Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE
Autor: Streit, Dr Phil. A.
Kapitel: 4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 19.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En tenant compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III':

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 5).

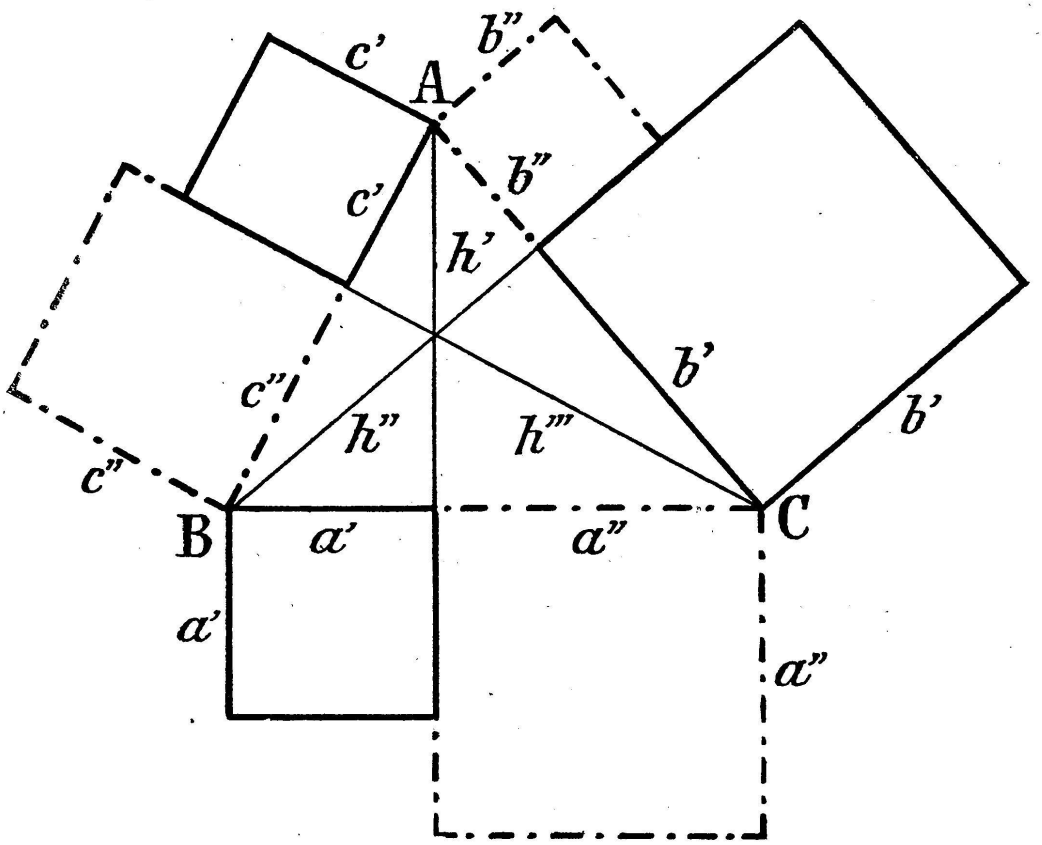

Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2 . (a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'a'' + c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + aa' = b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + bb' = c'c'' + b'b'' + b'^2 ;$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2.(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} . \qquad (4)$$

Second cas. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$).
Ici, $a = a' + a''$; $b = b' - b''$; $c = c'' - c'$.
Les formules (2'), première forme, peuvent donc s'écrire

$$h'^2 = a'a'' - bb'' = a'a'' - b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + cc'' = - b'b'' - c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + aa'' = - c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2.(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' - cc' = a'a'' - c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + aa' = - b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + bb' = - c'c'' - b'b'' + b'^2 ,$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} . \qquad (4)$$

On aboutit donc dans les deux cas au même résultat.
Par suite:

Théorème IV. — *Dans un triangle* quelconque, *les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés correspondants sont égales.*

Cas particulier. — Triangle *rectangle.*
Si $\alpha = 90°$, on a: $b' = b$, $b'' = 0$; $c' = 0$, $c'' = c$.

La relation (4) devient

$$a'^2 + b^2 = a''^2 + c^2 ,$$

ou

$$b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2 , \qquad (5)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME V. — *Dans un triangle* RECTANGLE, *la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à la différence des carrés construits sur les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

En nous basant sur le *théorème de Pythagore généralisé*, nous pouvons démontrer le théorème II — d'où nous déduirons le théorème I — puis les théorèmes III et IV. Nous envisagerons le cas du triangle *acutangle*.

1° Pour le *théorème II* (fig. 2):

Appliqué au côté c, le théorème de Pythagore généralisé donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' .$$

Or

$$c^2 = h'^2 + a'^2 .$$

En remplaçant on a

$$h'^2 + a'^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$h'^2 = a^2 - a'^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

$$h'^2 = (a' + a'')a - a'^2 + b^2 - 2aa'' =$$

$$= a'(a - a') - aa'' + b^2 .$$

Mais

$$aa'' = bb' .$$

Par suite

$$h'^2 = a'a'' - bb' + b^2 = a'a'' + b(b - b') ,$$

$$\underline{h'^2 = a'a'' + bb''} (= a'a'' + cc')$$

C'est la relation du théorème II.