

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE
Autor: Streit, Dr Phil. A.
Kapitel: 7. — Somme des hauteurs d'un triangle.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20669>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

section K d'une des hauteurs non correspondantes avec la circonférence décrite sur le côté opposé à celle-ci comme diamètre).

Les cercles de centres A, B, C et de rayons AK, BP et CT coupent respectivement à angle droit les cercles décrits sur les côtés opposés a, b, c comme diamètres.

7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

a) SEGMENTS SUPÉRIEURS (fig. 9).

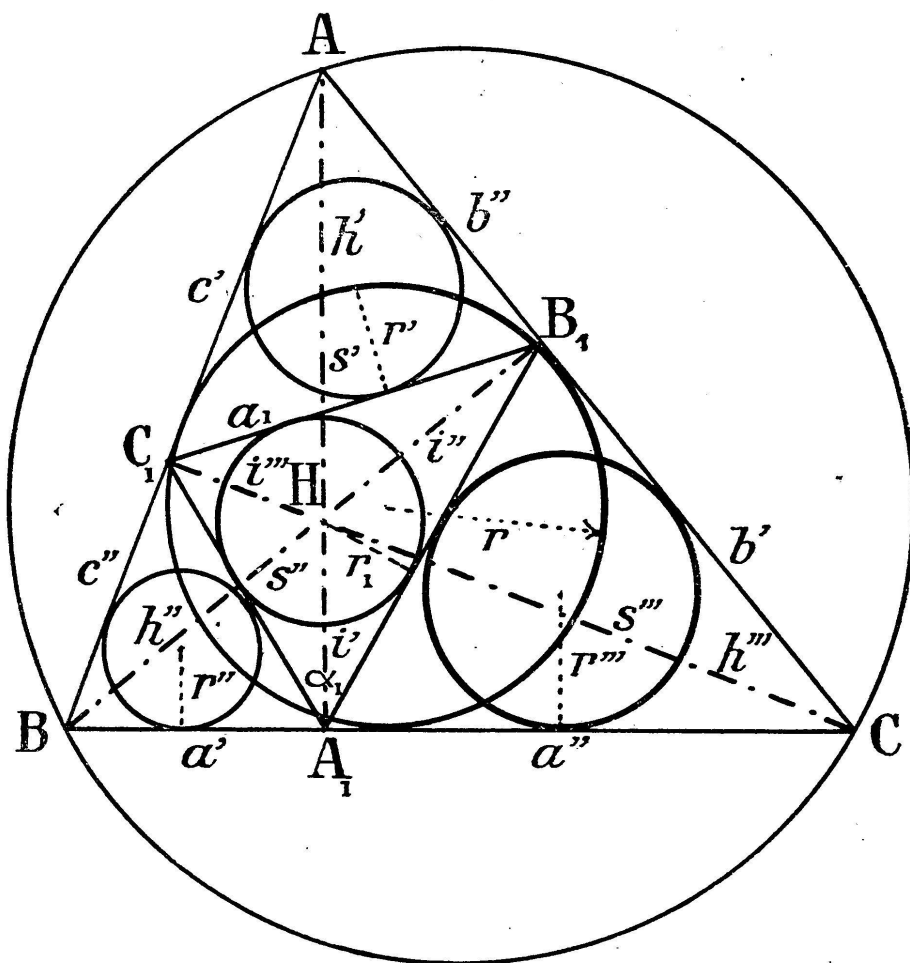


Fig. 9.

$$s' = \frac{b''}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \alpha .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s' = 2R \cos \alpha , \\ s'' = 2R \cos \beta , \\ s''' = 2R \cos \gamma . \end{array} \right. \quad (9)$$

$$s' + s'' + s''' = 2R [\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma] .$$

Des formules

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1 ,$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R} ,$$

résulte

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r + R}{R} . \quad (10)$$

Par suite

$$\underline{s' + s'' + s''' = 2(r + R)} , \quad (11)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME X. — *La somme des segments supérieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.*

b) SEGMENTS INFÉRIEURS (fig. 9).

