

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1924-1925)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Rubrik:** BIBLIOGRAPHIE

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Zurich**; *Ecole Polytechnique fédérale*, section normale. — **HIRSCH**: Höh. Mathematik. — **FRANEL**: Mathem. sup. — **GROSSMANN**: Darstellende Geometric. Homogene Koordinaten. — **KOLLROS**: Géométrie descriptive; Géométrie projective. — **MEISSNER**: Mechanik. — **PLANCHEREL**: Géométrie analyt.; Equations diff.; Mathem. Sem. — **WEYL**: Vektor-Analysis; Axiomatik; Math. Sem. — **BÄSCHLIN**: Vermessungskunde; Höhere Geodäsie. — **WOLFER**: Astronomie; Theorie der Finsternisse. — **AMBERG**: Didaktik d. math. Unterrichts. — **MARCHAND**: Versicherungsmathematik.

*Cours libres*. — **BEYEL**: Rechenschieber mit Uebgn.; Darst. Geometrie; Analyt. Geometrie des Raumes. — **KIENAST**: Riemann's Zéta-Funktion.

## BIBLIOGRAPHIE

**Ch. CAILLER**. — **Introduction géométrique à la Mécanique rationnelle**, par Charles Cailler, Professeur à l'Université de Genève. Ouvrage publié par H. FEHR et R. WAVRE, — 1 vol. in-8° de XII-627 p. avec 120 fig.; 20 fr. suisses, Georg et C<sup>ie</sup>, Genève; 60 fr. français, Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>, Paris.

Les mots suivants, que nous empruntons à l'avertissement de l'Auteur: « Nous ne nous limitons pas à l'espace à 2 ou 3 dimensions et nous ne supposons pas davantage que cet espace, de dimensions quelconques, possède le caractère euclidien: il suffit que les mouvements sans déformations y soient possibles », caractérisent bien l'esprit de ce livre.

Les notions premières de la mécanique rationnelle sont des notions de pure géométrie; la cinématique elle-même est l'étude d'un groupe géométrique. Le fait que ce groupe possède le caractère euclidien ou non — doit être un fait d'expérience, duquel on ne préjugera pas. Et le nombre de dimensions n'étant pas borné à 3, le cadre est assez large pour contenir la cinématique einsteinienne de la relativité restreinte.

L'auteur n'a pas cherché d'ailleurs à parvenir par le plus rapide chemin à tel ou tel résultat visé d'avance. Il a pris un visible plaisir — et on l'éprouve après lui — au changeant paysage. Il s'agit ici, d'un vaste remaniement de l'arsenal de toutes les notions géométriques nécessaires à l'étude de la mécanique, mise au point dont le géomètre profitera peut-être plus encore que tout autre. Cet ouvrage montre d'ailleurs, à n'en point douter, que Cailler était un véritable géomètre, bien que sa méthode soit constamment analytique. Car cette analyse est au fond du bon et élégant « calcul géométrique ». Le livre débute par une théorie bien menée, et conçue dans l'esprit que nous avons dit plus haut, des formes multilinéaires, des formes quadratiques et des substitutions linéaires pour aboutir aux transformations automorphes d'une forme quadratique.

La deuxième partie — fort riche et fort diverse — est consacrée au problème de la composition des forces. Elle contient d'abord la géométrie

vectorielle élémentaire, la géométrie réglée, la géométrie des éléments (points, plans et droites) cotés, la théorie des dynames et une étude très poussée du cylindroïde de Plücker. Cailler se sert avec prédilection des coordonnées complexes de la droite, qui représentent l'espace réglé sur les points complexes d'une sphère. Cette identification (qu'on doit à Study dans sa « Geometrie der Dynamen » et dont Blaschke se sert aussi dans sa « Differentialgeometrie ») permettra par exemple de ramener l'étude du mouvement quelconque d'un corps solide à celle d'une rotation autour d'un point fixe. Mais c'est surtout pour la composition des dynames que Cailler en fait un usage systématique et particulièrement heureux.

La troisième partie est consacrée aux déplacements finis et contient entre autres les transformations orthogonales à 3 et 4 indéterminées, la théorie des quaternions (et biquaternions) et enfin la Géométrie des corps solides, dont Cailler s'était occupé à diverses reprises. La quatrième partie enfin étudie la cinématique et les mouvements infinitésimaux. Citons-en un beau chapitre sur les mouvements de roulement.

Ce livre mérite d'être lu. Il faut féliciter MM. Fehr et Wavre de l'œuvre de pieuse amitié qu'ils ont accomplie, en s'occupant de sa mise au point et de sa parution.

F. GONSETH (Berne).

R. FUETER. — **Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.** (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band XLI, 1). — 1 vol., gr. in-8°, VI et 142 p.; prix G.-M. 5.60, relié G.-M. 7; B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1924.

C'est en 1853 que, dans une note malheureusement trop brève, Kronecker donnait un premier résumé de ses recherches sur les équations abéliennes. Elles aboutissaient à ce théorème qui est certainement parmi les plus beaux qu'on connaisse en mathématiques: les racines des équations abéliennes absolues sont des fonctions rationnelles des racines de l'unité, et par conséquent les équations abéliennes absolues sont fournies par les équations de la division du cercle. Qu'arrive-t-il lorsque les équations envisagées sont abéliennes dans un domaine de nombres algébriques quelconques ? Kronecker semble entrevoir un théorème plus général, mais ce n'est que quelques années plus tard que sa pensée se précise. Conduit par ses recherches sur les fonctions elliptiques à étudier une catégorie particulière d'équations abéliennes, c'est à ces équations remarquables, abéliennes dans un corps quadratique imaginaire, qu'il cherche à étendre son grand théorème de 1853. Guidé par l'analogie, il affirme que le rôle des équations de la division du cercle est joué dans ce cas par les équations de transformation des fonctions elliptiques à modules singuliers. Ici encore Kronecker se borne à quelques indications, sans jamais donner de démonstration proprement dite. On sait que H. Weber, qui s'était longuement occupé de ces problèmes, a donné en 1886 une démonstration rigoureuse du premier théorème de Kronecker; il n'a pas réussi à démontrer le second, dont Kronecker était particulièrement fier et qu'il appelait son « liebster Jugendtraum ».

Il appartenait à M. Fueter de combler cette lacune. Un premier pas important a été fait par lui dans sa thèse inaugurale publiée en 1903.

Depuis lors il n'a cessé de s'occuper du grand problème qu'il a cherché à aborder par des côtés différents, poussant parfois la généralisation au-delà des conditions envisagées par Kronecker. Il a eu du reste des surprises. Des cas d'exception se sont présentés, qui ont dû être traités à part, et ce n'est qu'en 1920 que les dernières difficultés ont pu être aplanies. Enfin M. Fueter s'est aperçu récemment que les modules singuliers et les racines de l'unité pouvaient être remplacés par les valeurs singulières des fonctions elliptiques, d'où une simplification importante, les racines des équations de Kronecker s'exprimant directement à l'aide de ces irrationnelles.

C'est le résultat de toutes ces belles et patientes recherches, entreprises par Kronecker, continuées par H. Weber et M. Hilbert, reprises par lui-même que M. Fueter vient exposer dans ses leçons sur les modules singuliers et la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques. Cette monographie sur un sujet peu connu, première tentative, si je ne me trompe, de grouper sous une forme didactique tant d'admirables découvertes, ne suppose que la connaissance des éléments de la théorie des fonctions, des principes de l'algèbre et de la théorie des nombres. Les lecteurs auxquels elle s'adresse seront donc nombreux et à plus d'un elle inspirera, je n'en doute pas, le goût de ces belles recherches, un peu délaissées aujourd'hui.

L'ouvrage de M. Fueter comprendra deux parties. Dans la première, qui vient de paraître, l'auteur expose les théories spéciales qui constituent la base de l'édifice: théorie des groupes et des fonctions modulaires, équations de transformation, théorie arithmétique du corps quadratique imaginaire, qui gagnerait, je crois, à être exposée sous une forme un peu moins concise, théorie des fonctions elliptiques, esquissée à grands traits, et surtout cette belle multiplication complexe, dont la découverte remonte à Abel, et qui fournit les éléments ultimes à partir desquels se construisent les racines des équations abéliennes de Kronecker. Ce qui frappe dans cet exposé et ce qui en fait le charme, c'est la simplicité et l'élégance des méthodes employées; je signalerai par exemple son esquisse de la théorie du groupe modulaire et en particulier la détermination du domaine fondamental, et surtout son exposé de la théorie des modules singuliers et des fonctions elliptiques qu'il a considérablement simplifiée.

Cette large synthèse de recherches parfois disparates est faite avec art et un sentiment de la mesure, assez rare à notre époque de productions hâtives.

D. MIRIMANOFF (Genève).

V. VOLTERRA et J. PÉRÈS. — *Leçons sur la composition et les fonctions permutable* (Collection E. Borel). 1 vol. gr. in-8° de VIII-184 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1924.

Ces captivantes théories, qui font suite à celles déjà exposées sur les fonctions de ligne, éveillent, dès les premières pages, des réminiscences relatives au Calcul tensoriel et à la Théorie des Groupes de S. Lie. Il s'agit de déterminants ou de matrices dont certaines propriétés de symétrie sont conservées quand les indices des éléments deviennent des variables continues; des sommes finies deviennent des intégrales et le signe d'intégration est sous-entendu (ou simplement indiqué par un astérisque) quand la variable d'intégration figure dans deux facteurs, de même qu'en Calcul tensoriel un indice répété deux fois entraîne une sommation.

