

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE
Autor: Streit, Dr Phil. A.
Kapitel: 5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20669>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La relation (4) devient

$$a'^2 + b^2 = a''^2 + c^2 ,$$

ou

$$b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2 , \quad (5)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME V. — *Dans un triangle RECTANGLE, la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à la différence des carrés construits sur les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

En nous basant sur le *théorème de Pythagore généralisé*, nous pouvons démontrer le théorème II — d'où nous déduirons le théorème I — puis les théorèmes III et IV. Nous envisagerons le cas du triangle *acutangle*.

1^o Pour le *théorème II* (fig. 2):

Appliqué au côté c , le théorème de Pythagore généralisé donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' .$$

Or

$$c^2 = h'^2 + a'^2 .$$

En remplaçant on a

$$h'^2 + a'^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$\begin{aligned} h'^2 &= a^2 - a'^2 + b^2 - 2aa'' , \\ h'^2 &= (a' + a'')a - a'^2 + b^2 - 2aa'' = \\ &= a'(a - a') - aa'' + b^2 . \end{aligned}$$

Mais

$$aa'' = bb' .$$

Par suite

$$\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - bb' + b^2 = a'a'' + b(b - b') , \\ \underline{h'^2} &= \underline{a'a'' + bb''} (= a'a'' + cc') \end{aligned}$$

C'est la relation du théorème II.

2° Déduction du théorème I du théorème II (fig. 1):

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'(a - a') + \frac{cc'' \cdot c'}{c''}.$$

Mais

$$cc'' = aa'.$$

$$h'^2 = aa' - a'^2 + \frac{aa' \cdot c'}{c''} = \frac{aa' c''}{c''} + \frac{aa' c'}{c''} - a'^2,$$

$$h'^2 = \frac{aa' \cdot (c'' + c')}{c''} - a'^2 = \frac{aa' c}{c''} - a'^2.$$

Or

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{a'}{c''},$$

d'où, en divisant membre à membre

$$\underline{h' \cdot h''' = ac - a' c''},$$

ce qui est la relation du théorème I.

3° Pour le *théorème III* (fig. 4):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'',$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a(a' + a'') + b(b' + b'') - 2aa'' = \\ &= aa' + bb' - aa'' + bb''. \end{aligned}$$

Mais

$$bb' = aa''.$$

Par suite

$$\underline{c^2 = aa' + bb'' (= aa' + cc')}.$$

C'est la relation du théorème III.

4° Pour le *théorème IV* (fig. 5):

En appliquant le théorème de Pythagore généralisé aux trois côtés, on obtient successivement

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb'',$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cc'',$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'',$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2aa'' - 2bb'' - 2cc'',$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(2a'') + b(2b'') + c(2c''),$$

ou aussi, puisque $aa'' = bb'$, $bb'' = cc'$, $cc'' = aa'$,

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(2a') + b(2b') + c(2c').$$

Ces deux relations signifient que :

La somme des carrés construits sur les côtés d'un triangle est égale à la somme des trois rectangles construits sur chaque côté et le double d'un des segments correspondants, les trois segments devant être non consécutifs.

Chacune des deux relations précédentes conduit au théorème IV. La seconde peut s'écrire

$$\begin{aligned} (a' + a'')^2 + (b' + b'')^2 + (c' + c'')^2 = \\ = 2[(a' + a'')a' + (b' + b'')b' + (c' + c'')c'] , \end{aligned}$$

d'où résulte

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2) = 2[a'^2 + b'^2 + c'^2] .$$

Par suite

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} ,$$

ce qui est la relation du théorème IV.

5° Le *théorème V* peut se démontrer directement comme suit :

On a

$$b^2 = aa'' \quad \text{et} \quad c^2 = aa' ,$$

d'où

$$b^2 - c^2 = a(a'' - a') = (a'' + a')(a'' - a') ,$$

ou

$$\underline{b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2} .$$

6. — Conséquences résultant des formules du groupe (3).

1° Menons les hauteurs h' et h'' issues des sommets A et B d'un triangle ABC et prolongeons-les jusqu'à leurs points d'intersection T et K avec les circonférences décrites sur les côtés opposés BC et AC comme diamètres. Puis dessinons des circonférences avec les extrémités A et B du troisième côté comme centres et leurs distances à ces points K et T comme rayons (fig. 6).

Soit M un point d'intersection de celles-ci. D'après la troisième des formules (3) on a

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$

ou

$$c^2 = \overline{BT}^2 + \overline{AK}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 .$$