$$i' = BH \cdot \cos \gamma = s'' \cos \gamma = (2R \cos \beta) \cos \gamma .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i' = 2R \cos \beta \cos \gamma , \\ i'' = 2R \cos \gamma \cos \alpha , \\ i''' = 2R \cos \alpha \cos \beta . \end{array} \right. \quad (12)$$

$$i' + i'' + i''' = 2R[\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha] . \quad (13)$$

Or la parenthèse peut s'exprimer en fonction des rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs. D'après (10), on a

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r + R}{R} ,$$

d'où, en élevant au carré,

$$\begin{aligned} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2[\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha] &= \\ &= \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2} . \end{aligned}$$

De la relation des cosinus, on tire

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma .$$

Or

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{r_1}{2R} . \quad (14)$$

En effet (fig. 9),

$$r_1 = i' \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right);$$

$$i' = a' \operatorname{tg}(90 - \gamma) = c \cdot \cos \beta \operatorname{cotg} \gamma;$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha.$$

Donc

$$r_1 = c \cos \beta \operatorname{cotg} \gamma \cos \alpha = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \beta \cos \gamma \cos \alpha,$$

$$r_1 = 2R(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma),$$

d'où

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{r_1}{2R}.$$

Par suite

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{R - r_1}{R}. \quad (15)$$

Remplaçons ci-dessus

$$\frac{R - r_1}{R} + 2[\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha] = \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2},$$

d'où l'on tire

$$[\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha] = \frac{r^2 + 2rR + r_1 R}{2R^2}. \quad (16)$$

En portant cette valeur dans la relation (13), on obtient

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + \left(r + \frac{r^2}{R}\right)}. \quad (17)$$

L'expression entre parenthèses peut s'exprimer en fonction des rayons r' , r'' , r''' des cercles inscrits dans les triangles aux sommets AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 . Ces triangles étant semblables au triangle donné ABC , on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos \alpha.$$

$$r' = r \cos \alpha, \quad r'' = r \cos \beta, \quad r''' = r \cos \gamma.$$

$$r' + r'' + r''' = r(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma),$$

ou, en vertu de (10)

$$r' + r'' + r''' = \left(\frac{r^2}{R} + r\right). \quad (18)$$

La relation (17) devient donc

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + r' + r'' + r'''} , \quad (19)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME XI. — *La somme des segments inférieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrits dans le triangle donné, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.*

c) SOMME DES HAUTEURS.

Première expression. — En additionnant les relations (11) et (17) membre à membre, on obtient

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 4r + r_1 + \frac{r^2}{R}} , \quad (20)$$

relation exprimant la somme des hauteurs en fonction des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

Deuxième expression. — En additionnant les relations (11) et (19) membre à membre, on obtient pour la somme des hauteurs

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 3r + r_1 + r' + r'' + r'''} . \quad (21)$$

Cette formule exprime la *somme des hauteurs* d'un triangle en fonction du rayon du cercle circonscrit et des rayons des cercles inscrits dans le triangle considéré, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.

La somme des hauteurs est donc une *fonction entière* (très simple) de ces différents rayons.

Remarque. — De (9) et (12) résulte

$$s' \cdot s'' \cdot s''' = 8R^3 (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) ,$$

et

$$i' \cdot i'' \cdot i''' = 8R^3 (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2 .$$

Mais (14)

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{r_1}{2R} .$$

Par suite

$$\underline{s' \cdot s'' \cdot s'''} = r_1 \cdot D^2 , \quad \text{où } D = 2R , \quad (22)$$

$$\underline{i' \cdot i'' \cdot i'''} = r_1^2 \cdot D , \quad (23)$$

$$\underline{s' \cdot s'' \cdot s''' \cdot i' \cdot i'' \cdot i'''} = r_1^3 \cdot D^3 , \quad (24)$$

$$\underline{\frac{i' \cdot i'' \cdot i'''}{s' \cdot s'' \cdot s'''} = \frac{s' \cdot s'' \cdot s'''}{(2R)^3}} . \quad (25)$$