Un produit  $f(x, \xi) g(\xi, \varphi)$ , à intégrer en  $\xi$ , n'est pas sans analogie avec

$a_i b^i$  à sommer en  $i$  et certaines expressions *diagonales* rappellent certains termes *contractés*. La *composition* (continue), analogue à la *sommation* (discontinue), est associative, distributive mais non forcément commutative, ce qui rappelle encore la dérivation tensorielle. Sans doute, dans les deux théories, ces harmonies proviennent très directement des déterminants initialement invoqués. Mais l'exposition de MM. Volterra et Pérès ne tarde pas à prendre un caractère hautement original et à révéler des voies où se résolvent avec une facilité et une élégance inattendues des classes étendues d'équations intégrales et intégro-différentielles. Il y a une *algèbre* de composition en laquelle les lettres surmontées d'astérisques obéissent, sous des conditions très larges, à des règles analogues à celles de l'algèbre ordinaire. Il y a une *analyse* de composition avec des séries à aspect exponentiel (analogues à celles qui donnent les transformations finies d'un groupe défini par ses transformations infinitésimales, d'où l'allusion faite plus haut à la théorie de Lie), séries susceptibles d'un mode d'inversion qui conduit aux *logarithmes* de composition.

Le caractère non obligatoirement commutatif de la composition conduit à rechercher les fonctions permutables à une fonction donnée. La question dépend d'une équation intégro-différentielle susceptible d'une résolution complète plus délicate par les questions d'analyticité qu'elle soulève que par son apparence formelle.

Quant aux transformations qui conservent la composition, elles s'exposent à l'aide d'un symbolisme algébrique admirablement simple. D'ailleurs, le symbolisme, qui nous donne des puissances de composition d'abord entières, conduit aussi aisément aux puissances fractionnaires puis aux puissances négatives, d'où des fractions de composition présentant de curieuses ressemblances avec les fractions arithmétiques. M. Whittaker a donné récemment les solutions d'équations intégrales à limites variables mais le plus remarquable est qu'au point de vue ici étudié ces solutions prennent figure de simples identités algébriques, l'algèbre en question étant, bien entendu, l'algèbre de composition.

Deux chapitres sont consacrés aux logarithmes de composition nés comme on l'a vu plus haut. Et voici, enfin, dans toute sa généralité, l'analyse de composition; elle procède de séries symboliques écrites à l'image des séries de Taylor, de Laurent, des séries à exposants fractionnaires de la théorie des fractions algébriques.

Une application intéressante des séries de composition consiste à y retrouver les fonctions sommatoires introduites par M. E. Borel dans ses théories de prolongement analytique.

En résumé, symbolisme puissant, curieux, utile au même titre que la théorie des équations intégrales, bien digne de la renommée de M. Volterra et complété, en de nombreux points de grande importance, par le jeune et ingénieux talent de M. Joseph Pérès.

A. BUHL (Toulouse).

E. BOREL. — **Principes d'Algèbre et d'Analyse** (Bibliothèque d'Education scientifique publiée sous la direction de M. Emile Borel). — 1 vol. in-8° carré de VIII-312 pages; 7 fr. 50; Albin Michel, Paris, 1924.

Voici un nouveau volume commençant une nouvelle collection. Celle-ci s'adresse à tous ceux que la Science intéresse sous ses formes les plus accessibles et non sous telle ou telle forme pédagogique correspondant à

un programme plus ou moins universitaire. M. Borel ne nous en voudra certainement pas si nous disons que ceci nous rappelle la mémoire de Charles Laisant, fondateur de cette Revue, lequel fit publier jadis des *Initiations* et publia lui-même une *Initiation mathématique* qui portait en sous-titre: *Ouvrage étranger à tout programme*. Seulement, Laisant s'adressait surtout à des enfants ou, tout au moins, à de jeunes lecteurs. M. Borel s'adresse à tous. Je goûte beaucoup son initiation algébrique: point de lourdeurs abstraites sur les premiers calculs littéraux; les lettres sont des mètres de drap ou des francs. Et quel monde il ouvre au néophyte en faisant remarquer que  $4x = 4a$  entraîne  $x = a$  mais qu'il n'en est pas forcément de même pour

$$x^2 - 5x + 6 = a^2 - 5a + 6.$$

L'algèbre du premier degré a toujours la symétrie des formules de Cramer bien qu'il ne soit fait explicitement usage de déterminants que dans une note placée à la fin du livre.

Les mots *borne* et *borné* sont d'une commodité sans égale pour étudier les variations les plus élémentaires.

La dérivation et l'intégration procèdent d'une première étude empirique des courbes. Le logarithme hyperbolique est naturellement défini sur l'hyperbole équilatère et, pour définir l'exponentielle, on remarque que  $y = e^x$  n'est qu'une manière différente et équivalente d'écrire  $x = \log y$ . Viennent ensuite les équations différentielles linéaires qui, dans le cas des coefficients constants, s'intègrent par l'exponentielle ou par les fonctions circulaires qui s'en trouvent ainsi rapprochées sans considération d'imaginaires.

Dans les équations aux dérivées partielles, voici des transformations *covariantes* ou *contrevariantes*. Ce n'est pas du calcul tensoriel; c'est de la très simple et très naturelle symétrie analytique. Le point de vue physique apparaît avec des considérations de continuité et avec les cordes vibrantes. Le volume se termine avec des aperçus sur les équations aux différentielles totales, la formule de Green-Riemann, les intégrales curvillignes. Beaucoup d'ingéniosité dans la discussion des chemins d'intégration, contours deformables et élastiques, lacets, etc.

Et pour finir, dans la note relative aux déterminants, un soupçon de calcul tensoriel! Cette fois, c'est bien ce calcul lui-même, réduit à très peu de chose avec la résolution des systèmes linéaires, mais ce peu de chose est naturellement à sa place parce qu'il n'y a encore là qu'une idée extrêmement simple qu'on ne peut plus hésiter à rapprocher des principes.

Les choses dites compliquées ou élevées ont la vie brève quand elles ne reposent pas sur quelque base intuitive; cette base n'est pas toujours vue par le créateur même, mais c'est généralement à un savant qu'il appartient de l'assigner. C'est pourquoi les ouvrages élémentaires prennent un puissant intérêt quand ils proviennent, comme celui-ci, d'un esprit aussi averti que celui de M. Emile Borel.

A. Buhl (Toulouse).

E.-A. FOUËT. — *Leçons de Géométrie élémentaire*. — Un vol. in-8° de xvi-350 pages et 383 figures; Prix: 15 fr. Vuibert, Paris, 1924.

C'est un ouvrage étonnamment original que M. Edouard Fouet vient d'écrire. La géométrie élémentaire y est présentée avec un continual souci

artistique; point de démonstrations ennuyeuses que l'on se croit cependant obligé d'exposer pour ne point rompre quelque chaîne logique. Tout vit immédiatement et comme il y a tout de suite à résoudre des problèmes d'un grand intérêt et d'une stupéfiante simplicité, l'élève de seconde peut se croire géomètre. S'il en tire vanité il n'y aura nullement lieu de le regretter, car cette vanité là ne fera que développer son désir d'apprendre.

Tout au début, la figure 4 nous présente un triangle ABC avec O centre du cercle circonscrit et OM perpendiculaire sur BC donnant K sur le cercle. Si H est l'orthocentre, OM est moitié de AH et AK bissectrice de OAH. Cela, tout simplement, se *voit*; il faut seulement songer à faire *voir* de telles choses. C'est ce que fait l'auteur tout le long d'un livre impossible à analyser ici en détail mais dont l'esprit est d'ores et déjà indiqué.

Ces *Leçons* sont complètes. Elles comprennent les propriétés harmoniques et anharmoniques des figures, les transformations diverses, les polyèdres, les coniques. De féconds rapprochements entre les diverses disciplines de la géométrie élémentaire sont mis en relief par des tableaux, les lieux jouent un rôle énorme, l'histoire de la science est indiquée sommairement jusqu'à la philosophie de Poincaré, par des extraits bien choisis.

Le sens de l'harmonie grecque est conservé dans l'emploi de méthodes modernes et la poésie même de la géométrie, telle qu'elle a été chantée par Sully Prudhomme, trouve sa place dans cet édifice d'art.

Oui, voici vraiment un très beau livre.

A. BUHL (Toulouse).

G. VALIRON. — *Lectures on the general Theory of integral functions*, translated by E. F. COLLINGWOOD with a preface by W. H. YOUNG. — 1 vol. gr. in-8° de XII-208 pages; Prix: 7 s. 1/2. Deighton, Bell and Co; Combridge, 1923.

Ces Leçons, d'origine française mais accueillies avec empressement en Angleterre et traduites en anglais, montrent suffisamment que d'excellents milieux mathématiques peuvent encore être insuffisamment renseignés sur une théorie générale des fonctions entières née surtout avec MM. E. Picard, J. Hadamard et E. Borel.

M. Valiron a voulu être élémentaire, ce qui ne l'a pas empêché d'être savant; les fonctions entières sont intéressantes par leur mode de croissance, par la distribution de leurs zéros, par leurs valeurs asymptotiques à rechercher souvent dans les chemins les plus dissimulés du champ complexe, par les fonctions multiformes résultant de leur inversion, . . . .

Presque rien de tout cela ne va sans un jeu continual d'inégalités qui indique qu'ici la propriété fonctionnelle approchée prend le pas sur la propriété exacte, en attendant que, dans des applications, comme celles relatives au prolongement analytique, l'approximatif ne devienne une base des plus solides pour tout un monde d'égalités.

