Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1924-1925)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Réunion de Lucerne. 2 octobre 1924.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MILLER, Prof. G. A. — History of several fundamental mathematical concepts.

ROGERS, Prof. J. H. — Vilfredo Pareto.

ANDRADE, Prof. J. — Modèles de mouvements pour l'éducation géométrique.

FEHR, Prof. H. — L'Université et la préparation des professeurs de mathématiques.

CRELIER, Prof. L. J. — Observations pratiques de méthodologie.

DE VASCONCELLOS, Prof. Dr F. — Sur quelques points de l'histoire des mathématiques des Egyptiens et aussi sur les Siddhantas des Indiens.

DU PASQUIER, Prof. L. G. — Unification of Arithmetical Terminology. (Propositions concernant l'unification de la terminologie dans la numération parlée.) (Title only.)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

Réunion de Lucerne, 2 *octobre* 1924.

La Société Mathématique Suisse a tenu son Assemblée annuelle à Lucerne, le 2 octobre 1924, à l'occasion de la 105me réunion de la Société Helvétique des Sciences Naturelles.

La partie scientifique, présidée par M. le Professeur A. SPEISER (Zurich), a été consacrée aux huit communications dont on trouvera ci-après les résumés:

1. — A. HEYER (St-Gall). — *Sur quelques lieux géométriques dans les sections coniques.* — I. *On demande le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle déterminé par un point quelconque d'une conique, un sommet sur l'axe principal et le foyer correspondant.*

L'équation du lieu (rapportée au foyer pour origine) est, pour *l'ellipse*,

$$y = \pm \frac{ax}{b} \sqrt{\frac{x + a - c}{a + c - x}} .$$

Cette courbe a un point double au foyer et les tangentes aux sommets opposés comme asymptotes. Elle coupe l'axe transverse pro-

longé au point $y = \pm \frac{ac}{b}\sqrt{\frac{a}{a+c}}$ et sous un angle β pour lequel $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a+c}$. Pour le *cercle* l'équation devient $y = \mp x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; c'est la *strophoïde droite* (Voir Loria, t. 2, p. 63, 2e note au bas de la page).

Pour la *parabole* son équation est

$$y = \pm \frac{x}{2}\sqrt{\frac{2x+p}{p}}.$$

Les deux branches se coupent au foyer en faisant entre elles un angle α pour lequel $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\alpha = 53^\circ\, 7'\, 48''$. Les coordonnées du point le plus élevé de la boucle sont $x_1 = -\frac{p}{3}$; $y_1 = \frac{p}{18}\sqrt{3}$.

L'aire de la boucle est égale à $\frac{p^2}{15}$.

La courbe coupe la parabole aux points

$$x_1 = 2p\,, \quad y_1 = \pm p\sqrt{5}$$

et sous un angle pour lequel

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5\sqrt{5}}{17}\,, \quad \varphi = 33^\circ\, 22'\,.$$

Le rayon de courbure est, au foyer,

$$r = \frac{5}{8}p\sqrt{5}\,,$$

au sommet,

$$r = \frac{p}{16}\,,$$

au point le plus élevé de la boucle

$$r = \frac{2p}{3\sqrt{3}}\,.$$

II. *On demande le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle déterminé par un sommet sur l'axe principal et une corde quelconque passant par le foyer correspondant.*

On obtient pour *l'ellipse* une nouvelle ellipse semblable à la première, tangente extérieurement avec son sommet secondaire au sommet principal de la première.

Le demi petit axe est

$$\varepsilon \frac{(a - c)(2a + c)}{2a},$$

le demi grand axe,

$$\varepsilon \frac{(a - c)(2a + c)}{2b}.$$

Pour la *parabole*, on obtient une ellipse dégénérée, c'est-à-dire deux droites parallèles ayant les équations, rapportées au sommet de la parabole pour origine,

$$x = 0 \; ; \quad x = -\frac{3p}{2}.$$

III. *Soit une corde quelconque passant par un foyer ; on mène à ses deux extrémités les parallèles aux axes. On demande le lieu géométrique des deux autres sommets du rectangle ainsi déterminé.*

