Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Autor: Cartan, E.

Kapitel: I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515748

LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE [1]

PAR

E. CARTAN (Paris).

I

On sait, depuis M. F. KLEIN (Programme d'Erlangen [2]) et S. LIE, le rôle important joué par la théorie des groupes dans la géométrie. H. POINCARÉ a popularisé dans le grand public scientifique cette idée fondamentale que la notion de groupe est à la base des premières spéculations géométriques. La géométrie élémentaire est au fond la théorie des invariants d'un certain groupe, le groupe des déplacements euclidiens; elle a en effet pour but l'étude des propriétés des figures qui se conservent par un déplacement arbitraire; dire que tous les déplacements forment un groupe, c'est justement exprimer en langage précis l'axiome d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.

La géométrie projective a de même pour objet l'étude des propriétés des figures qui se conservent par le groupe des transformations homographiques, et on peut également assigner à la géométrie affine, à la géométrie conforme ou anallagmatique, etc., un groupe correspondant. Inversement tout groupe continu donne naissance à une discipline géométrique autonome.

Dans chacune de ces géométries on attribue, pour la commodité du langage, à l'espace dans lequel les figures étudiées

[1] Conférence faite le mercredi 13 août 1924, au Congrès international de mathématiques, qui s'est tenu à Toronto du 11 au 16 août.

[2] Le Programme d'Erlangen (1872) a été reproduit dans les *Math. Annalen*, t. 43 (1893), p. 63-109, ainsi que dans le t. I des *Gesammelte mathematische Abhandlungen* de F. Klein (1921).

sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant, ou groupe *fondamental*; c'est ainsi qu'on est arrivé à dire: « l'espace euclidien », « l'espace affine », etc., au lieu de « l'espace dans lequel on n'étudie que les propriétés des figures invariantes par le groupe euclidien, le groupe affine, etc. » Chacun de ces espaces est *homogène*, en ce sens que ses propriétés restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental correspondant.

Plusieurs années avant le Programme d'Erlangen, B. RIEMANN avait introduit, dans son mémoire célèbre: « *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*[1] », des espaces *non homogènes* au sens qui vient d'être donné à cette expression. Dans ces espaces le carré de la distance de deux points infiniment voisins était défini par une forme différentielle, jusqu'à un certain point arbitraire, mais qu'en fait, on a toujours supposée quadratique. Ces espaces ont fait l'objet de nombreux et importants travaux, principalement en Allemagne et en Italie[2]. Mais ils ont surtout pris une importance considérable depuis que M. EINSTEIN, par la théorie de la relativité généralisée, a essayé, en identifiant notre Univers à un espace de Riemann, de réunir en une seule et même théorie la gravitation, l'optique et l'électromagnétisme. Le mouvement d'idées auquel cette théorie a donné naissance a conduit, par des généralisations importantes, à des espaces nouveaux; il suffira de citer les espaces de M. H. WEYL et les espaces de M. EDDINGTON. Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie; est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je me propose d'examiner.

II

A première vue, la notion de groupe semble étrangère à la géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent l'homo-

---

[1] B. RIEMANN, *Gesammelte math. Werke*, Leipzig (1876), p. 254–269.

[2] Il nous suffira de citer les noms de E.-B. CHRISTOFFEL, R. LIPSCHITZ, A. VOSS, G. RICCI, L. BIANCHI et T. LEVI-CIVITA.