Pour une fonction entière quelconque il doit toujours exister un chemin vers l'infini tel que le module  $M(r)$  de la fonction croisse plus vite que  $r^n$ . En gros,  $\log M(r)$  est comparé à une fonction de  $r$ . Si  $\log M(r) < r^k$ , il s'agit d'une fonction *d'ordre* déterminé et l'on conçoit que cette notion conduise à étudier d'abord les fonctions d'ordre fini. Ce sont les plus simples au point de vue de la croissance et, parmi elles, on trouve non seulement les fonctions primordiales de l'analyse mais des types étendus, comme ceux satisfaisant à une élégante équation fonctionnelle construite par Henri Poincaré.

L'ordre lie aussi la distribution des zéros pour  $F(z)$  et  $F(z) - a$  bien qu'au premier abord on soit tenté de voir là des distributions profondément différentes.

La factorisation canonique introduit encore des comparaisons d'entiers d'où résulte la notion de *genre* due à Laguerre. Cette notion lie encore étroitement  $F(z)$  et  $F(z) - a$ , toujours malgré les différences de factorisation, et, de même,  $F(z)$  avec ses dérivées.

Nous voici maintenant aux valeurs prises par une fonction entière dans le voisinage de points de module maximum. Il s'agit encore évidemment, quoiqu'avec une précision particulière, de question de croissance; celles-ci conduisent à quitter l'abstraction propre à la fonction entière et à reconnaître la fonction dans les solutions d'équations différentielles; les méthodes ainsi obtenues seront même propres à discuter des équations à solutions non entières mais à croissance comparable à la croissance entière. On aura encore un moyen d'arriver au théorème de Picard et à ses analogues, théorèmes dont l'importance ne saurait être trop soulignée. De même qu'un polynôme sans racines se réduit fatalement à une constante et que ceci est le théorème fondamental de l'algèbre, une fonction entière sans racines n'existe qu'avec des circonstances qui jettent une lumière des plus vives sur la théorie générale des fonctions.

Quant aux valeurs asymptotiques et aux chemins qui y conduisent, nous sommes encore en pleine évolution. Faut-il rappeler qu'en avril 1899, M. Borel lui-même demandait, dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, si une fonction entière pouvait tendre vers zéro, à l'infini, dans un angle d'ouverture donnée. La question a fait des progrès avec Mittag-Leffler, Wiman, Lindelöf, . . . mais elle sera, sans doute, toujours ouverte, l'ingéniosité ne pouvant épuiser l'ensemble des manières d'approcher du point à l'infini.

Le dernier chapitre reprend le théorème de M. Picard avec ses généralisations; la comparaison entre l'emploi et le non emploi de la fonction modulaire est encore une chose des plus suggestives. On semblait incliner à croire, à une certaine époque, que la fonction modulaire n'était intervenue que par un heureux hasard et que le progrès serait de s'en débarrasser. On voit maintenant que certaines extensions obligent à y revenir avec plus d'attention que jamais.

Une bibliographie détaillée termine ce bel exposé. Elle incite à citer les noms de géomètres jeunes ou auteurs de progrès récents, tels ceux de MM. Carleman, Denjoy, Julia, Montel, Pólya, Sire et surtout celui de M. Valiron lui-même à qui nous devons le présent livre plein d'art et de talent, sans parler du point de vue utilitaire que sauront bien y découvrir ceux qui voudront s'initier facilement à cette harmonieuse et délicate analyse.

A. BUHL (Toulouse).

L. LOCKE. — *The Ancient Quipu or Peruvian Knot Record.* — 1 vol. in 4° de 84 p. avec LIX planches. The American Museum of Natural History. 1923.

On pourrait décrire un quipu péruvien comme une liasse de cordons coloriés, attachés en guise de pendants à un même cordon transversal et dont chacun est noué en divers points de sa longueur.

Dans tous les quipus authentiques qui nous ont été conservés du Pérou

antique, les nœuds successifs d'un même cordon représentent, sans doute possible, les chiffres d'un nombre dans le système décimal. Chaque nœud à un nombre de rangs correspondant au chiffre qu'il représente, c'est-à-dire au plus égal à 9, et les différences de couleur d'un groupe de cordons à l'autre servaient, comme aide-mémoire, à distinguer les classes d'objets auxquels les nombres devaient se rapporter.

L'ouvrage que nous avons sous les yeux réunit, autour d'une description détaillée, les quelques renseignements dont on dispose à ce sujet, ainsi qu'une série de fort belles figures et planches photographiques qui forment à elles seules la moitié du volume. Des dessins schématiques très clairs donnent l'interprétation de plusieurs quipus. Il est intéressant de remarquer en particulier que la somme des nombres représentés par un groupe de cordons avoisinants se trouvait enregistrée sur un cordon supplémentaire qui les réunit entre eux.

L'enseignement de l'arithmétique au premier degré, qu'une parenté étroite rattache toujours davantage à l'histoire des peuples primitifs, ne pourrait-il pas tirer profit d'une conception aussi suggestive et qui, du reste, a déjà servi de base à bon nombre de divertissements à la mode chez nos ancêtres de la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle ?

R. C. YOUNG (Lausanne).

P. BACHMANN. — **Zahlentheorie.** Vierter Teil: Die Arithmetik der quadratischen Formen. Zweite Abteilung herausgegeben von R. Haussner in Jena. — 1 vol. gr. in-8°, xxii et 537 p., prix: M. 17.60; B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1923.

Voici bien une cinquantaine d'années que Bachmann publiait son premier livre sur la théorie des nombres « die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie », dont il a paru une nouvelle édition en 1921, et où pour la première fois peut-être la grande théorie de Gauss était exposée avec les prolongements admirables qu'elle avait reçus dans les travaux de Jacobi et de Kummer. Depuis cette époque déjà lointaine une suite de volumes consacrés à d'autres parties de la théorie des nombres, traitées avec la même compétence et la même ampleur, sont venus, à des intervalles inégaux, se ranger à côté de ce premier livre de Bachmann: en 1892 paraissaient ses « Elemente der Zahlentheorie », en 1898 la *première partie* de son « Arithmetik der quadratischen Formen », en 1905 l'« Allgemeine Arithmetik der Zahenkörper », volumes séparés composant la grande « Zahlentheorie » de Bachmann, œuvre de longue haleine, fruit de recherches patientes. Je mentionnerai encore ses deux volumes de la « Niedere Zahlentheorie », un petit livre fort intéressant « Grundlehren der neueren Zahlentheorie » et une monographie très appréciée sur le grand Problème de Fermat, analysés ici-même, qui peuvent être regardés comme des compléments précieux de son grand Traité.

Mais il manquait à cette longue série d'ouvrages un volume important: la *seconde partie* de l'Arithmétique des formes quadratiques, déjà promise en 1898. Ecrite il y a huit ans environ, elle n'a pu être publiée qu'il y a quelques mois à peine, par les soins d'un ami de Bachmann, M. Haussner à Jéna.

Ce volume, qui clôt la série des ouvrages de Bachmann, donne une image exacte de l'état de l'arithmétique des formes quadratiques en 1916. Du

reste l'activité mathématique dans ce domaine particulier n'a pas été assez grande pour que le portrait tracé en 1916 ait perdu sa ressemblance. Je ne trouve même pas que la première partie de l'arithmétique des formes quadratiques parue en 1898 ait vieilli outre mesure. Malgré le long intervalle qui les sépare, les deux volumes forment un ouvrage qui ne manque pas d'unité, ce qui tient en partie à ce qu'ils sont consacrés à des domaines bien délimités. Si le premier volume étudie surtout le problème de la représentation des nombres par des formes quadratiques, le second est consacré au grand problème de la réduction des formes et aux questions qui s'y rattachent: problèmes relatifs aux minima des formes, approximations diophantiques, formes extrêmes, caractères arithmétiques des nombres algébriques, etc.

L'auteur part des formes binaires auxquelles il consacre le tiers de son volume. La théorie élémentaire étant supposée connue, Bachmann se place dès le début à un point de vue plus élevé en introduisant, à côté des méthodes purement arithmétiques, ces belles représentations géométriques des nombres et des formes qui entre les mains de Minkowski ont donné des résultats si inattendus. On est conduit ainsi de la manière la plus naturelle aux procédés et aux méthodes de Selling, de Minkowski, d'Hermite, aux fractions continues de Hurwitz et de Fueter. Dans l'étude des problèmes relatifs aux minima des formes binaires l'auteur expose les belles recherches de Markoff et de Schur, peu connues, si je ne me trompe, et consacre ensuite un long chapitre aux réseaux des formes binaires. C'est encore sur la considération des réseaux qu'il s'appuie dans l'étude des formes quadratiques ternaires. Et le même point de vue apparaît dans la théorie générale des formes quadratiques à  $n$  variables, qui sont étudiées avec une grande ampleur.

Il serait difficile d'énumérer tous les problèmes que l'auteur aborde dans ce livre; il suffira de dire que les recherches les plus modernes (antérieures à 1916) y sont mentionnées et analysées avec soin. Je crois que rien d'essentiel n'y est omis. A chaque page éclate une érudition peu commune qui nous avait déjà frappé dans ses publications précédentes. On sait du reste que dès ses premiers travaux Bachmann s'était entièrement consacré à l'étude de la théorie des nombres, cette reine des mathématiques, qu'il s'y livrait avec passion « comme il arrive à presque tous ceux qui s'en occupent » (je cite Legendre). Il est vrai qu'aucune science peut-être n'exerce une attraction plus grande.

D. MIRIMANOFF (Genève).

H. GALBRUN. — **Assurances sur la vie. Calcul des primes**, 1<sup>er</sup> fascicule du tome III du *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*, publié par M. Emile BOREL. — Un vol. in-8° raisin (25-16) de 310 pages; 35 fr.; Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>, Paris, 1924.

