Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Autor: Streit, Dr Phil. A.

Kapitel: 2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

On a donc

$$\frac{h''' h'}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc} \cdot$$

$$h''' h' = ca - c'' a' \ .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{ \begin{aligned} h' h'' &= ab - a'' b' \ , \\ h'' h''' &= bc - b'' c' \ , \\ h''' h' &= ca - c'' a' \ , \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

c'est-à-dire

Théorème I. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants, diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Remarque. — Ce théorème est valable quels que soient les angles du triangle.

2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

Premier cas. — *Triangle* acutangle (fig. 2).

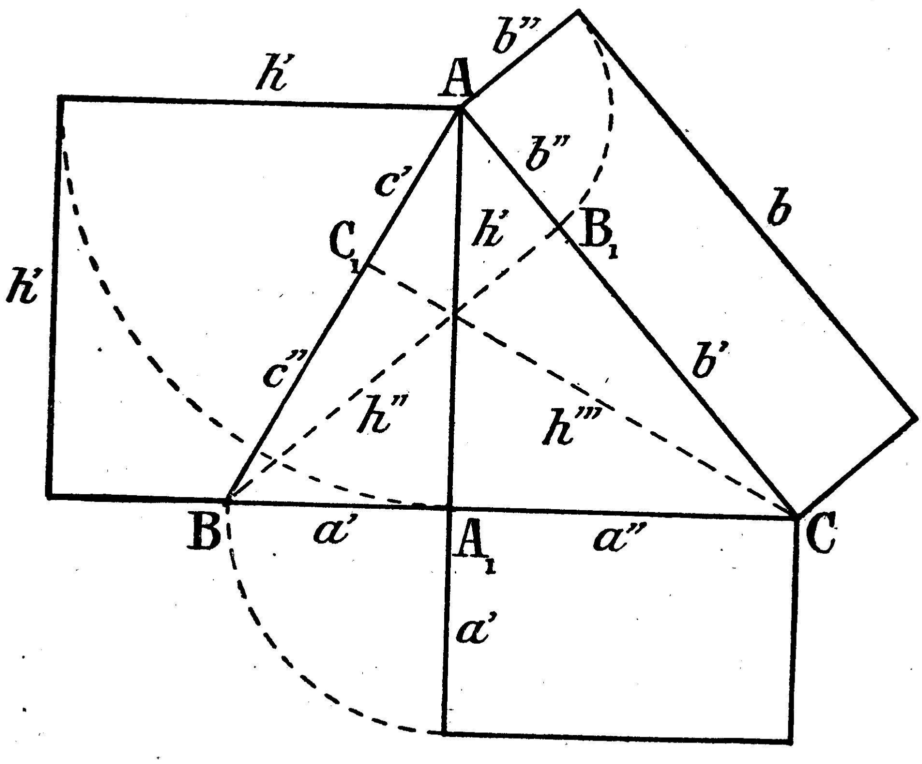

Fig. 2.

Soit ABC un triangle acutangle. D'après la première des formules du groupe (1), nous avons

$$h' h'' = ab - a'' b' \ .$$

Les triangles semblables AA_1C et BB_1C fournissent la relation

$$\frac{h'}{h''} = \frac{a''}{b'} .$$

Multiplions membre à membre

$$h'^2 = \frac{aa''b}{b'} - a''^2 = \frac{aa''(b' + b'')}{b'} - a''^2 ,$$

$$h'^2 = a''(a - a'') + \frac{aa''b''}{b'} .$$

Les quadrilatères ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 étant inscriptibles, le théorème des sécantes donne

$$aa'' = bb' ; \qquad bb'' = cc' ; \qquad cc'' = aa' .$$

Remplaçons aa'' par bb' dans h'^2, puis appliquons la permutation circulaire

$$\left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' + bb'' , \\ h''^2 &= b'b'' + cc'' , \\ h'''^2 &= c'c'' + aa'' , \end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' + cc' , \\ h''^2 &= b'b'' + aa' , \\ h'''^2 &= c'c'' + bb' , \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME II. — *Le carré construit sur une hauteur d'un triangle acutangle est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant augmenté du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui.*

SECOND CAS. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$) (fig. 3).