On obtient pour *l'ellipse* en prenant le centre pour origine

$$y = \pm \frac{b^3 \sqrt{a^2 - x^2}}{a(a^2 + c^2 - 2cx)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^3}{a} \frac{2a^2c - (a^2 + c^2)x}{\sqrt{a^2 - x^2}(a^2 + c^2 - 2cx)^2}.$$

Le point le plus élevé de la courbe a les coordonnées

$$x_1 = \frac{2a^2c}{a^2 + c^2}, \quad y_1 = b.$$

Chaque moitié de la courbe (l'axe des x est un axe de symétrie) a deux points d'inflexion. La courbe coupe l'ellipse à l'extrémité du paramètre et de façon que les tangentes aux deux courbes au point d'intersection ont des cœfficients de direction de signes contraires (ε et $-\varepsilon$). L'angle des deux courbes au point d'intersection est donné par:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ac}{b^2}.$$

Pour l'*hyperbole* le lieu est

$$y = \pm \frac{b^3 \sqrt{x^2 - a^2}}{a(a^2 + c^2 - 2cx)}.$$

La courbe est constituée de quatre tronçons séparés, avec trois asymptotes parallèles aux axes et ayant les équations suivantes:

$$x = \frac{a^2 + c^2}{2c}, \quad y = \pm \frac{b^3}{2ac}.$$

Pour la *parabole* le lieu est une hyperbole cubique

$$y = \sqrt{\frac{p^3}{2x}}$$

coupant orthogonalement la parabole.

Prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Une classe particulière d'équations différentielles d'ordre quelconque.* — Certaines recherches sur les équations différentielles conduisent au problème suivant: quand on sait qu'une fonction $u(x)$ satisfait à une équation différentielle donnée, trouver à quelle équation différentielle satisfait une fonction $y(x)$ qui, en plus des singularités de u, a encore p pôles simples ou multiples aux points $b_1, b_2, \ldots, b_p$, du plan complexe, distincts ou non. L'auteur démontre la proposition suivante par une méthode qui s'applique à des cas beaucoup plus généraux. Supposons que $u(x)$ soit l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$u^{(n)}(x) = \alpha \cdot u + \alpha_1 \cdot u' + \alpha_2 \cdot u'' + \ldots + \alpha_k \cdot u^{(k)} , \qquad (1)$$

où les $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, représentent des fonctions dérivables de x, d'ailleurs quelconques et pouvant se réduire à des constantes et où le nombre naturel k est inférieur à n. La nouvelle fonction

$$y = \frac{u(x)}{(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_p)} \qquad (2)$$

satisfait alors à une équation différentielle ordinaire de l'ordre $n + p$ et du degré $p + 1$, savoir $D = 0$, dont elle est même l'intégrale générale. Son premier membre D peut se mettre sous forme d'un déterminant,

$$D = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & \cdots, & f_{1p} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & \cdots, & f_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{p1}, & f_{p2}, & f_{p3}, & \cdots, & f_{pp} \end{vmatrix}$$

que l'on peut écrire immédiatement en appliquant les règles suivantes:

1) Tout élément $f_{i+1, k+1}$ qui ne se trouve pas dans la première ligne ($i > 0$) est la somme de la dérivée de l'élément immédiatement au-dessus de lui et de l'élément immédiatement à gauche de ce dernier; en formule:

$$f_{i+1, k+1} = f'_{i, k+1} + f_{i, k} \cdot$$

2) Les éléments de la première colonne de gauche, f_{k1}, se déduisent du premier, f_{11}, par dérivations successives.