Dans un cours élémentaire sur la théorie des assurances on peut se passer à la rigueur du secours de l'analyse infinitésimale, de même qu'il est possible, par un détournement aussi artificiel qu'inutile, d'éliminer de cette théorie les notions empruntées au Calcul des Probabilités. Mais en cherchant ainsi à mettre la théorie des assurances à la portée de tout le monde, on court le risque de ne jamais sortir du champ étroit des applications banales. Ai-je besoin de dire que l'auteur des « Assurances sur la vie » se place à un

point de vue plus élevé ? Dans son livre, de même que dans ses publications antérieures, il s'attache surtout à dégager les idées générales, en poussant plus loin l'étude des cas caractéristiques, en rapprochant et en généralisant les méthodes classiques. Aussi la variable continue et l'analyse infinitésimale s'introduisent-elles dès les premières pages et l'auteur est-il conduit à utiliser les recherches les plus récentes sur la loi des grands nombres et la formule de Laplace, dues en grande partie aux mathématiciens russes. On est surpris alors de voir à quel point, malgré son ampleur nouvelle, l'étude de ce sujet délicat se simplifie et se condense, les calculs se ramenant toujours, quel que soit le problème particulier qu'on a en vue, à celui d'une intégrale définie d'un type déterminé.

Les résultats auxquels on arrive ainsi sont fort intéressants. et l'avantage est grand de pouvoir, dans une étude théorique, s'élever au-dessus des procédés particuliers. Cette tendance à aller au fond des choses, le caractère à la fois simple et élevé de l'ouvrage de M. Galbrun en font l'un des livres les plus suggestifs et, je dirai, les plus captivants, celui qui résume peut-être de la manière la plus originale les divers aspects de la théorie moderne des assurances sur la vie. Ce volume n'est du reste que l'un des dix-sept fascicules du grand « *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications* » publié par M. E. Borel avec la collaboration de L. Blaringhem, C.V.L. Charlier, R. Deltheil, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Trainard.

Je crois inutile d'analyser séparément les huit chapitres du livre de M. Galbrun. Chacun d'eux apporte soit des suggestions et des vues nouvelles, soit des remarques intéressantes. Quelques-uns de ces chapitres sont consacrés, totalement ou en partie, à des théories auxiliaires purement mathématiques, indispensables à une étude approfondie des assurances, tel par exemple le chapitre premier, où l'on trouve des pages intéressantes consacrées au théorème de Bernoulli et à celui de Tchébicheff, qui permettent, par une extension naturelle aux paris complexes de l'assurance sur la vie, de mettre en lumière la véritable nature des opérations d'assurance; tel aussi le chapitre III qui est consacré à l'interpolation et à la sommation (formule de Lubbock, formule d'Euler). Le calcul des assurances proprement dit est abordé dans le chapitre IV qui traite du capital différé et des annuités viagères sur une tête, le chapitre V est consacré à l'assurance au décès sur une tête, le chapitre VI à la théorie des groupes de têtes, le chapitre VII aux assurances et rentes de survie, le chapitre VIII au chargement des primes et les principales combinaisons d'assurances sur la vie.

Ces chapitres initient graduellement au mécanisme du calcul, sans jamais abandonner les grandes lignes directrices indiquées au début de l'ouvrage. Les primes sont considérées comme les valeurs probables de paris sur la durée de la vie humaine, chaque versement marquant le début d'un pari nouveau, procédé commode permettant d'établir rapidement les formules classiques.

Une note des plus intéressantes intitulée: « *Quelques remarques sur les probabilités de décès et la loi des erreurs* » termine l'ouvrage de M. Galbrun. Dans cette note, qui se rattache aux considérations développées dans le premier chapitre, l'auteur cherche à mettre en lumière l'analogie du problème de l'assurance et de la théorie des erreurs. Cette analogie, qui est grande, conduit à penser que la formule célèbre de Laplace, généralisée par Tchébicheff, Markoff et Liapounoff, reste encore valable dans le cas de l'assurance. Mais ici se présente une difficulté sur laquelle M. Galbrun

a raison d'attirer notre attention. Les formules de Laplace, de Markoff et de Liapounoff sont des formules asymptotiques; elles ne sont rigoureusement vraies qu'à la limite, lorsque le nombre  $s$  des variables est infini. Or, dans la pratique, on les applique de confiance, quelque soit  $s$ , sans pouvoir affirmer que le reste qu'on néglige est réellement négligeable. Aussi, comme le fait remarquer M. Galbrun, est-il préférable, dans les cas des assurances, de s'appuyer sur les fameux théorèmes de Tchébicheff de 1867 (*Journ. de math.*, t. 12), qui permettent de résoudre les mêmes problèmes sans passer par l'intégrale de Laplace, avec une approximation généralement suffisante dans le cas des assurances sur la vie.

Les mathématiciens liront avec plaisir les dernières pages de la note terminale consacrées à des recherches intéressantes de M. Galbrun sur la formule de Laplace se rattachant à un mémoire du même auteur inséré dans le tome XLI du Bulletin de la Société mathématique.

Un second fascicule, qui paraîtra prochainement, traitera du calcul des réserves mathématiques.

D. MIRIMANOFF (Genève).

**A. V. VASSILIEF.** — **Le nombre entier.** Aperçu historique avec 24 portraits et figures et une table (Bibliothèque mathématique) (en russe). — 1 vol. gr. in-16° de 268-IV p., Pétrograde, 1922.

On ne peut s'empêcher d'admirer l'énergie et le courage des mathématiciens russes qui continuent, en dépit des conditions parfois déplorables de l'après-guerre, à travailler sans relâche et à produire. Markoff et Liapounoff sont morts, mais ceux qui restent, et ils sont nombreux, suivent avec une attention toujours en éveil le mouvement de la pensée mathématique en dehors de leur pays et y prennent une part extrêmement active.

Depuis deux ans, M. A. Vassilief, bien connu des lecteurs de l'*Enseignement mathématique*, a publié deux livres remarquables: un volume très curieux sur la théorie de la relativité « Espace, temps, mouvement » imprimé à Berlin<sup>1</sup>, et cet aperçu historique sur la théorie des nombres, paru à Pétrograd sous le titre « Le nombre entier », un livre de dimensions modestes qui ne s'adresse pas aux spécialistes, mais que les spécialistes liront avec profit. Peu de livres, en effet, sous un volume aussi petit, contiennent des renseignements aussi précieux. On ne peut n'être pas frappé du sens des proportions, si important dans un ouvrage de ce genre, et de l'érudition toujours si exacte de l'auteur. Déjà dans les premiers chapitres du livre où il esquisse à grands traits la genèse de la science des nombres et où il cherche par des rapprochements curieux à marquer la place qu'ont prise, dans l'élaboration des premiers principes, les différents peuples de l'antiquité — les Egyptiens, les Babyloniens, les Grecs et les Hindous, l'auteur tient compte des documents les moins connus et des travaux historiques les plus récents. Mais sa connaissance parfaite des sujets qu'il est amené à traiter apparaît surtout dans l'étude des progrès réalisés depuis Diophante, auquel il consacre une vingtaine de pages des plus suggestives. C'est d'abord les Arabes, l'époque de la renaissance et les géomètres du xvi<sup>e</sup> et du xvii<sup>e</sup> siècle, précurseurs ou contemporains du grand Fermat. La tâche de l'historien devient particulièrement ardue à

<sup>1</sup> *L'Ens. math.*, 23<sup>e</sup> année; p. 128.

partir d'Euler et de Lagrange. On sait ce que la science de Fermat est devenue entre les mains des grands mathématiciens du XVIII<sup>e</sup> et du XIX<sup>e</sup> siècles. L'œuvre immense d'Euler, les recherches profondes de Lagrange, celles de Gauss et de Dirichlet, les théories de Kummer et de Dedekind, les travaux de Cauchy, de Tchebychef, d'Hermite, de Kronecker et de Riemann, les recherches plus récentes de Minkowski, de Hilbert, d'Hadamard et de Landau sont d'un abord difficile. L'auteur réussit pourtant à en donner une analyse rapide en dégageant les grandes lignes et en marquant les courants dominants de la pensée mathématique. Un chapitre entier est consacré aux découvertes de Lagrange et de Legendre, un autre à l'œuvre de Gauss, qui contient une analyse intéressante de ses « *Disquisitiones arithmeticæ* », d'autres encore à la théorie des nombres algébriques de Kummer, de Dedekind et de Kronecker, à la théorie analytique des nombres, au fameux problème de la distribution des nombres premiers et au grand théorème de Fermat, ces « *mysteria maxime recondita* ». Dans le dernier chapitre de son livre, M. Vassilief indique les rapports singuliers entre la théorie des nombres et la théorie de la matière qu'ont mis en évidence les travaux des mathématiciens et des naturalistes modernes, et surtout ceux de Fédoroff, Schoenflies et Minkowski.

Puisse ce petit livre inspirer à ses lecteurs le goût des recherches arithmétiques.  
D. MIRIMANOFF (Genève).

B. V. KERÉKJARTÓ. — **Vorlesungen über Topologie, I.** Flächentopologie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band VIII). — 1 vol. in-8° de 270 p. avec 60 fig.; broché, 11,50 Goldmark; cartonné, 13 Goldmark; Julius Springer, Berlin.

Ce remarquable ouvrage est un premier volume et a pour objet l'Analysis Situs des surfaces (à 2 dimensions). Ceux qui en auront pris connaissance souhaiteront certainement la prochaine parution du second volume qui exposera l'état actuel de l'Analysis situs des espaces (à  $n$  dimensions), ainsi que différentes questions connexes.

Les méthodes en Analysis Situs furent d'abord purement intuitives. L'Analysis Situs était donc en quelque sorte une science expérimentale, dont la mathématique se servait avec profit.