En appliquant successivement à chacune des formules du groupe (1) le même procédé que dans le premier cas et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit aux résultats ci-dessous

$$\alpha > 90° ,$$

$$\left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - bb'' , \\ h''^2 &= - b'b'' + cc'' , \\ h'''^2 &= - c'c'' + aa'' , \end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - cc' , \\ h''^2 &= - b'b'' + aa' , \\ h'''^2 &= - c'c'' + bb' . \end{aligned}\right. \qquad (2')$$

Dans le cas d'un triangle *obtusangle*, le carré construit sur une hauteur est donc équivalent à la *différence* des deux rectangles en question.

Les relations (2) et (2′) peuvent être exprimées par le théorème unique suivant:

THÉORÈME II′. — *Dans un triangle* QUELCONQUE, *le carré construit sur une hauteur est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant augmenté*

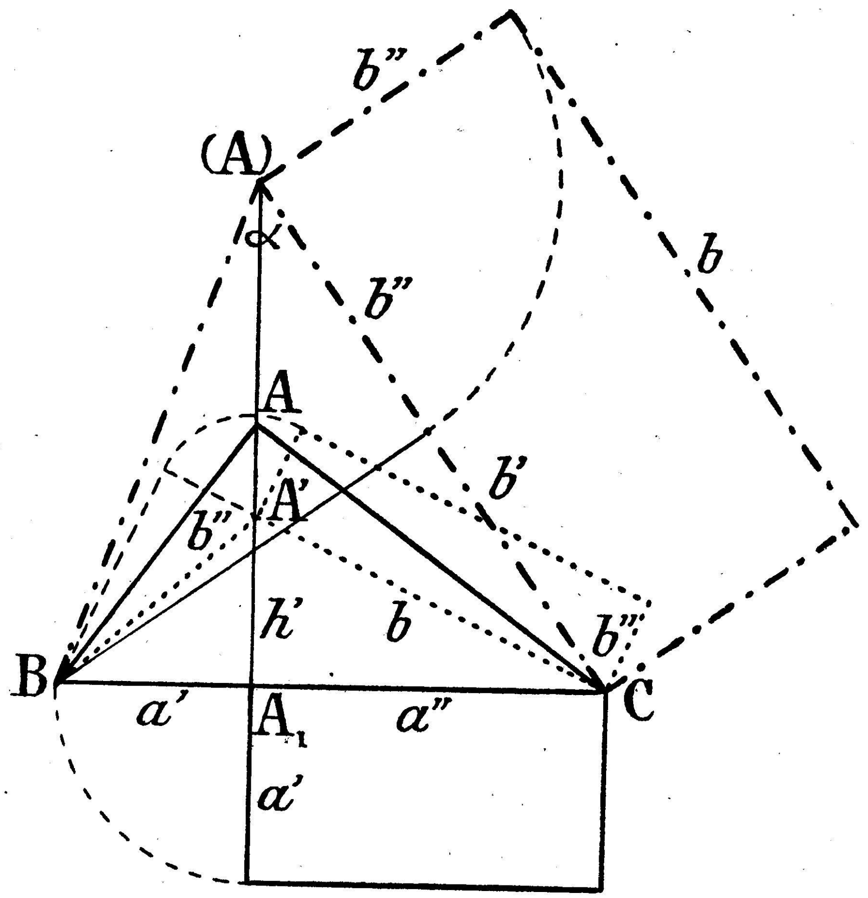

Fig. 3.

ou diminué du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, suivant que les trois angles sont aigus ou que l'angle traversé par la hauteur est obtus. Le carré d'une hauteur ne traversant pas l'angle obtus est égal au second rectangle moins le premier.

Remarque 1. — Si nous convenons d'envisager les segments

$$a' = BA_1 \,, \quad a'' = A_1C \,; \quad b' = CB_1 \,, \quad b'' = B_1A \,;$$
$$c' = AC_1 \,, \quad c'' = C_1B$$

comme *positifs* quand ils sont dirigés dans le sens ABCA et *négatifs* dans le sens contraire ACBA, *les formules* (2) *sont alors valables dans tous les cas*, donc quels que soient les angles du triangle. On constate d'emblée qu'un segment *négatif* est situé en entier sur le prolongement du côté correspondant; un segment qui empiète seulement sur le prolongement du côté est positif.

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 3) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Le carré construit sur la hauteur d'un triangle rectangle est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ\ , \quad \underline{h'^2 = a'a''}\ .$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h', que les sommets B et C restent fixes et les segments a' et a'' par conséquent invariables.

