Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Autor: Streit, Dr Phil. A.

Kapitel: 7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

section K d'une des hauteurs non correspondantes avec la circonférence décrite sur le côté opposé à celle-ci comme diamètre).

Les cercles de centres A, B, C et de rayons AK, BP et CT coupent respectivement à angle droit les cercles décrits sur les côtés opposés a, b, c comme diamètres.

7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

a) Segments supérieurs (fig. 9).

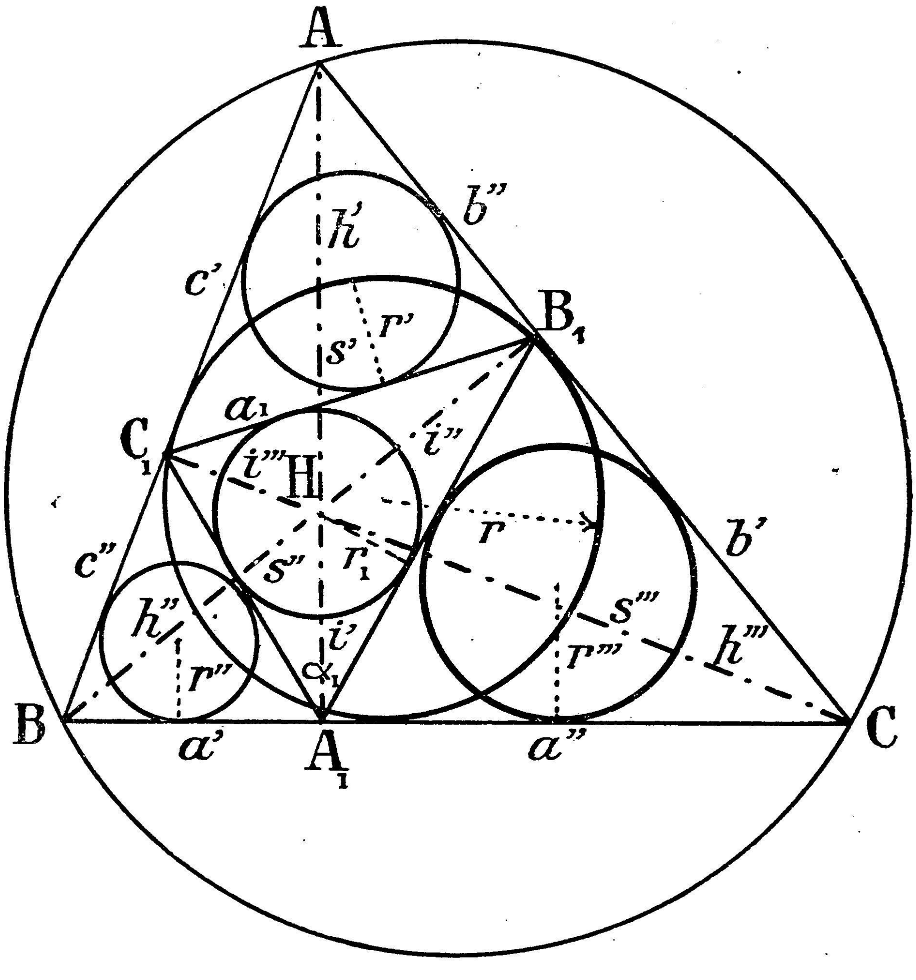

Fig. 9.

$$s' = \frac{b''}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\ .$$

$$\left\{\begin{aligned} s' &= 2R\cos\alpha\ , \\ s'' &= 2R\cos\beta\ , \\ s''' &= 2R\cos\gamma\ . \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

$$s' + s'' + s''' = 2R[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma]\ .$$

Des formules

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1\,,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}\,,$$

résulte

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R}\,. \tag{10}$$

Par suite

$$\underline{s' + s'' + s''' = 2(r+R)}\,, \tag{11}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME X. — *La somme des segments supérieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.*

b) SEGMENTS INFÉRIEURS (fig. 9).

$$i' = BH\,.\cos\gamma = s''\cos\gamma = (2R\cos\beta)\cos\gamma\,.$$

$$\left\{\begin{aligned} i' &= 2R\cos\beta\cos\gamma\,,\\ i'' &= 2R\cos\gamma\cos\alpha\,,\\ i''' &= 2R\cos\alpha\cos\beta\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$i' + i'' + i''' = 2R[\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha]\,. \tag{13}$$

Or la parenthèse peut s'exprimer en fonction des rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs. D'après (10), on a

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R}\,,$$

d'où, en élevant au carré,

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2[\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha] =$$
$$= \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2}\,.$$

De la relation des cosinus, on tire

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Or

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2R}\,. \tag{14}$$

En effet (fig. 9),

$$r_1 = i' \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) ;$$

$$i' = a' \operatorname{tg}(90 - \gamma) = c . \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma ;$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha .$$

Donc

$$r_1 = c\cos\beta \operatorname{cotg}\gamma \cos\alpha = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha ,$$

$$r_1 = 2R(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) ,$$

d'où

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2R} .$$

Par suite

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{R - r_1}{R} . \qquad (15)$$

Remplaçons ci-dessus

$$\frac{R - r_1}{R} + 2[\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha] = \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2} ,$$

d'où l'on tire

$$[\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha] = \frac{r^2 + 2rR + r_1 R}{2R^2} . \qquad (16)$$

En portant cette valeur dans la relation (13), on obtient

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + \left(r + \frac{r^2}{R}\right)} . \qquad (17)$$

L'expression entre parenthèses peut s'exprimer en fonction des rayons r', r'', r''' des cercles inscrits dans les triangles aux sommets AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Ces triangles étant semblables au triangle donné ABC, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha .$$

$$r' = r\cos\alpha , \quad r'' = r\cos\beta , \quad r''' = r\cos\gamma .$$

$$r' + r'' + r''' = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ,$$

ou, en vertu de (10)

$$r' + r'' + r''' = \left(\frac{r^2}{R} + r\right) . \qquad (18)$$

La relation (17) devient donc

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + r' + r'' + r'''} , \tag{19}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME XI. — *La somme des segments inférieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrits dans le triangle donné, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.*

c) SOMME DES HAUTEURS.

Première expression. — En additionnant les relations (11) et (17) membre à membre, on obtient

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 4r + r_1 + \frac{r^2}{R}} , \tag{20}$$

relation exprimant la somme des hauteurs en fonction des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

Deuxième expression. — En additionnant les relations (11) et (19) membre à membre, on obtient pour la somme des hauteurs

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 3r + r_1 + r' + r'' + r'''} . \tag{21}$$

Cette formule exprime la *somme des hauteurs* d'un triangle en fonction du rayon du cercle circonscrit et des rayons des cercles inscrits dans le triangle considéré, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.

La somme des hauteurs est donc une *fonction entière* (très simple) de ces différents rayons.

Remarque. — De (9) et (12) résulte

$$s' . s'' . s''' = 8R^3 (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) ,$$

et

$$i' . i'' . i''' = 8R^3 (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)^2 .$$

Mais (14)

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r_1}{2R} .$$

Par suite

$$\underline{s' . s'' . s''' = r_1 . D^2} , \qquad \text{où} \quad D = 2R , \tag{22}$$

$$\underline{i' . i'' . i''' = r_1^2 . D} , \tag{23}$$

$$\underline{s' . s'' . s''' . i' . i'' . i''' = r_1^3 . D^3} , \tag{24}$$

$$\underline{\frac{i' . i'' . i'''}{s' . s'' . s'''} = \frac{s' . s'' . s'''}{(2R)^3}} . \tag{25}$$