Dans l'article de l'Encyclopédie mathématique de MM. Dehn et Heegaard, les figures topologiques sont remplacées par un schéma de points, arêtes et faces et les problèmes ramenés à des questions d'analyse combinatoire.

Les fondements choisis ici tout en faisant de la topologie une véritable science logique, tiennent meilleur compte de son origine intuitive. Ce sont les notions fondamentales sur les ensembles de points et implicitement les axiomes sur la continuité du plan, considéré ici comme ensemble des paires de nombres réels.

La *représentation topologique* d'un triangle plan fournit les *triangles courbes*, dont la surface générale est formée comme une mosaïque.

L'ouvrage est divisé en trois parties principales. La première s'occupe de la topologie du plan. Les §§ 1-7 traitent des ensembles de points, de l'approximation par polygones et du problème de l'homéomorphie de deux ensembles.

Le second chapitre discute la notion de courbe.

§ 1. *La courbe de Jordan* est l'image topologique d'un cercle. Elle par-

tage le plan en points extérieurs et points intérieurs (Th. de Jordan) et tous ses points sont accessibles.

§ 2, § 3. La dimension est topologiquement invariante.

§ 4. La réciproque du théorème de Jordan est aussi exacte.

§ 6. *La courbe fermée* d'après Schönfliess, qui divise aussi le plan en 2 domaines peut contenir des éléments inaccessibles.

§ 7. La courbe *continue* peut remplir tout un domaine.

Le troisième chapitre traite des domaines plans. Les § 1 et 2 étudient les domaines à connexion simple et leur contour et les § 3 et 4 les domaines à connexion quelconque ou infinie.

Le § 5 examine les courbes d'un domaine. Le § 6 démontre que le fait d'être fermée (d'après Schönfliess) est topologiquement invariant.

La seconde partie contient deux chapitres.

Le chapitre IV qui est dans son ensemble consacré au théorème fondamental de l'Analysis Situs des surfaces: le nombre des contours, le genre et l'orientation de deux surfaces topologiquement équivalentes sont les mêmes et réciproquement; et le chapitre V qui traite les mêmes questions pour les surfaces ouvertes.

La troisième partie enfin contient une série de résultats remarquables sur la représentation de quelques surfaces sur elles-mêmes et sur les familles de courbes tracées sur une surface.

Le chapitre VI est consacré surtout aux « théorèmes à points fixes » (Fixpunktsätze). Le § 2 contient huit de ces théorèmes, dont voici le premier:

Une représentation topologique d'un cercle sur lui-même admet au moins un point fixe,  
et dont voici le dernier:

Une représentation topologique du plan projectif sur lui-même admet au moins un point fixe.

Les § 3, 4 et 5 en contiennent d'analogues pour un anneau circulaire, pour une surface fermée de genre  $p > 1$ , etc.

Le chapitre VII enfin étudie les familles de courbes fermées ou non, tracées sur une surface, du point de vue de leurs singularités et de leur structure — étude en rapport avec la « théorie géométrique des équations différentielles ».

L'auteur a dû renoncer à l'exposition des applications trop nombreuses et trop variées, mais il ne néglige pas de relever, dans son introduction, la position en quelque sorte centrale de la topologie dans les mathématiques.

F. GONSETH (Berne).

E. PICARD. — *Mélanges de Mathématiques et de Physique*. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-366 pages; Prix: 20 fr.; Gauthier-Villars, Paris, 1924.

Ce beau volume, faisant suite aux « Discours et Mélanges » du même auteur, publiés à la même librairie, contient vingt-six notices différentes dont chacune pourrait donner lieu à un compte rendu. Le cadre de cet article ne nous permettant pas de le faire, disons simplement que M. Emile Picard a heureusement rassemblé de véritables joyaux qui, d'abord dispersés, sont maintenant réunis avec un remarquable cachet d'unité.

L'histoire de la Science est traitée de main de maître au sujet de Weier-

strass, Halphen, Sylvester, Hermite, Stieltjes, Abel, Poincaré, Zeuthen, Pascal, Marc Seguin, Bréguet, Fizeau, Pasteur.

Signalons aussi une « Introduction à l'Histoire des Sciences » qui figure au début du tome XIV de la grande « Histoire de la Nation française » de M. G. Hanotaux.

Peu de mathématiques formulées mais cependant des discussions bien intéressantes au sujet des équations qui se ramènent à la forme  $s + z = 0$ , du problème du chat, des recherches de M. Sundmann sur le problème des trois corps, des invariants intégraux et interprétations mécaniques de Poincaré.

Les idées maîtresses du Recueil se rattachent à la Physique mathématique, cette belle science apparaissant avec ses trois célèbres périodes électromagnétique, électroptique, électrogravifique. Pour la dernière, c'est-à-dire pour la période einsteinienne, M. Picard a montré toute la prudence du philosophe, s'efforçant de décrire sans prendre parti. Cependant, plus nous approchons de la fin, plus les idées modernes qui vont de Maxwell à Einstein semblent imposer une conclusion à l'avantage des mathématiciens et fort indépendante, celle-là, de tout heurt et de toute idée de bouleversement.

Après avoir rappelé l'œuvre admirable de Fizeau puis la théorie non électromagnétique mais mécanique de la lumière, l'auteur écrit: « Les mathématiciens peuvent se réjouir du rôle considérable que joue l'instrument mathématique dans le développement des idées nouvelles. On regarde de plus en plus aujourd'hui qu'une théorie ne doit pas avoir la prétention de donner des apparences une explication conforme à la réalité, et que sa partie essentielle est le moule analytique dans lequel elle cherche à enfermer les choses. »

Lors de la célébration du Cinquantenaire de la Société Mathématique de France, M. Picard dit encore: « sans imagination il n'y a pas d'esprit d'invention. » Le génie, en effet, est essentiellement imaginatif; il est autre chose que la longue patience, cependant admirable aussi, de l'homme de laboratoire qui, se défiant précisément de l'imagination, ne veut que suivre, pas à pas, les conclusions de l'expérience. Plus loin, revenant sur la puissance d'explication et de prévision des formules analytiques, M. Picard y voit « le résultat de l'empreinte laissée par les choses sur l'intelligence humaine ».

En effet, pour peu qu'on admette l'existence du monde extérieur, il est naturel qu'un cerveau normal ne puisse penser qu'en réfléchissant, pour ainsi dire, des propriétés de ce monde; ce serait là le secret de la pensée mathématique engendrant naturellement des formules à signification physique.

Je m'excuse d'analyser aussi brièvement d'aussi belles pages et par des citations faites quelque peu au hasard. Leur auteur, Membre maintenant de l'Académie française, n'a pas moins soigné le tour littéraire et l'élévation philosophique de la pensée que le côté scientifique proprement dit. Des notices d'abord éparses ont pris figure d'un grand et admirable ouvrage.

A. Buhl (Toulouse).

FRÉCHET et HALBWACHS. — **Le Calcul des Probabilités à la portée de tous.** —

1 vol. in-8° carré de XII-298 pages; 18 fr.; Dunod, Paris, 1924.

Ce Calcul des Probabilités est, en effet, un ouvrage aussi curieux qu'utile. Il n'exige que les mathématiques les plus élémentaires et envisage cepen-

dant toutes les questions traitées d'ordinaire en la branche indiquée. Ses auteurs sont un mathématicien notoire, et un sociologue naturellement statisticien.

A propos de statistique on dit souvent que celle-ci ne va point sans théories probabilitaires; ici les principes fondamentaux de ces dernières théories sont mis en évidence sur des exemples et par des méthodes statistiques. Quant aux probabilités continues, aux lois d'écart, ... à toutes ces choses qui semblent relever fatalement du Calcul intégral, le lecteur en fera sans s'en douter car il ne sera invité qu'à des comparaisons d'aires ou à des constructions de courbes remplacées d'abord par des lignes polygonales dont les différents éléments proviendront encore de statistiques très habilement maniées. Le Calcul des Probabilités prend ainsi, à la fois, une forme utilitaire qui sera très appréciée des praticiens et une forme esthétique spéciale très propre aussi à intéresser ceux qui le connaissent avec l'appareil analytique habituel.

Les premiers problèmes n'emploient point l'analyse combinatoire sans que celle-ci ne semble naître de ces problèmes eux-mêmes; dans l'étude des probabilités continues, il faut surtout remarquer la *courbe de probabilité* qui traduit la *densité* de probabilité pour les événements possibles en les différentes parties d'une droite. Ceci conduit au lemme capital, de Poincaré, relatif aux cas où cette répartition des probabilités n'intervient pas. Suivent un problème de roulette, le paradoxe de Bertrand, le problème du franc carreau.

La probabilité des hypothèses (ou des causes) conduit à la formule de Bayes riche de paradoxes *apparents* mais sous lesquels une analyse exacte fait au contraire découvrir ce que le bon sens seul n'aurait pu prévoir.

L'espérance mathématique est liée au problème de l'aiguille, à la détermination des  $\pi$  et aux premières notions concernant les assurances.

Beaucoup d'originalité encore pour la valeur *typique* d'un ensemble de nombres; cela mène aux objets ou individus typiques, à l'homme moyen, etc. Les auteurs nous montrent que ces images, indéniablement commodes, sont cependant menacées souvent par une foule d'incompatibilités et qu'il ne faut les employer qu'avec prudence.

Le calcul des nombres *aléatoires* débute par un certain lemme de Bienaymé qui, combiné avec la formule donnant l'écart quadratique moyen, aboutit très simplement au théorème de Bernoulli sur l'égalité limite de la probabilité et de la fréquence observée.

