Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la dérivation des séries terme à terme.

Etant donnée une série $\sum u_k(x)$ *convergente pour toute valeur de* x *appartenant à un intervalle donné* (a, b), *si les dérivées* $u'_k(x)$ *des termes de cette série sont des fonctions bien définies de* x *partout dans l'intervalle considéré, et si, de plus, la série* $\sum u'_k(x)$ *est uniformément convergente dans cet intervalle, cette dernière série représente, dans l'intervalle* (a, b), *la dérivée de la fonction* $f(x)$ *définie par la série proposée.*

Pour démontrer ce théorème je m'appuie: 1° sur le théorème des accroissements finis, applicable, comme on sait, à une fonction d'une variable dans tout intervalle où cette fonction admet une dérivée partout bien définie; 2° sur le fait qu'une série qui a pour termes des fonctions de x continues dans un intervalle donné, et qui, en outre, est uniformément convergente dans cet intervalle, représente, dans cet intervalle, une fonction continue de x.

Soient x et x_0 deux nombres quelconques de l'intervalle (a, b). On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} . \tag{1}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pour} \quad x \neq x_0 \qquad (2) \\ \varphi_k(x_0) &= u'_k(x_0) \ . \qquad (3) \end{aligned}\right\} \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Les fonctions φ_k ainsi définies sont évidemment continues pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b). De plus, je dis que la série $\sum \varphi_k(x)$ est uniformément convergente dans cet intervalle. En effet, pour chaque couple d'entiers positifs n et p, on a

$$\sum_{n+1}^{n+p} \varphi_k(x) = \sum_{n+1}^{n+p} u'_k(\xi_{n,p}) , \tag{4}$$

$\xi_{n,p}$ représentant un nombre compris dans l'intervalle (x_0, x). Cette relation, qui se réduit à une identité en vertu de (3), quand $x = x_0$, se déduit de (2), quand x est différent de x_0, en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\sum_{n+1}^{n+p} u_k(x)$ à dérivées bien définies partout dans l'intervalle (a, b). Or, soit une quantité positive ε choisie à l'avance aussi petite que l'on voudra; par hypothèse, on aura, à partir d'une valeur de l'entier n suffisamment grande, quel que soit l'entier positif p, et pour toute valeur de ξ appartenant à l'intervalle (a, b):

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} u'_k(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\sum_{n+p+1}^{\infty} u'_k(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} u'_k(\xi)\right| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} u'_k(\xi) - \sum_{n+p+1}^{\infty} u'_k(\xi)\right| < \varepsilon .$$

donc, en vertu de (4), pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b)

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \varphi_k(x)\right| < \varepsilon .$$

La convergence uniforme de la série $\Sigma\varphi_k(x)$ dans l'intervalle (a, b) est ainsi établie. Cette série représente donc dans cet intervalle une fonction continue de x, et l'on pourra en particulier écrire

$$\lim_{x=x_0} \sum \varphi_k(x) = \sum \varphi_k(x_0) ,$$

c'est-à-dire, en vertu de (2), (1) et (3)

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum u'_k(x_0) .$$

C. Q. F. D.

Ce théorème [1] se trouve démontré d'une manière un peu différente dans les deux dernières éditions du *Cours d'Analyse* de M. GOURSAT.

15 novembre 1926. W. RIVIER (Lausanne).

---

[1] On trouvera une forme plus générale de ce théorème dans le traité de H. KNOPP, *Theórie u. Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 343, Satz 4, 2[e] édition. — Note de la Rédaction.

Pour une bibliographie concernant les recherches théoriques modernes concernant le calcul des probabilités.

M. Maurice Fréchet, Professeur à l'Université de Strasbourg, a été chargé de rédiger le Fascicule 3 (Recherches théoriques modernes) du Tome I (Les principes de la Théorie) du *Traité du Calcul des Probabilités* de M. Emile Borel.

Il serait reconnaissant à ceux qui voudraient bien lui signaler les travaux concernant le Calcul des Probabilités proprement dit (applications exclues) qui méritent d'être rapportés (et n'auraient pas été exposés dans les Fasc. 1 et 2 du Tome I). Des références (et mieux encore un résumé) seraient les bienvenus.

Erratum à une Note précédente.

(Ombilics et lignes de courbure, l'*Enseignement mathématique*, t. XXV, Nos 1-2-3.)

J'ai commis dans cette note une erreur relative à la loi de formation des fonctions Λ_p et Δ_p indiquée au début de la page 125; les deux premières lignes de cette page sont à supprimer. La loi de formation véritable est moins simple et un peu longue à développer ici; voici les modifications à introduire.

A côté des dérivées prises dans la direction d'une ligne interviennent celles qui sont prises dans la direction perpendiculaire; nous indiquerons par des astérisques les éléments relatifs à cette seconde direction. Pour le second ordre

$$\Lambda_2^* = -\Lambda_2 \qquad \Delta_2^* = -\Delta_2 .$$

Pour le troisième ordre, on a les relations

$$\Lambda_3^* = -\Delta_3 + \frac{d\mathrm{H}}{ds^*} \qquad \Delta_3^* = \Lambda_3 - \frac{d\mathrm{H}}{ds}$$

de sorte qu'au lieu des formules indiquées, il vient

$$\Lambda_4 = \frac{d\Lambda_3}{ds} - k_g(2\Delta_3 - \Lambda_3^*) = \frac{d\Lambda_3}{ds} - 3k_g\Delta_3 + k_g\frac{d\mathrm{H}}{ds^*}$$

$$\Delta_4 = \frac{d\Delta_3}{ds} + k_g(2\Lambda_3 + \Delta_3^*) = \frac{d\Delta_3}{ds} + 3k_g\Lambda_3 - k_g\frac{d\mathrm{H}}{ds} .$$

Les modifications introduites dans ces formules et les suivantes ne changent du reste pas les conclusions que j'en tirais dans la note citée. Pour une étude plus complète, le lecteur pourra se reporter à l'excellent livre de M. H. Neville: *Multilinear Functions of Directions*, Cambridge, 1921.

Le Hâvre, le 14 octobre 1926.

P.-C. Delens.