Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Autor: Streit, Dr Phil. A.

Kapitel: 1. — Rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

PAR

A. STREIT, Dr Phil. (Berne).

INTRODUCTION.

Nous désignerons par a', a'', b', b'', c', c'' les segments déterminés par les hauteurs d'un triangle sur les côtés respectifs a, b, c.

Nous démontrerons d'abord un théorème relatif au rectangle construit sur deux hauteurs, d'où nous déduirons un autre théorème concernant le carré construit sur une hauteur. En utilisant celui-ci, nous obtiendrons une propriété relative à la somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs et une relation se rapportant au carré construit sur un côté. En appliquant cette relation, nous aboutirons à diverses propriétés relatives aux hauteurs et à la somme des carrés construits sur les trois côtés. Enfin, nous établirons des formules nouvelles pour la somme et le produit des trois hauteurs.

1. — Rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque.

De la relation entre les angles α, β, γ d'un triangle (fig. 1)

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ ,$$

on tire

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma ,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a - a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b} .$$

Mais

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} + \frac{a' c''}{bc} .$$

En remplaçant on a

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} - \left[\frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc}\right] ,$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \left[\frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc}\right] .$$

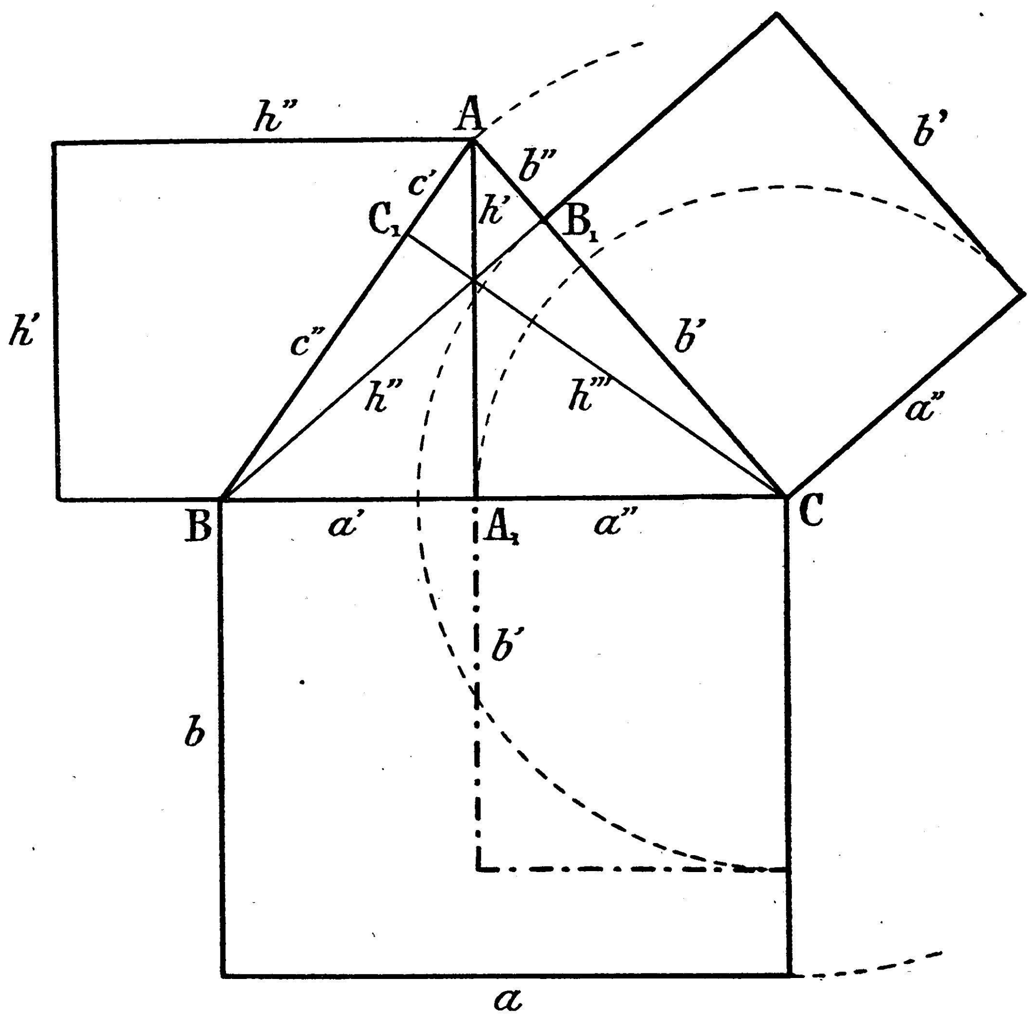

Fig. 1.

Or

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta .$$

Par suite

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc} .$$

Mais

$$\sin\alpha = \frac{h'''}{b} ; \qquad \sin\beta = \frac{h'}{c} ,$$

$$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{h''' . h'}{bc} .$$

On a donc

$$\frac{h'''h'}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} \, .$$

$$h'''h' = ca - c''a' \, .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{ \begin{aligned} h'h'' &= ab - a''b' \, , \\ h''h''' &= bc - b''c' \, , \\ h'''h' &= ca - c''a' \, , \end{aligned} \right. \tag{1}$$

c'est-à-dire

Théorème I. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants, diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Remarque. — Ce théorème est valable quels que soient les angles du triangle.

2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

Premier cas. — *Triangle* acutangle (fig. 2).

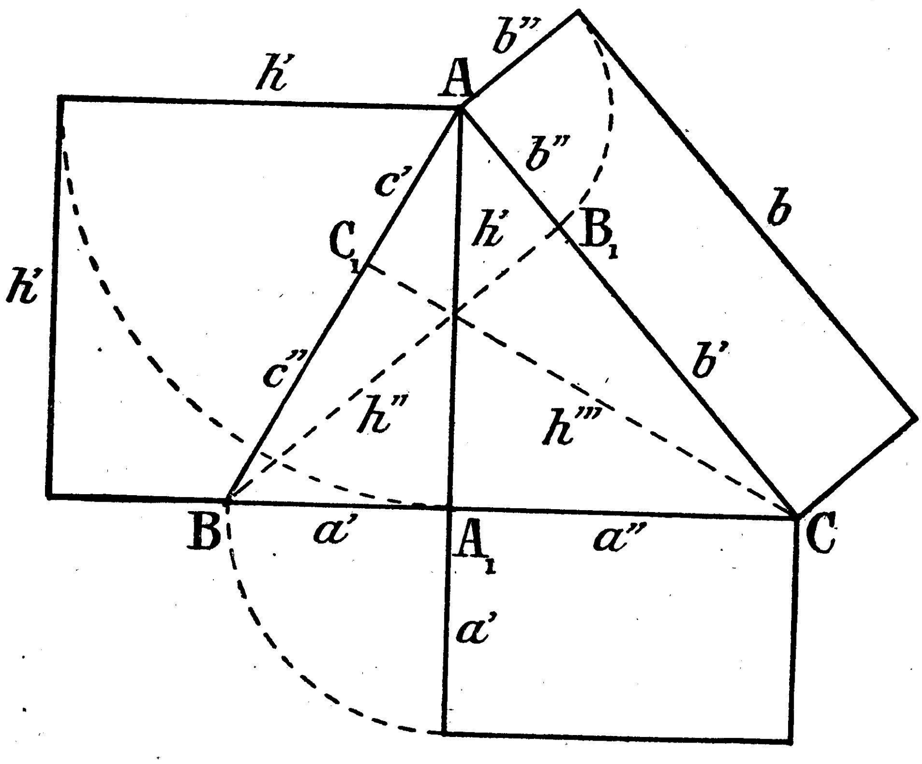

Fig. 2.

Soit ABC un triangle acutangle. D'après la première des formules du groupe (1), nous avons

$$h'h'' = ab - a''b' \, .$$