Tout ce qui se rapporte aux lois des grands nombres, à la courbe en cloche, etc., est obtenu par la méthode graphique indiquée plus haut et avec de nombreuses vérifications expérimentales. Les dernières pages du livre ne sont pas les moins remarquables avec les événements interdépendants dont la probabilité varie de par l'arrivée de l'événement voisin, comme si des tirages effectués dans des urnes pouvaient modifier la composition de certaines d'entre elles.

Tout cela est du plus haut intérêt et, ce qui paraît caractériser l'œuvre de MM. Fréchet et Halbwachs, ce n'est pas d'avoir simplifié le Calcul des Probabilités en en conservant l'ordonnance selon Laplace, Bertrand et Poincaré; c'est plutôt la volonté d'être d'abord élémentaire mais de faire donner aux méthodes employées tout ce qu'elles sont susceptibles de donner. On est alors très agréablement surpris de voir tout ce qu'elles donnent.

A. Buhl (Toulouse).

J. OTTENHEIMER. — **La balistique extérieure.** (Collection Armand Colin). 1 vol. in-16 de 199 p., avec 48 fig. et 4 planches; Fr. 6. —; Librairie Armand Colin, Paris

La Balistique extérieure traite de l'ensemble des problèmes qui concernent le mouvement des projectiles, à partir du moment où ils cessent d'être soumis à l'action des gaz provenant de la déflagration de la poudre dans l'âme de la pièce qui les a lancés.

Ces problèmes comprennent tant de facteurs que leur complication est extrême: il faut tenir compte, en effet, de la pesanteur, de la résistance de l'air, de la pression atmosphérique et même du mouvement de rotation de la terre, si l'on veut prévoir comment se comportera le projectile dans sa course à travers l'espace.

La grande guerre a posé à ce point de vue une foule de problèmes nouveaux, dont quelques-uns ont trait au bombardement de Paris à grande distance par la Bertha, ou à la chute des bombes d'avion, ou encore des problèmes d'acoustique relatifs à la façon, insoupçonnée jusqu'alors, dont le son se propage à travers l'air.

Ce sont tous ces problèmes qu'aborde et résout M. Ottenheimer, avec une rare simplicité de moyens et une clarté remarquable, en n'employant qu'un appareil mathématique réduit à son minimum.

Ce livre sera lu avec fruit non seulement par les techniciens, artilleurs ou constructeurs de pièces, mais aussi par les professeurs de mathématiques appliquées.

L. ZORETTI. — **Leçons de mathématiques générales.** Deuxième édition, revue et augmentée, avec une préface de P. Appell. — 1 vol. in-8° de xv-788 p., avec 235 fig.; Fr. 60.—; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

La 2<sup>me</sup> édition des Leçons de mathématiques générales de M. Zoretti, qui paraît aujourd'hui, se différencie de la précédente par l'addition de nombreuses données relatives aux méthodes graphiques. C'est ainsi que l'auteur a développé la théorie des abaques, et notamment des abaques par points alignés. On trouvera également dans cette édition la théorie de M. Massau sur l'intégration graphique, si simple, si commode, et pourtant si peu enseignée en France. L'auteur a aussi ajouté un chapitre sur la statique graphique et ses principaux procédés. Nous retrouvons, naturellement, dans cette édition, les qualités bien connues que nous avions constatées dans la première: clarté et simplicité de l'exposé, présentation commode, faisant de l'Ouvrage, en même temps qu'un instrument de travail et d'étude, un excellent aide-mémoire. Ce sont ces qualités qui ont assuré le succès de l'Ouvrage et qui vaudront à l'actuelle édition un succès au moins égal.

W. F. OSGOOD. — **Lehrbuch der Funktionentheorie**, zweiter Band, erste Lieferung (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften, Band XXVI.). — 1 vol. in-8°, 242 p., 7 M.; Verlag B. G. Teubner, Leipzig.

Les disciplines mathématiques, telles les équations intégrales ou les géométries différentielles, qui se sont développées, sous l'impulsion des théories physiques, à pas de géant, ne doivent pas nous détourner des patientes études qui se poursuivent dans d'autres domaines, comme celui des fonctions analytiques à plusieurs variables. Et ces études sont d'autant

plus dignes de retenir notre attention qu'elles ont conduit, durant ces derniers quinze ans, à des résultats aussi instructifs et suggestifs qu'imprévus.

Dire, qu'à certain point de vue, la complication de la théorie des fonctions analytiques augmente avec le nombre des variables est superflu. Il est certain théorème vrai dans le cas de deux variables dont on ne sait pas s'ils sont vrais pour trois variables. Les questions d'*analysis situs*, l'étude de la connexité des domaines sont ici singulièrement compliquées.

Mais ce qu'il faut remarquer, c'est que certains résultats sont au contraire plus simples, ou tout au moins se formulent plus simplement, moyennant certaines définitions des domaines de l'espace complexe à 2 dimensions, que dans le plan complexe à 2 dimensions. On savait déjà qu'une singularité d'une fonction à plusieurs variables ne peut être isolée; aujourd'hui, grâce à M. Hartogs, on sait qu'une fonction qui admet une singularité dans un domaine en admet une également sur sa frontière; en d'autres termes, une fonction ne peut être régulière sur la frontière sans l'être également à l'intérieur. Plus que cela, si une fonction est régulière dans la partie du voisinage d'un point qui est extérieure à une hypersphère passant en ce point, elle est aussi régulière en ce point.

Ces résultats du plus haut intérêt font pressentir que les frontières des domaines de régularité ne peuvent pas être quelconque et, en effet, M. E. E. Levi a mis en évidence et a formulé avec toute la précision désirable les conditions de forme et de courbure auxquelles doivent satisfaire les surfaces frontières des domaines de Weierstrass. L'étude des domaines de régularité est, peut-on dire, plus simple, grâce à ces recherches de MM. Hartogs et Levi, que dans le cas d'une seule variable. Cela ne veut pas dire que l'étude des singularités soit plus simple, loin de là, les singularités des fonctions rationnelles conduisent déjà comme on sait à de grandes difficultés.

L'étude des fonctions implicites, des substitutions et de leurs inverses, présente également de grandes subtilités dès que le nombre des variables dépasse un ou deux. Plusieurs analystes américains s'y sont attaqués.

Dans de telles recherches, les transformations projectives de l'espace à  $2n$  dimensions rendent de grands services.

Signalons encore un résultat capital.

M. Osgood avait établi qu'une fonction à deux variables, régulière par rapport à l'une quelle que soit l'autre dans un certain domaine, est régulière par rapport à leur ensemble dans ce domaine, pourvu toutefois que cette fonction soit bornée. M. Hartogs a levé cette dernière restriction. Et comme on sait aujourd'hui, par une généralisation du théorème de M. Goursat, qu'il suffit, pour une seule variable, que la dérivée existe en chaque point du domaine suivant la direction de l'axe réel et de l'axe imaginaire pour que la fonction soit régulière dans le domaine, on s'aperçoit de l'extension de cette propriété aux cas de plusieurs variables par l'intermédiaire du théorème de M. Hartogs.

Le dernier livre de M. Osgood déborde sensiblement ce que l'auteur avait réuni dans « The Madison Colloquium » 1912.

C'est un grand avantage que de posséder un traité d'ensemble de la théorie des fonctions analytiques à plusieurs variables, où les résultats classiques et récents sont exposés avec tous les soins de rigueur et de précision qu'exige ce sujet si délicat, plein d'embûches et parmi les plus subtils de la science.

On admirera l'emploi si fécond et presque magique de l'intégrale de Cauchy.

Que ce livre puisse guider de nouveaux chercheurs et qu'on me pardonne de n'avoir pas cherché à attribuer à l'auteur la part de résultats originaux qui lui revient en propre; ce serait trop long.

Rolin WAVRE (Genève).

**F. KLEIN. — Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.**

Dritte Auflage. I. Band: Arithmetik, Algebra, Analysis, ausgearbeitet von E. HELLINGER, für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. SEYFARTH. — 1 vol. in-8° de 315 p. avec 125 fig.; cartonné, 16 M. 50. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XIV). Julius Springer, Berlin.

Ces conférences sur les principes des mathématiques élémentaires envisagées à un point de vue supérieur ont obtenu un succès bien mérité, dépassant le cadre des auditeurs du savant professeur de Göttingue. Aux deux premières éditions qui ont paru sous forme de cours autographiés succède ce volume faisant partie de la collection Springer. L'ouvrage devient ainsi accessible à un cercle plus étendu de lecteurs. Il s'adresse plus particulièrement aux candidats à l'enseignement supérieur. Le tome I, consacré à des chapitres choisis d'arithmétique, d'algèbre et d'analyse, a été publié avec la collaboration de M. S. Seyfarth. Il ne diffère guère de l'édition originale. Les additions ont été groupées dans un appendice contenant deux notes rédigées par M. Seyfarth. Elles traitent, l'une des progrès récents réalisés dans l'enseignement mathématique en Allemagne, l'autre de publications nouvelles se rattachant aux questions étudiées dans ce volume.

II. F.

**F. KLEIN. — Gesammelte mathematische Abhandlungen herausgegeben von R. FRICKE und H. VERMEIL (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen). Zweiter Band: Anschauliche Geometrie. Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie. Zur Mathematischen Physik. — 1 vol. in-8°, 713 p. avec 185 fig. dans le texte; 25 G. M. Verlag Julius Springer, Berlin.**

Le Tome II de la collection des mémoires de Félix Klein est celui des trois qui intéressera le plus particulièrement l'enseignement. C'est en effet dans la première section de ce volume qu'on trouve les mémoires sur la géométrie intuitive, écrits pour la plupart entre 22 et 27 ans. Le rôle de l'intuition dans l'étude de la géométrie doit retenir l'attention des professeurs à tous les degrés de l'enseignement. Cette faculté est assez répandue, spécialement parmi les jeunes.