3) Les éléments de la première ligne, $f_{1\lambda}$, sont:

$$
\begin{aligned}
f_{11} &\equiv 1.y^{(n)} - \alpha.y - \alpha_1.y' - \alpha_2.y'' - \alpha_3.y''' - \alpha_4.y'''' - \ldots - \alpha_k.y^{(k)} \\
f_{12} &\equiv \binom{n}{1}.y^{(n-1)} - \alpha_1.y - 2\alpha_2.y' - 3\alpha_3.y'' - 4\alpha_4.y''' - \ldots - \binom{k}{1}.\alpha_k.y^{(k-1)} \\
f_{13} &\equiv \binom{n}{2}.y^{(n-2)} - \alpha_2.y - 3\alpha_3.y' - 6\alpha_4.y'' - \ldots - \binom{k}{2}.\alpha_k.y^{(k-2)} \\
f_{14} &\equiv \binom{n}{3}.y^{(n-3)} - \alpha_3.y - 4\alpha_4.y' - \ldots - \binom{k}{3}.\alpha_k.y^{(k-3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

L'intégration de $D = 0$ se ramène donc immédiatement à celle de (1). En étendant cette proposition aux cas sus-mentionnés, où les singularités additionnelles sont plus compliquées, on en déduit une extension importante de la méthode de ramener l'intégration d'une équation différentielle donnée à celle d'une autre plus simple.

Dr A. Staempfli (Cernier, Neuchâtel). — *Transformation par poloconiques.* — Considérons un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Toutes les quadriques qui admettent ce tétraèdre comme conjugué forment un système linéaire à trois dimensions ou buisson. Dans ce buisson, nous choisissons un réseau de quadriques de façon arbitraire.

A chaque point P nous faisons correspondre le point P′, intersection des plans polaires de P par rapport à toutes les quadriques du réseau.

Nous déterminons ainsi une transformation ponctuelle involutive du troisième ordre, qui n'est qu'un cas particulier de la transformation cubique générale déterminée analytiquement par trois équations bilinéaires entre les coordonnées de deux points P et P′.

En général, à un point P correspond un et un seul point P′, mais il existe des points singuliers situés sur le tétraèdre: les quatre sommets et les points des arêtes.

Il est facile de vérifier que *toute quadrique passant par les quatre sommets du tétraèdre fondamental est transformée en une quadrique passant par ces mêmes quatre points.*

Ces quadriques forment naturellement un système linéaire de dimension cinq, qui est transformé en lui-même par la transformation cubique définie plus haut.

Cinq étant justement la dimension du système linéaire de toutes les coniques d'un plan, il est naturel de couper ce système de quadriques par un plan arbitraire π et d'étudier les coniques obtenues par cette intersection.

Nous dirons que deux coniques de π sont correspondantes, si elles proviennent de deux quadriques transformées l'une de l'autre.

Ainsi est donc définie, dans un plan π arbitraire, une transformation de coniques en coniques, l'élément de la transformation étant la conique et non les points de cette conique.

Cette transformation peut être nommée: Transformation par poloconiques réciproques suivant une certaine cubique C_3. Elle fait correspondre à toute conique sa poloconique par rapport à une courbe du troisième ordre.

La poloconique, elle, est définie comme suit: *Le lieu des pôles des coniques polaires qui, étant considérées comme coniques de seconde classe, sont apolaires à une conique fixe arbitraire C_2 de second ordre, est une conique C'_2 nommée la poloconique de la conique fixe C_2.*

Cette représentation géométrique de la transformation par poloconiques, intéressante en elle-même, apparaît en outre comme très féconde: elle permet d'établir quelques propriétés nouvelles des poloconiques et de vérifier promptement leurs propriétés connues.

(Voir démonstration et applications: Transf. par poloconiques et généralisation, Chap. II et III. Thèse. Ecole polytechnique fédérale Zurich 1924.)

Prof. G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur les géométries différentielles.* — On sait que la notion de déplacement parallèle due à M. Levi-Civita [1] a été généralisée par MM. Weyl [2], Eddington [3] et Schouten [4]. La généralisation de M. Schouten comprend d'ailleurs tous les autres cas. Nous avions obtenu en 1921 des formules qui correspondent aux formules de Frenet et cela pour la géométrie de M. Weyl [5]. Cette année-ci nous avons donné les formules de Frenet pour la géométrie différentielle la plus générale, celle qui correspond au déplacement parallèle de M. Schouten [6]. Dans son livre récemment paru [7], M. Schouten fait remarquer que les formules que j'ai obtenues pour la géométrie de Weyl ne correspondent pas à la géométrie la plus générale de Weyl, mais à une particularisation de celle-ci, qu'on obtient en fixant le tenseur métrique g_{ik}. Cette remarque vaut aussi pour les formules de Frenet relatives à la géométrie de Schouten. Il convient tout d'abord de répondre à cela par le fait suivant: les formules de Frenet que je cherchais n'ont de sens que pour autant que la métrique est déterminée. De plus leur but est de donner un sens géométrique