1° Si A s'éloigne de a, l'angle α *diminue*, la hauteur h' augmente et l'on a, d'après les formules (2) concernant le triangle *acutangle*

$$\alpha < 90^\circ\ , \quad \underline{h'^2 = a'a'' + bb''}\ .$$

Le carré construit sur la hauteur h' a ainsi *augmenté* du rectangle bb''.

2° Si par contre A se rapproche de a, l'angle α *augmente*, la hauteur h' diminue et l'on a, d'après les formules (2') applicables au triangle *obtusangle* en A

$$\alpha > 90^\circ\ , \quad \underline{h'^2 = a'a'' - bb''}\ ,$$

où b'' doit être pris en valeur absolue.

Dans ce cas, le carré construit sur la hauteur h' a *diminué* du rectangle bb''.

D'ailleurs, en faisant tendre α vers 90°, la première des formules (2) (ou (2')), c'est-à-dire

$$h'^2 = a'a'' \pm bb''$$

devient, puisqu'à la limite $b'' = 0$,

$$\alpha = 90^\circ\ , \quad \underline{h'^2 = a'a''}\ .$$

Nous pouvons donc envisager la relation $h'^2 = a'a'' \pm bb''$ relative à un triangle *acutangle* ou *obtusangle* en A, c'est-à-dire le théorème II', comme étant la *généralisation* du théorème énoncé ci-dessus et relatif à un triangle *rectangle.*

Si l'on tient compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* — c'est-à-dire le théorème II' — peut s'énoncer comme suit:

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur chaque hauteur est équivalent à la somme algébrique du rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant et du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, la surface d'un des rectangles devant être prise négativement si l'un des segments qui deviennent ses dimensions est négatif.*

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 4).

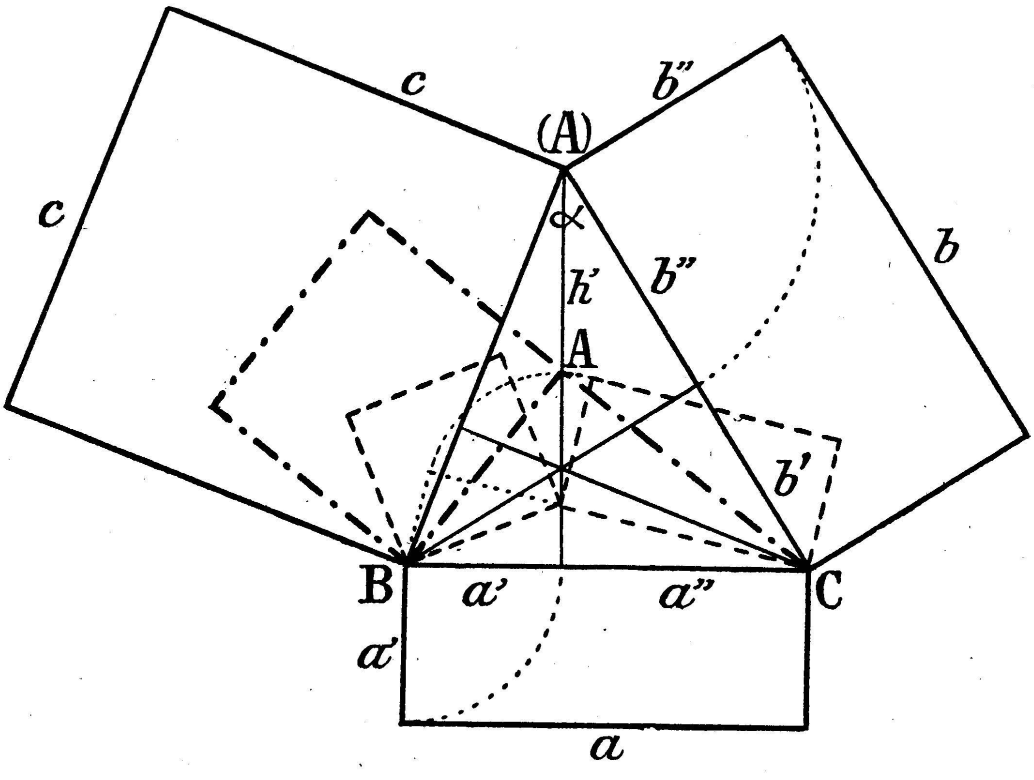

Fig. 4.

Le théorème II donne

$$h'^2 = a'a'' + bb'' .$$