Dans l'introduction à la première section, M. Klein fait l'historique de sa productivité dans le domaine de la géométrie intuitive. Il en attribue la première impulsion à sa liaison avec Plücker, dont il fut l'assistant de 17 à 20 ans. L'ouvrage détaillé sur les modèles de surfaces constituait, comme il le reconnaît, « un travail d'éclaireur, une exploration dans une région encore tout à fait inconnue » (p. 3), une région, convient-il d'ajouter, où il y a encore beaucoup à faire.

Au point de vue de la culture de l'esprit du jeune mathématicien, il est suggestif de lire ce qu'a écrit M. Klein, non seulement de l'influence de son maître Plücker et de l'étudiant Wenker, son ami, mais aussi de l'impulsion

reçue lors de sa visite à une réunion de mathématiciens à Göttingue, en 1868. C'est là qu'il vit pour la première fois le modèle de la surface cubique avec ses 27 lignes droites. C'était aussi une révélation pour lui de trouver en 1870, des trésors inattendus dans la collection de modèles mathématiques du Conservatoire des Arts et Métiers à Paris, ainsi que peu de temps après aux écoles polytechniques de Darmstadt et de Karlsruhe.

L'expérience nous a enseigné que maint esprit, géométrique de nature, est perdu pour la science, grâce à l'influence desséchante d'une méthode exclusivement logique et analytique et l'absence d'une collection de modèles, tels qu'on les trouve aujourd'hui, grâce aux efforts de M. Klein et d'autres encore dans chaque université ou école polytechnique en Allemagne. Récemment de retour du Congrès des mathématiciens à Toronto, nous avons pu apprécier l'influence encourageante d'un contact avec les esprits les plus éclairés que nous y avons rencontrés. Il est à recommander aux jeunes de faire les sacrifices en vue d'entrer en relation avec les savants à l'occasion de réunions scientifiques.

La seconde section s'occupe de groupes de substitutions et de la théorie des équations. Nous citerons en particulier les mémoires LII et LIII sur les équations différentielles linéaires avec solutions algébriques et les nombreux travaux sur l'icosaèdre et son équation. L'introduction à cette section nous montre de nouveau l'empreinte laissée dans l'œuvre de Klein par son entourage. C'est Gordan qui joue un rôle prépondérant dans cette époque de sa vie. L'histoire de cette intimité, avec ses résultats pour les sciences mathématiques, doit être lu dans l'original. Nous n'en citerons que le passage où M. Klein situe son livre sur l'icosaèdre parmi les œuvres antérieures traitant ce même sujet.

« Dans ce livre, j'ai perfectionné plusieurs détails et j'ai apporté bien des simplifications... D'autre part, j'ai supprimé plusieurs points, spécialement dans la théorie des invariants... La matière est présentée, tout au moins en ce qui concerne l'équation du 5<sup>e</sup> degré, dans l'ordre historique. C'est ainsi que l'impression s'est répandue dans les milieux mathématiques que cette méthode a pour but de rendre intuitive la théorie de l'icosaèdre. Cette manière de voir ne correspond pas du tout à l'impression que j'ai en considérant aujourd'hui mes travaux d'autrefois. Je dirais plutôt que le véritable fondement des recherches précédentes d'Hermite, de Kronecker et de Brioschi ne se trouve que dans l'étude préalable de la théorie de l'icosaèdre (et de la théorie des modules elliptiques, qui se trouve dans mon troisième volume). La preuve en est qu'on réussit entre 1876 et 1880, non seulement à éclaircir tous les points encore nébuleux de leur théorie, mais à s'attaquer avec un élan irrésistible à des questions qui n'avaient pas été soulevées jusqu'à ce moment. J'estime que ces années de progrès décisif correspondent à la période la plus heureuse de ma productivité mathématique. Au point de vue extérieur, elle est caractérisée par la présence fréquente de Gordan. La scène en était presque toujours Eichstadt, situé entre Erlangen et Munich; nous y passions souvent le dimanche ensemble. Gordan aimait à parler plus tard de la « *Mathesis quercupolitana* » — c'était son expression. Hélas ! après mon transfert à Leipzig, ce travail en commun n'a pu être continué dans la même mesure. Ainsi je n'avais pris part qu'indirectement aux développements des équations du 7<sup>e</sup> degré avec le groupe de Galois de 168 substitutions, que Gordan a publiés 1880-1885 dans les *Mathematische Annalen*, tomes 17-25. Dans ces travaux, les idées fondamentales sont

cachées sous un amas de calculs superflus; pour cette raison elles n'ont pas attiré l'attention qu'elles méritaient. Même le compte rendu très flatteur que M. Noether a publié dans les *Mathematische Annalen*, tome 75, à l'occasion de la mort de Gordan, n'y a pas beaucoup changé. C'est pour cette raison que j'ai jugé opportun d'ajouter au N° LVII de ce volume un commentaire, dans lequel je présente ces idées telles que je les vois et en les simplifiant. »

Nous attirons l'attention de nos lecteurs plus particulièrement sur le fait que par la publication des ouvrages récents de M. Speiser et de M. Fueter, un effort est fait pour remettre ces sujets à l'ordre du jour dans l'enseignement.

La dernière section du volume s'occupe de la physique mathématique. Ce sujet a toujours été aimé de M. Klein; il nous a même dit qu'il regrettait que son avancement prématûr à une chaire de mathématique pure à l'université l'ait empêché de poursuivre ses études auprès de Kelvin en Grande-Bretagne.

Au point de vue de l'enseignement, ces mémoires ont moins de valeur que l'activité organisatrice de M. Klein à l'Université de Goëttingue. C'est grâce à lui en grande partie, que l'étude de la physique mathématique en Allemagne a pris une si grande place dans les trente dernières années et que des instituts de physique, de géophysique et de machines techniques dignes des grandes universités ont été édifiés.

De ce point de vue, les notes autobiographiques de cette troisième section sont d'un grand intérêt. Nous citerons en guise de conclusion ces mots de la préface, écrits par M. Klein pour le tome IV de l'*Encyclopédie mathématique* (1908): « La mécanique et les mathématiques appliquées en général ne peuvent être étudiées que par un contact étroit avec la réalité, avec l'expérience; la littérature n'y joue qu'un rôle accessoire. C'est en initiant les jeunes gens, dès la première enfance, à l'observation des phénomènes de mécanique et, plus tard, en maintenant un contact suivi entre les travaux de laboratoire et les mathématiques que l'on favorise le progrès de la mécanique. Le développement moderne correspond en grande partie à ces idées. Que la connaissance de la mécanique, qui est une discipline fondamentale de toute science naturelle, arrive de cette manière à une nouvelle floraison. En particulier, que les mots de Leonardo da Vinci: « la mécanique est le paradis des mathématiciens » soient de nouveau réalisés.

G.-C. YOUNG (Lausanne).

Sophus LIE. — **Gesammelte Abhandlungen.** Herausgegeben von dem Norwegischen mathematischen Verein, durch Fr. ENGEL und P. HEEGAARD. Fünfter Band: Abhandlungen über dir Theorie der Transformationsgruppen, Erste Abteilung. — 1 vol. gr. in-8°, de 776 p.; cartonné, 25 couronnes norvégiennes; H. Aschehoug et Cie. Kristiania, 1924.

Nous reproduisons d'autre part (p. 142) l'appel de l'Association mathématique de Norvège en faveur de la publication des œuvres de Sophus Lie, comprenant sept volumes. Le tome III contient une partie des mémoires sur les équations différentielles, a paru en 1922. Le tome V, qui vient de paraître, est le premier des deux volumes qui seront consacrés aux groupes de transformations. Il comprend vingt-quatre mémoires annotés avec beaucoup de soin par M. Engel.

On sait l'influence considérable qu'ont exercé les travaux de Lie sur les recherches dans la théorie des équations différentielles et dans la théorie

des groupes continus de transformations. Ses traités publiés de 1888 à 1893 sont aujourd'hui classiques. Mais ils ne donnent qu'une idée incomplète de l'œuvre du savant géomètre norvégien. Il reste toute une série de mémoires, notamment sur les groupes infinis, qui devaient faire l'objet d'un exposé d'ensemble et que l'on sera heureux de trouver groupés dans les tomes V et VI.

Comme le fait remarquer M. Engel dans la Préface, les jeunes mathématiciens trouveront dans les œuvres de Lie de nombreux sujets de recherches qui peuvent être le point de départ de beaux travaux.

H. F.

**G.-H. HALPHEN.** — **Oeuvres**, publiées par les soins de G. JORDAN, H. POINCARÉ, E. PICARD, avec la collaboration de E. VESSIOT. Tome IV. — 1 vol. in-8° de 660 p.; 100 fr.; Gauthier-Villars et Cie.

A l'occasion des tomes I, II et III, *L'Enseignement Mathématique* a donné un aperçu de l'œuvre du grand géomètre. Pour ce quatrième et dernier volume, qui débute par la Notice sur la vie et les travaux de Halphen, par Brioschi, nous pouvons nous borner à reproduire la liste des mémoires qu'il contient:

Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Sur la série de Fourier. Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques. Sur la théorie du déplacement. Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre, extrait d'une lettre adressée à M. F. Klein. Sur une courbe élastique. Note sur l'inversion des intégrales elliptiques. Sur une courbe élastique. Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires. Sur le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe. Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires. Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrales. Formules d'algèbre. Résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Sur le problème de Gauss concernant l'attraction d'un anneau elliptique. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. Un théorème sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution allongé. Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. Sur l'équation d'Euler, extrait d'une lettre adressée à M. G.-B. Guccia. Sur les intégrales pseudo-elliptiques. Sur l'approximation d'une fraction continue algébrique. Extrait d'une lettre à M. Rouché. Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques, et, en particulier, sur la multiplication par  $\sqrt{-23}$ . Sur la résolvante de Galois dans la division des périodes elliptiques par 7. Sur les formes différentielles associées. Pièces diverses, mémoires et fragments inédits.