---

1 LEVI-CIVITA. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, 1917.
2 WEYL. *Raum, Zeit, Materie*, 5e éd., p. 122.
3 EDDINGTON. *The Mathematical Theory of Relativity*, p. 214,
4 SCHOUTEN. *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 13, 1922.
5 JUVET. *C. R. Ac. des Sc.*, 1921 (Ier semestre).
6 JUVET. *C. R. Ac. des Sc.*, 1924 (IIe semestre), et *Bulletin de la Soc. math. de France*, (sous presse).
7 SCHOUTEN. *Der Ricci-Kalkül*, p. 236.

aux formules du déplacement parallèle en faisant voir comment un n-èdre attaché à une courbe se déplace le long de cette courbe; c'est là, nous semble-t-il, un des premiers problèmes de la géométrie différentielle. Cependant, si l'on arrive à des formules qui sont invariantes pour les transformations de coordonnées, on peut se demander comment elles seront altérées lorsqu'on changera la métrique.

C'est de quoi nous nous occuperons ici, mais seulement pour le cas, relativement simple, de la géométrie de M. Weyl. On sait que pour une telle géométrie, les g_{ik} ne sont définis qu'à un facteur λ près; λ étant une fonction de point dans la variété considérée.

Rappelons ce que nous avons obtenu avec une métrique déterminée et donnée par les coefficients g_{ik} de la forme quadratique et par les coefficients φ_i de la forme linéaire de M. Weyl. A chaque point d'une courbe $x_i = x_i(s)$ on attache un n-èdre orthogonal et normé, on passe de l'un de ces n-èdres à celui qui est infiniment voisin par une suite de trois opérations: 1° on déplace le n-èdre parallèlement à lui même; 2° on lui fait subir une rotation dont les composantes sont au signe près, les courbures $\frac{1}{\rho_{(p)}}$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ de la courbe au point considéré; 3° on lui fait subir une homothétie de rapport $h = 1 + \frac{\Sigma \varphi_i dx_i}{2}$. Cela étant, le corps de vecteurs attaché au premier point est venu s'appliquer sur le corps de vecteurs attaché au point voisin, les vecteurs du premier corps étant venus se confondre avec ceux du second qui ont les mêmes composantes. Les nombres $\rho_{(p)}$ et $1 + \frac{\Sigma \varphi_i dx_i}{2}$ sont des invariants pour tous les changements de coordonnées; qu'arrive-t-il si l'on change g_{ik} en $\overline{g_{ik}} = \lambda g_{ik}$? On sait que φ_i se change en $\overline{\varphi_i} = \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$. Les deux points P et P′ correspondent à des valeurs de $\bar{s}$ différant de $\overline{ds} = \sqrt{\lambda}\, ds$. Le déplacement parallèle d'un vecteur de P en P′ s'exprime par des formules qui font intervenir λ_i, les $\overline{\rho_{(i)}}$ sont aussi dépendants de λ, on trouve après d'assez longs calculs

$$\bar{\rho}_{(i)} = \sqrt{\lambda}\, \rho_{(i)} ,$$

et l'on a bien évidemment pour le rapport d'homothétie $\bar{h}$,

$$\bar{h} = 1 + \frac{1}{2}\sum\left(\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right) dx_i = h - \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} dk_i$$

ou

$$\bar{h} = h - d \log \sqrt{\lambda} .$$

En résumé h et les $\rho_{(i)}$ sont des invariants pour les transformations de coordonnées; mais lorsqu'on change de métrique, en multipliant les g_{ik} par λ, les $\rho_{(i)}$ sont multipliés par $\sqrt{\lambda}$ et h est diminué de $d \log \sqrt{\lambda}$. On peut dire encore que les invariants de la courbe vis-à-vis de toute transformation, et des coordonnées, et de la métrique, sont les rapports

$$\rho_{(1)} : \rho_{(2)} : \cdots : \rho_{(h-1)}.$$

H. Brandt (Aix-la-Chapelle). — *Sur la composition des formes quadratiques quaternaires.* — L'auteur définit d'abord le concept de la *composition* des formes quadratiques quaternaires. En se limitant au cas des formes primitives de même discriminant il expose les deux problèmes suivants:

