pour la borne inférieure:

$$(n-2)\left\{1+\frac{n-7}{2}+\frac{(n-7)(n-14)}{2.3}+\frac{(n+7)(n-14)(n-21)}{2.3.4}+\dots\right\}$$

pour la borne supérieure:

$$(n-2)\left\{1+\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}+\dots\right\}$$

Chacun de ces systèmes de caractéristiques, dont nous connaissons non seulement le nombre approché, mais que nous sommes à même de donner d'une façon presque immédiate, dès que nous avons une racine primitive de N, détermine *au moins* $\left[\frac{2^{n-1}}{3}\right]$ systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner, systèmes qui possèdent ou uniquement le groupe cyclique $\{|x,\ 1+x|\}$ ou le sous-groupe métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{2n}x|\}$, et que nous sommes à même aussi, ayant le système de caractéristiques, de donner d'une façon immédiate.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Un nouveau mode de décomposition des nombres entiers.

Dans le tome XL des mémoires de l'Académie royale de Belgique, CATALAN a fait paraître un travail intitulé: « Recherches sur quelques produits indéfinis ».

Considérons la formule (144) qui se trouve à la page 30 de ce mémoire:

$$\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+\dots)^2\\ &=(1+q^2+q^6+q^{12}+\dots)(1+2q+2q^4+2q^9+\dots).\end{aligned}$$

Multiplions-en les deux membres par $(1+q+q^3+q^6+\dots)$; nous aurons:

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+\dots)^3\\ =&(1+q+q^3+q^6+\dots)(1+q^2+q^6+q^{12}+\dots)(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)\end{aligned}\right\}\ (\text{F}).$$

A la page XXXI de sa « Théorie des Nombres », Edouard LUCAS nous apprend que tout entier est la somme de trois triangulaires.

Le premier membre de la formule (F) contient donc toutes les puissances d'exposants entiers non négatifs de la variable q. Il en est alors de même du second membre. Nous en concluons le théorème suivant: *N'importe quel entier peut s'obtenir par l'addition d'un carré, et de trois triangulaires dont deux sont égaux.* Exemples:

$$16 = 16 + 0 + 0 + 0 = 9 + 1 + 3 + 3 = 4 + 10 + 1 + 1 = 4 + 6 + 3 + 3$$
$$= 4 + 0 + 6 + 6 = 1 + 15 + 0 + 0 = 1 + 3 + 6 + 6 = 0 + 10 + 3 + 3 \;;$$
$$18 = 16 + 0 + 1 + 1 = 9 + 3 + 3 + 3 = 1 + 15 + 1 + 1 = 0 + 6 + 6 + 6 \;.$$

Marcel WINANTS (Liége).

Sur le théorème de Kariya.

A propos d'un article de M. H. LEBESGUE.

1. M. H. LEBESGUE généralise, dans les numéros 5-6 de l'*Enseignement mathématique* (tome XXIII, p. 292), le théorème de KARIYA. Il l'énonce: *si S et* s *sont pôle et polaire par rapport à la conique Σ par rapport à laquelle deux triangles homologiques T et* t *sont polaires réciproques, le couple (S,* s*) définit des homologies qui transforment* t *(ou T) en triangles homologiques avec T (ou* t*).*

Sous cette forme le théorème est rattaché à une grande théorie: celle des pôles et polaires dans les coniques. La démonstration qu'en donne M. LEBESGUE (p. 296) peut être présentée simplement sur une conique générale. Celle que nous donnons ci-dessous nous a été enseignée par notre éminent maître, M. Cl. SERVAIS, professeur à l'Université de Gand; non pas pour justifier le théorème de Kariya mais pour établir l'existence et les propriétés des coniques conjuguées. Nous prouvons ainsi que le théorème de M. Lebesgue est un corollaire de la théorie des coniques conjuguées, étudiée par PONCELET dans le cas de l'homologie harmonique.

2. *Théorème classique.* — Deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ tels que les sommets A, B, C de l'un sont les pôles des côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 de l'autre par rapport à une conique réelle ou idéale Σ sont dits réciproques par rapport à Σ; ils sont homologiques. Les couples B, C et B_1, C_1 peuvent être imaginaires conjugués.

En effet, soient B', C', D, E les points d'intersection de BC avec A_1C_1, A_1B_1, A_1A, B_1C_1 et F le point (AA_1 — B_1C_1). Puisque un faisceau de droites est projectif à la ponctuelle des pôles de ces droites, on a successivement

$$A_1(BCDE) \barwedge (B'C'ED) \barwedge A_1(B'C'ED) \barwedge (C_1B_1EF) \;.$$

Donc

$$(BCDE) \barwedge (B_1C_1FE)$$

et les droites BB_1, CC_1, AA_1 sont concourantes.