L'ouvrage se termine par une table méthodique générale des quatre volumes des œuvres d'Halphen.

**A. REYMOND.** — **Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'Antiquité gréco-romaine.** Exposé sommaire des Ecoles et des Principes. Avec une préface de M. L. BRUNSCHVIG. — 1 vol. in-8° de 236 p.; 12 fr.; Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris.

Nos lecteurs ont eu la primeur de l'un des chapitres de cet ouvrage: Caractères généraux de la pensée scientifique dans la Grèce ancienne, publié

dans le précédent fascicule de l'*Enseignement Mathématique*. Il n'est donc guère besoin de leur présenter l'auteur qui, depuis de nombreuses années, professe à l'Université de Neuchâtel l'histoire des sciences dans un cours qui s'adresse à la fois aux étudiants en lettres et de la Faculté des Sciences. C'est la partie de ce cours relative à l'Antiquité grecque et romaine qui fait l'objet du présent volume. On sait la place importante qu'y prennent les sciences mathématiques. L'auteur en tient largement compte. Après un aperçu historique du développement de la pensée scientifique chez les anciens, il étudie les principes et les méthodes en mathématiques, en astronomie, en mécanique puis pour les sciences chimiques et naturelles. Leur exposé forme un excellent tableau de l'état de la science dans l'antiquité.

« Les mérites en sont trop apparents, et aussi trop réels, dit M. Brunsvig, dans la Préface, pour qu'il ne soit pas superflu d'insister. Dès les premières pages de son livre, on voit avec quelle maîtrise M. Reymond s'est dégagé des controverses d'érudition que l'historien lui-même doit avoir traversées pour gagner l'accès de vérités aujourd'hui si profondément cachées, avec quelle probité dans les références, quelle sûreté dans le choix du détail, il retient, de la façon la plus simple et la plus claire, ce qui peut effectivement nourrir l'esprit du lecteur, l'aider à restaurer, dans sa profondeur et dans son intégrité, cette première civilisation occidentale dont une tradition purement littéraire risque de mutiler et de fausser la perspective. »

H. F.

W. LIETZMANN. — **Methodik des mathematischen Unterrichts.** 3. Teil: *Didaktik der angewandten Mathematik*. (Handbuch des naturwissenschaftlichen Unterrichts, VII. Band). — 1 vol. in-8° de 234 p. avec 4 tables et 50 fig. dans le texte; M. 10; Quelle et Meyer, Leipzig.

Dans son troisième et dernier volume de son traité de didactique mathématique, M. Lietzmann examine, au point de vue de l'enseignement, le rôle que jouent les mathématiques dans les branches connexes de l'enseignement secondaire. Il passe successivement en revue le dessin linéaire, les travaux manuels, la géodésie et l'astronomie, les mathématiques financières et les sciences économiques, la mécanique et la physique et la philosophie. Son exposé contient des indications fort utiles qui seront lues avec profit non seulement par les professeurs de mathématiques, mais encore par ceux qui enseignent les branches dont il vient d'être question.

L'ensemble des trois volumes de ce traité constitue l'ouvrage le plus complet que l'on possède sur la Didactique mathématique dans son état actuel et ses tendances modernes. C'est un travail considérable dans lequel il est fait mention de tous les progrès réalisés dans l'enseignement mathématique en Allemagne depuis le début de ce siècle, progrès auxquels l'auteur a lui-même contribué par sa collaboration très active aux travaux de la sous-commission allemande de l'enseignement mathématique dirigés par M. Klein, ainsi que par son enseignement et ses nombreuses publications.

H. F.

Ch. JACCOTTET. — **Cours de trigonométrie.** — 1 vol. in-8° de 144 p., avec 67 fig.; 4 fr. 50; Payot et Cie, Lausanne.

Publié d'abord sous forme de cours autographié pour les élèves du Gymnase scientifique de Lausanne, ce manuel vient d'être édité par les

soins de la maison Payot et Cie. Sous cette nouvelle forme, il ne manquera pas d'intéresser tous ceux qui enseignent la trigonométrie et pourra être utilisé par un cercle plus grand d'élèves dans les pays de langue française.

L'auteur a apporté le plus grand soin à la partie méthodique et aux exercices. Dans une première partie, il a groupé les notions essentielles concernant les angles aigus et la résolution des triangles rectangles. C'est à la fois une première initiation à la trigonométrie et aux notions de fonctions et de représentation graphique.

La seconde partie, consacrée aux angles et aux triangles quelconques, débute par des notions de géométrie analytique et la généralisation des notions d'angle et d'arc. Puis viennent les fonctions d'un angle quelconque et la résolution des triangles dans le cas général. Un dernier chapitre est consacré à l'addition et à la multiplication des arcs.

H. F.

**A. CHATELET et J. KAMPÉ DE FERIÉT.** — **Calcul vectoriel.** Théorie. Applications géométriques et cinématiques. Destiné aux élèves des classes de mathématiques spéciales et aux étudiants en sciences mathématiques et physiques. — 1 vol. in-8° de 426 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Voici un nouvel ouvrage français sur le calcul vectoriel. Il expose avec clarté les éléments essentiels de la méthode vectorielle et montre les services qu'elle peut rendre dans l'étude et dans l'application de nombreuses théories mathématiques. Bien que spécialement destiné aux étudiants, il intéressera aussi les professeurs et tous ceux qui tiennent à suivre les progrès de l'enseignement des mathématiques. Les lecteurs impartiaux ne manqueront pas de reconnaître qu'une place de plus en plus large devra être faite à l'emploi des méthodes vectorielles dans l'enseignement.

Le symbolisme de ce calcul, à la fois simple et expressif, conduit à des formules élégantes et faciles à retenir; ses règles, presque identiques à celles du calcul ordinaire, algébrique et différentiel, sont d'une application intuitive; enfin son emploi débarrasse les solutions des problèmes des éléments artificiels introduits par les axes arbitraires de la géométrie analytique.

Contrairement à une opinion assez répandue, le calcul vectoriel permet de conduire les questions jusqu'à leurs applications numériques et pratiques.

La plupart des applications traitées dans cet ouvrage ont été prises dans les programmes actuels des concours d'entrée aux grandes Ecoles; quelques développements sur la cinématique, une note sur les champs de vecteurs, se rapportent plutôt aux programmes des certificats d'études supérieures de Mathématiques générales, Mécanique rationnelle, Mécanique appliquée, Physique générale.

H. F.

**Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1925.** — 1 vol. in-16, de 686 p., avec 5 cartes célestes en couleurs et 2 cartes magnétiques. Broché, fr. 6,50; relié, fr. 9; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

L'Annuaire des Longitudes pour 1925 est, comme ses devanciers, précieux par le nombre de documents qu'il contient.

Divisé en cinq chapitres principaux : calendrier, terre, astronomie, mesures légales, données géographiques et statistiques démographiques, l'Annuaire étudie les divers calendriers, fait connaître la position relative

des astres, indique les mesures légales françaises et étrangères, le tonnage des navires, le mouvement des populations, etc.

Les notices qui terminent le volume offrent chaque année un intérêt tout particulier. L'Annuaire 1925 publie les deux notices suivantes :

*L'influence de la rotation terrestre sur la physionomie des marées*, par M. E. FICHOT.

*Les tubes à émission électronique et leurs applications à l'astronomie*, par M. G. FERRIÉ.

Cette petite Encyclopédie d'un format commode, imprimée avec soin par Gauthier-Villars et Cie, aura sa place indiquée dans toutes les bibliothèques.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

### 1. Livres nouveaux :

*Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».*

R. BALDUS — **Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik.** — 1 vol. in-8° de 45 p. ; fr. 1,30.

Karl BŒHM. — **Begriffsbildung.** — 1 vol. in-8° de 45 p. ; fr. 1,30. — Collection Wissen und Wirken, Verlag Braun, Karlsruhe.

Tous ceux qui s'intéressent à la philosophie des mathématiques tiendront à lire ces deux petits volumes de la collection « Wissen und Wirken ». Dans le premier, M. Baldus expose d'une manière très objective les idées qui sont à la base des discussions récentes entre formalistes et intuitionistes au sujet des fondements des mathématiques. Dans l'autre, M. Bœhm étudie les concepts fondamentaux en mathématiques, le rôle des définitions et des axiomes.

P. CONSTAN. — **Cours d'astronomie et de navigation** (Nouvelle édition mise en harmonie avec les derniers programmes d'examens de la marine marchande). — 2 vol. grand in-8° se vendant séparément, avec nombreuses figures dans le texte. Tome I. *Astronomie*, 1 vol. de 318 p., avec 163 figures et 3 planches, 30 fr. ; Tome II, *Navigation*, 1 vol. de 454 p., avec 220 figures et 2 planches. Gauthier-Villars et Cie.

Véritable vade-mecum contenant tous les renseignements théoriques et pratiques qu'un commandant de marine moderne doit posséder.

Lt.-Col. CORPS. — **Le camouflage de la simultanéité, base unique des théories de la relativité.** — 1 fasc. in-4° de 12 p. ; Imprimerie Lucien Paris, Pontoise, 1924.

L'auteur examine comment se sont formées, en partant de l'expérience de Michelson et Morley, les deux hypothèses fondamentales, celles de la