1. reconnaître si 2 formes A et B peuvent être composées;
2. si c'est le cas, donner toutes les formes composées.

Le 1er problème est résolu par la proposition: A et B sont composables dans cet ordre, toujours et seulement dans le cas où la classe principale *à droite* de A est identique à la classe principale *à gauche* de B.

La solution du second problème conduit à une disposition des classes en carré dans laquelle les classes principales se trouvnt sur une diagonale, tandis que les cases placées symétriquement par rapport à cette diagonale, contiennent ou une même classe ambiguë ou deux classes opposées. Toutes les classes d'une ligne ont la même classe principale *à droite*, toutes les classes d'une colonne, la même classe principale *à gauche*. Si l'on choisit deux cases arbitrairement, mais de façon que la ligne de la première rencontre la colonne de la seconde sur une case de classe principale, les deux classes correspondantes prises dans l'ordre indiqué ont pour classe *composée* celle de la case située inversement sur la colonne de la première case et sur la ligne de la seconde.

G. Hunziker (Reinach, Argovie). — *Sur le problème des quatre couleurs.* — Jusqu'ici, on a prouvé, dans ce problème de la coloration des cartes dénommé le problème des 4 couleurs, que 4 couleurs sont nécessaires; on a prouvé aussi que 5 couleurs sont suffisantes; mais *on n'a pu prouver* que 4 suffisent également.

Dans ma dissertation, parue chez Leemann, éditeurs, Zurich, j'ai établi d'abord un procédé pour rechercher systématiquement si une carte donnée est colorable effectivement avec 4 couleurs et de quelles manières. Ce procédé met en même temps un certain ordre dans l'ensemble de toutes les colorations possibles.

J'ai ensuite cherché à déduire d'un seul principe ces mêmes résultats, obtenus auparavant de points de vue sans relations entre eux; j'ai pu le faire au moyen d'une fonction $e_1 = f(e_2)$, où e_1 est le nombre

des frontières et e_2 le nombre des Etats. En se rapportant à des cartes dans lesquelles il y a le plus possible d'Etats *voisins*, on trouve $e_1 = 3\,e_2 - 6$, c'est-à-dire que le nombre des « voisinements » augmente de 3 lorsque le nombre des Etats augmente de 1. Par suite, dans la recherche systématique des colorations avec 4 couleurs indiquée plus haut, normalement pour chaque Etat 3 voisinages seulement sont à prendre en considération, de sorte que dans ce cas 4 couleurs paraissent suffire. Mais si dans un cas plus de 3 couleurs sont nécessaires, il devait y en avoir auparavant moins de 3. Et puisqu'on peut faire en sorte qu'il n'y en ait jamais moins que 2, il devrait exister autant de fois la possibilité de choisir entre 2 couleurs. Il s'agit maintenant de prouver que de là résultent un plus grand nombre de possibilités de coloration qu'on ne peut en obtenir ensuite dans la réalité. J'ai commencé à le faire. Cependant, dans le cas général, cette idée n'est pas développée encore suffisamment pour être convaincante.

Pour des surfaces de genre plus élevé, le nœud du théorème des 4 couleurs, à savoir le fait que chaque fois sont nécessaires et suffisantes autant de couleurs que d'Etats peuvent être *tous voisins entre eux* sur la surface en question, est facile à prouver, parce qu'ici le nombre maximum de tels voisinements est plus grand ou égal au nombre moyen augmenté de 1 des Etats voisins. (Mais uniquement parce qu'il n'en est pas ainsi pour la sphère, le cas particulier de la surface sphérique, apparemment le plus simple, demande pourtant effectivement une profonde pénétration du problème.)

