par lui que quinze ans plus tard dans son ouvrage *System der Geometrie des Raumes* (Düsseldorf, 1846). Dans la *Note* citée l'illustre géomètre ne s'est pas arrêté aux problèmes fondamentaux relatifs aux points, aux droites et aux plans, mais il a préféré transformer les formules classiques de la théorie de la courbure des surfaces dues à EULER et MONGE en d'autres applicables dans l'hypothèse que les surfaces étaient considérées comme enveloppes de plans: au contraire

---

<sup>1</sup> Voir aussi J. PLÜCKER, *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, I Band (Leipzig, 1895), p. 224-234.

ce thème est seulement touché dans le *System* (p. 27) avec la promesse (qui n'a pas été maintenue) de revenir après sur le même sujet.

PLÜCKER se sert des formules trouvées pour établir des propositions nouvelles sur la courbure des surfaces; à un certain moment, avec un passage rapide et qui ne paraît pas assez justifié, il passe à traiter, comme corollaires, des questions analogues pour les courbes gauches; de cette manière il croit pouvoir considérer comme établi le théorème suivant:

*Le rayon de courbure d'une courbe donnée quelconque en un point donné quelconque est égal à la somme des deux rayons de courbure correspondants des deux projections planes de la courbe sur deux plans quelconques, perpendiculaires entre eux et parallèles à la tangente de la courbe proposée dans le point donné*<sup>1</sup>.

Or, qui se rappelle que dans l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane ou gauche on a une ambiguïté de signe qu'on enlève seulement par des conventions fondées sur des considérations délicates que l'on cherche en vain dans la *Note* de PLÜCKER, éprouve des doutes sur la vérité de cet énoncé. Pour les confirmer ou les infirmer, on peut se servir des considérations suivantes.

Soit  $\Gamma$  une courbe arbitraire représentée, à l'aide de son arc  $s$ , par les formules

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s);$$

soit  $M$  un point de  $\Gamma$  tel que la tangente correspondante de la courbe soit parallèle à l'axe  $Oy$ ; dans ce point on aura

$$x' = 0, \quad y' = 1, \quad z' = 0; \quad (1)$$

et comme l'identité

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

a comme corollaire

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

on a encore

$$y'' = 0. \quad (2)$$

<sup>1</sup> *Abhandlungen* citées, I Bd., p. 232.

Comme plans sur lesquels on effectue les projections dont parle le théorème de PLÜCKER, on peut évidemment se servir des plans  $xy$  et  $yz$ . Soit  $R$  le rayon de courbure de la courbe  $\Gamma$  au point  $M$ ;  $R'$  et  $R''$  les rayons de courbure aux points correspondants  $M'$  et  $M''$  des projections  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$ . On a en général

$$R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \quad (3)$$

$$R' = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \quad R'' = \frac{(z'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{z'y'' - z''y'} ; \quad (4)$$

mais, en appliquant les relations (1) et (2), ces expressions deviennent

$$R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + z''^2}} , \quad R' = \frac{1}{x''} , \quad R'' = \frac{1}{z''}$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2} . \quad (5)$$

C'est une relation bien différente de celle énoncée par PLÜCKER, car elle exprime algébriquement le théorème suivant: *Le carré de la courbure de la courbe donnée dans un point quelconque est égale à la somme des carrés des courbures correspondantes de ses deux projections orthogonales sur deux plans quelconques perpendiculaires entre eux et parallèles à la tangente de la courbe proposé dans le point donné.* Cet énoncé équivaut au suivant: *les hypothèses étant les mêmes, le rayon de courbure de la courbe proposée est la hauteur d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les rayons de courbure des projections.*

Sous cette forme on trouve la proposition dont il s'agit dans un ouvrage italien antérieur à la *Note* de PLÜCKER<sup>1</sup> et que cet éminent mathématicien n'a certainement pas connu.

Mais dans ce même ouvrage on trouve une autre proposition analogue à celle de PLÜCKER et sur la vérité de laquelle on peut

<sup>1</sup> C. SERENI, *Trattato di geometria descrittiva* (Rome, 1826), p. 179-180.

avoir des doutes analogues à ceux que nous avons exposés plus haut; en voici l'énoncé: *Si on fait les projections orthogonales d'une courbe quelconque sur deux plans orthogonaux entre eux et parallèles à une des normales de la courbe, le rayon de courbure correspondant est égal à la somme des rayons de courbure des projections.*

Pour vérifier l'exactitude de ce théorème nous nous servirons des formules précédentes et nous supposerons encore que comme plans de projections on prenne les plans  $xy$  et  $yz$ ; la condition du théorème peut s'énoncer en disant que le plan normal au point considéré est parallèle à l'axe  $Oy$ ; on a en conséquence:

$$y' = 0, \quad x'^2 + z'^2 = 1, \quad x'x'' + z'z'' = 0; \quad (6)$$

les formules (4) deviennent

$$R' = \frac{x'^2}{y''}, \quad R'' = \frac{z'^2}{y''},$$

d'où l'on tire

$$R' + R'' = \frac{1}{y''};$$

or, comme l'expression (3) ne subit aucun changement en conséquence des hypothèses (6), on a évidemment

$$R' + R'' \neq R,$$

à moins qu'on ait  $x'' = 0$ ,  $z'' = 0$ , ce qui n'a pas lieu en général.

Pour confirmer ce résultat négatif, on peut ajouter ce qui suit: Du théorème que nous venons de critiquer SERENI tire le corollaire suivant: *Dans un point où une des normales de la courbe considérée est parallèle au plan de projection, le rayon de courbure de la courbe est égal au correspondant de sa projection, divisé par le carré du cosinus de l'angle que le plan osculateur au point considéré forme avec le plan de projection.* Or il est facile de voir qu'une double application de cette proposition ramène au théorème précédent: par suite, en voulant vérifier ce théorème, on peut commencer par décider si ce corollaire est vrai ou non. Remarquons

à cet effet que, à cause de l'hypothèse (6), l'équation du plan osculateur au point considéré est ( $X, Y, Z$  étant les coordonnées courantes)

$$(X - x)y''z' + (Y - y)(x'z'' - x''z') - (Z - z)x'y'' = 0 ;$$

par suite le cosinus de l'angle  $\gamma$  qu'il fait avec le plan  $xy$  est donnée par la formule

$$\cos \gamma = \frac{-x'y''}{\sqrt{y''^2 z'^2 + (x'z'' - x''z')^2 + x'^2 y''^2}},$$

ou bien

$$\cos \gamma = - \frac{x'y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = - R x' y'' .$$

On a donc

$$R = - \frac{\cos \gamma}{x' y''} \quad R' = \frac{x'^2}{y''} ,$$

et par suite

$$\frac{R}{R'} = - \frac{\cos \gamma}{x'^3} ,$$

formule en désaccord avec le corollaire cité.

Les énoncés de SERENI, comme celui de PLÜCKER, ne sont donc pas exacts.

Gênes, avril 1926.

---

<sup>1</sup> L. c., p. 182.