Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: V. Volterra et J. Pérès. — Leçons sur la composition et les fonctions permutables (Collection E. Borel). 1 vol. gr. in-8° de viii-184 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1924.

Autor: Buhl, A.

Depuis lors il n'a cessé de s'occuper du grand problème qu'il a cherché à aborder par des côtés différents, poussant parfois la généralisation au-delà des conditions envisagées par Kronecker. Il a eu du reste des surprises. Des cas d'exception se sont présentés, qui ont dû être traités à part, et ce n'est qu'en 1920 que les dernières difficultés ont pu être aplanies. Enfin M. Fueter s'est aperçu récemment que les modules singuliers et les racines de l'unité pouvaient être remplacés par les valeurs singulières des fonctions elliptiques, d'où une simplification importante, les racines des équations de Kronecker s'exprimant directement à l'aide de ces irrationnelles.

C'est le résultat de toutes ces belles et patientes recherches, entreprises par Kronecker, continuées par H. Weber et M. Hilbert, reprises par lui-même que M. Fueter vient exposer dans ses leçons sur les modules singuliers et la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques. Cette monographie sur un sujet peu connu, première tentative, si je ne me trompe, de grouper sous une forme didactique tant d'admirables découvertes, ne suppose que la connaissance des éléments de la théorie des fonctions, des principes de l'algèbre et de la théorie des nombres. Les lecteurs auxquels elle s'adresse seront donc nombreux et à plus d'un elle inspirera, je n'en doute pas, le goût de ces belles recherches, un peu délaissées aujourd'hui.

L'ouvrage de M. Fueter comprendra deux parties. Dans la première, qui vient de paraître, l'auteur expose les théories spéciales qui constituent la base de l'édifice: théorie des groupes et des fonctions modulaires, équations de transformation, théorie arithmétique du corps quadratique imaginaire, qui gagnerait, je crois, à être exposée sous une forme un peu moins concise, théorie des fonctions elliptiques, esquissée à grands traits, et surtout cette belle multiplication complexe, dont la découverte remonte à Abel, et qui fournit les éléments ultimes à partir desquels se construisent les racines des équations abéliennes de Kronecker. Ce qui frappe dans cet exposé et ce qui en fait le charme, c'est la simplicité et l'élégance des méthodes employées; je signalerai par exemple son esquisse de la théorie du groupe modulaire et en particulier la détermination du domaine fondamental, et surtout son exposé de la théorie des modules singuliers et des fonctions elliptiques qu'il a considérablement simplifiée.

Cette large synthèse de recherches parfois disparates est faite avec art et un sentiment de la mesure, assez rare à notre époque de productions hâtives. D. Mirimanoff (Genève).

V. Volterra et J. Pérès. — **Leçons sur la composition et les fonctions permutables** (Collection E. Borel). 1 vol. gr. in-8° de VIII–184 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1924.

Ces captivantes théories, qui font suite à celles déjà exposées sur les fonctions de ligne, éveillent, dès les premières pages, des réminiscences relatives au Calcul tensoriel et à la Théorie des Groupes de S. Lie. Il s'agit de déterminants ou de matrices dont certaines propriétés de symétrie sont conservées quand les indices des éléments deviennent des variables continues; des sommes finies deviennent des intégrales et le signe d'intégration est sous-entendu (ou simplement indiqué par un astérisque) quand la variable d'intégration figure dans deux facteurs, de même qu'en Calcul tensoriel un indice répété deux fois entraîne une sommation.

Un produit $f(x, \xi)\, g(\xi, \varphi)$, à intégrer en ξ, n'est pas sans analogie avec

$a_i\, b^i$ à sommer en i et certaines expressions *diagonales* rappellent certains termes *contractés*. La *composition* (continue), analogue à la *sommation* (discontinue), est associative, distributive mais non forcément commutative, ce qui rappelle encore la dérivation tensorielle. Sans doute, dans les deux théories, ces harmonies proviennent très directement des déterminants initialement invoqués. Mais l'exposition de MM. Volterra et Pérès ne tarde pas à prendre un caractère hautement original et à révéler des voies où se résolvent avec une facilité et une élégance inattendues des classes étendues d'équations intégrales et intégro-différentielles. Il y a une *algèbre* de composition en laquelle les lettres surmontées d'astérisques obéissent, sous des conditions très larges, à des règles analogues à celles de l'algèbre ordinaire. Il y a une *analyse* de composition avec des séries à aspect exponentiel (analogues à celles qui donnent les transformations finies d'un groupe défini par ses transformations infinitésimales, d'où l'allusion faite plus haut à la théorie de Lie), séries susceptibles d'un mode d'inversion qui conduit aux *logarithmes* de composition.

Le caractère non obligatoirement commutatif de la composition conduit à rechercher les fonctions permutables à une fonction donnée. La question dépend d'une équation intégro-différentielle susceptible d'une résolution complète plus délicate par les questions d'analyticité qu'elle soulève que par son apparence formelle.

Quant aux transformations qui conservent la composition, elles s'exposent à l'aide d'un symbolisme algébrique admirablement simple. D'ailleurs, le symbolisme, qui nous donne des puissances de composition d'abord entières, conduit aussi aisément aux puissances fractionnaires puis aux puissances négatives, d'où des fractions de composition présentant de curieuses ressemblances avec les fractions arithmétiques. M. Whittaker a donné récemment les solutions d'équations intégrales à limites variables mais le plus remarquable est qu'au point de vue ici étudié ces solutions prennent figure de simples identités algébriques, l'algèbre en question étant, bien entendu, l'algèbre de composition.

Deux chapitres sont consacrés aux logarithmes de composition nés comme on l'a vu plus haut. Et voici, enfin, dans toute sa généralité, l'analyse de composition; elle procède de séries symboliques écrites à l'image des séries de Taylor, de Laurent, des séries à exposants fractionnaires de la théorie des fractions algébriques.

Une application intéressante des séries de composition consiste à y retrouver les fonctions sommatrices introduites par M. E. Borel dans ses théories de prolongement analytique.

En résumé, symbolisme puissant, curieux, utile au même titre que la théorie des équations intégrales, bien digne de la renommée de M. Volterra et complété, en de nombreux points de grande importance, par le jeune et ingénieux talent de M. Joseph Pérès. A. Buhl (Toulouse).

E. Borel. — **Principes d'Algèbre et d'Analyse** (Bibliothèque d'Education scientifique publiée sous la direction de M. Emile Borel). — 1 vol. in-8° carré de VIII–312 pages; 7 fr. 50; Albin Michel, Paris, 1924.

Voici un nouveau volume commençant une nouvelle collection. Celle-ci s'adresse à tous ceux que la Science intéresse sous ses formes les plus accessibles et non sous telle ou telle forme pédagogique correspondant à