

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	24 (1924-1925)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Kapitel:</b>	Transformation d'une somme de carrés en développement limité ou illimité.
<b>Autor:</b>	Hochstaetter, Max

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

3. — *Coniques conjuguées.* — Un point réel  $S$  et sa polaire  $s$  dans un système polaire plan  $\Sigma$  étant pris pour centre et pour axe d'une homologie dont le coefficient  $\lambda$  est donné, à tout point réel ou imaginaire  $M$  du plan correspond un point  $M_1$  du même plan. Si  $m$  est la polaire du point  $M$  dans le système polaire  $\Sigma$ , le point  $M_1$  et la droite  $m$  sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire  $\Sigma'$ .

En effet 1<sup>o</sup> les points  $M$  et  $M_1$  étant correspondants dans deux figures homologiques et d'autre part le point  $M$  et la droite  $m$  étant correspondants dans deux systèmes plans réciproques, on en conclut que les systèmes plans  $(M_1)$  et  $(m)$  décrits par les éléments  $M_1$  et  $m$  sont réciproques.

2<sup>o</sup> Si  $STU$  est un triangle autopolaire de  $\Sigma$ , les points  $S, T, U$ , qui correspondent à eux-mêmes dans l'homologie  $(S, s)$  ont donc pour homologues dans les systèmes réciproques superposés  $(M_1)$  et  $(m)$  les côtés opposés  $TU, US, ST$  du triangle  $STU$ . Par suite les systèmes  $(M_1)$  et  $(m)$  sont involutifs et les éléments  $M_1$  et  $m$  sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire  $\Sigma'$ .

*Les coniques directrices*  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$ , réelles ou idéales, des systèmes polaires  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont dites *conjuguées* relativement au pôle  $S$  et à la polaire  $s$ . Le couple de points  $TU$  conjugués dans  $\Sigma$  sont aussi conjugués dans  $\Sigma'$ . Ce couple étant arbitraire sur  $s$ , les systèmes polaires  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  ont une involution de points conjugués, commune sur  $s$ . Comme  $s$  a d'ailleurs même pôle  $S$  dans les deux systèmes, *deux coniques conjuguées ont un double contact*.

4. *Théorème de M. Lebesgue.* — Si  $T \equiv ABC$  et  $t \equiv abc$  sont deux triangles homologiques, ils définissent un système polaire  $\Sigma$  dans lequel  $T$  et  $t$  sont réciproques. Si  $S$  et  $s$  sont pôle et polaire dans  $\Sigma$ , une homologie quelconque de centre  $S$  et d'axe  $s$  transforme  $T$  en un triangle  $T_1$  qui est (n° 3) réciproque de  $t$  dans un système polaire  $\Sigma'$  et par suite (n° 2) homologique avec  $t$ .

On peut ajouter que toutes les coniques  $(\Sigma')$  ont, avec  $(\Sigma)$ , un double contact réel ou idéal sur  $s$ .

Il est clair que l'on peut substituer  $t$  à  $T$  puisque ces deux triangles sont réciproques dans  $\Sigma$ .

Ecole des Mines de Mons, le 20 décembre 1924.

Roland DEAUX.

### Transformation d'une somme de carrés en développement limité ou illimité.

Considérons  $n$  nombres rationnels, entiers ou non, positifs,  $a', a'', a''', \dots, a^{(n)}$  et leur moyenne arithmétique  $A$ . En calculant les écartis par rapport à la moyenne, on obtient  $n$  nombres, les uns positifs et les autres négatifs; on démontre facilement que leur somme est nulle.

Posons

$$\begin{aligned} e &= a - A, \quad \text{d'où} \quad a = A + e, \\ a^2 &= A^2 + e^2 + 2Ae, \\ \Sigma a^2 &= nA^2 + \Sigma e^2 + 2A \Sigma e. \end{aligned}$$

Mais  $\Sigma e = 0$ , et l'égalité ci-dessus se réduit à

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma e^2. \quad (1)$$

Les relations précédentes, bien connues, sont employées en Statistique; la formule 1 montre que la moyenne quadratique de  $n$  nombres est supérieure à leur moyenne arithmétique (en excluant le cas où les nombres sont égaux).

En généralisant la formule 1, on est conduit à une remarque assez curieuse qui fait l'objet de cette Note.

Désignons par  $a_1$  les  $e$  pris en valeur absolue, par  $A_1$  leur moyenne arithmétique, par  $a_2$  les nouveaux écarts pris en valeur absolue, et ainsi de suite.

La formule 1 peut s'écrire

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma a_1^2,$$

et on a, d'une manière analogue,

$$\Sigma a_1^2 = nA_1^2 + \Sigma a_2^2,$$

d'où

$$\Sigma a^2 = n(A^2 + A_1^2) + \Sigma a_2^2.$$

On voit donc apparaître une loi de formation

$$\Sigma a^2 = n(A^2 + A_1^2 + \dots + A_{p-1}^2) + \Sigma a_p^2. \quad (2)$$

Si on part, par exemple, des quatre nombres 24, 40, 56, 216, et si on opère comme il a été dit, on constate que les  $a_5$  sont tous égaux et que, par suite, les  $a_6$  sont nuls.

$$24^2 + 40^2 + 56^2 + 216^2 = 4(84^2 + 66^2 + 33^2 + 19^2 + 14^2 + 3^2).$$

Dans cet exemple le développement est *limité*; on peut se demander s'il en est toujours ainsi. Autrement dit, finit-on par obtenir, en poussant assez loin les opérations,

$$\Sigma a^2 = n(A^2 + A_1^2 + \dots + A_{p-1}^2) ? \quad (3)$$

Il va sans dire qu'il n'y a aucun intérêt *pratique* à remplacer une somme de quatre carrés par une somme de six carrés, comme dans

l'exemple ci-dessus; si cette recherche présente quelque intérêt, il est d'ordre spéculatif.

Voici les résultats obtenus jusqu'ici; faute de place nous n'indiquons pas les démonstrations.

I. —  $n$  est un nombre entier *quelconque*:

- a) le développement est *limité* si les  $n$  nombres sont égaux.
- b) le développement est *illimité* si  $n - 1$  nombres sont égaux.

II. —  $n$  est un nombre *impair*:

le développement est *illimité*, excepté si les nombres sont égaux (voir Ia).

III. —  $n$  est un nombre *pair*:

a) les nombres forment une progression arithmétique;  
le développement est *limité* si  $n$  est une puissance de 2 et *illimité* dans le cas contraire.

b) le développement est *limité* si  $\frac{n}{2}$  nombres sont égaux à  $\alpha$  et si  $\frac{n}{2}$  nombres sont égaux à  $\beta$ .

c)  $n = 2$ ; le développement est *limité*.

d)  $n = 4$ ; le développement est *limité*, excepté si 3 nombres sont égaux (voir I b).

e)  $n = 6$ ; le développement est *limité*:

1<sup>o</sup> si la suite présente la forme particulière  $\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta$  (voir III b);

2<sup>o</sup> si une suite présentant cette forme apparaît au cours des calculs; on a alors  $\beta = 3\alpha$ ; il faut que *toutes* les suites précédentes d'écart contiennent un nombre pair de termes négatifs; la condition est nécessaire mais non suffisante.

f)  $n = 6$ ; si la suite initiale présente la forme particulière  $\alpha, \beta, \alpha + \beta, \gamma, \delta, \gamma + \delta$ , elle engendre des suites ayant la même particularité; le développement est *illimité*.

La question est donc complètement résolue pour  $n$  impair; par contre, pour  $n$  pair elle n'est résolue que dans des cas particuliers et il ne semble pas aisément de découvrir un critère général.

Ce problème a-t-il été déjà étudié?

Genève, 2 décembre 1924.

Max HOCHSTAETTER.