Cette généralisation du problème des 4 couleurs est valable aussi dans tous les autres cas traités et par suite est d'autant plus probable pour la surface sphérique.

L. Crelier (Berne). — *Sur quelques équations intégrales simples.* — Les équations intégrales suivantes ont été étudiées par une de mes élèves Mlle Dr A. von Fischer:

$$1.\quad \varphi(x) = px + q + \lambda \int_0^x (ax + bs)\varphi(s)\,ds\ .$$

$$2.\quad \varphi(x) = px + q + \lambda \int_0^x (ax^2 + bs^2)\varphi(s)\,ds\ .$$

$$3.\quad \varphi(x) = px + q + \lambda \int_0^x (ax^2 + bxs + cs^2)\varphi(s)\,ds\ .$$

$$4.\quad \varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x e^{x+s}\varphi(s)\,ds\ .$$

$$5.\quad \varphi(x) = 3x + 1 + \lambda \int_0^x e^{x-s}\varphi(s)\,ds\ .$$

Elles se prêtent très facilement à l'application de la méthode des approximations successives et permettent ensuite de calculer sans difficultés les noyaux itérés $K^{(n)}(x, s)$ et la résolvante $\Gamma(x, s; \lambda)$.

Nous donnerons les solutions des équations 1) et 5):

$$\varphi(x) = q + px + \lambda\left[qx^2\left(a + \frac{b}{2}\right) + px^3\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)\right]$$
$$+ \lambda^2\left[qx^4\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right) + px^5\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{5}\right)\right]$$
$$+ \lambda^3\left[qx^6\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right)\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{6}\right) + \ldots\right] + \ldots \tag{1}$$

$$\varphi(x) = 1 + 3x + \lambda[4e^x - 3x - 4]$$
$$+ \lambda^2[e^x(4x - 7) + 3x + 7] + \lambda^3 \ldots \tag{5}$$

De la même manière, Mlle von Fischer a encore résolu les équations de Fredholm:

1. $\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (ax + bs)\varphi(s)\,ds$.

2. $\varphi(x) = q + px + \lambda \int_0^1 (ax^2 + bs^2 + c)\varphi(s)\,ds$.

3. $\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{x+s}\varphi(s)\,ds$.

4. $\varphi(x) = 1 + 3x + \lambda \int_0^1 e^{x-s}\varphi(s)\,ds$.

5. $\varphi(x) = 1 + 2x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos s . \varphi(s)\,ds$.

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ s'obtiennent très facilement. Ce sont pour les équations 2) et 5)

$$D(\lambda) = 1 - \lambda\left(\frac{a + b}{3} + c\right) - \lambda^2\frac{4ab}{45}, \tag{2}$$

$$D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right) = ax^2 + bs^2 + c - ab\lambda\left(\frac{x^2 + s^2}{3} - x^2s^2 - \frac{1}{5}\right).$$

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2}, \tag{5}$$

$$D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sin x \cos s .$$

D'une manière générale, de tels exemples permettent de suivre pas à pas les développements parfois difficiles de la théorie des équations intégrales [1].

Prof. S. BAYS (Fribourg). — *Sur le nombre des systèmes cycliques différents de triples de Steiner pour* $N = 6n + 1$ *premier (ou puissance de nombre premier)*. — Soient les N éléments $0, 1, 2, \ldots, N - 1$, N étant de la forme $6n + 1$ et premier (ou puissance de nombre premier). Le groupe métacyclique est l'ensemble des permutations $|x, a + \alpha x|$, où $a = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ et α parcourt les $\varphi(N)$ entiers premiers avec N. Il est engendré par les permutations $|x, 1 + x|$ et $|x, \alpha x|$, où α est une racine primitive de N; il se note par suite

$$\{|x, 1 + x|, \quad |x, \alpha x|\}.$$

Un système cyclique de triples de Steiner possède le groupe cyclique $\{|x, 1 + x|\}$ ou un *autre* sous-groupe plus étendu du groupe métacyclique. *Deux systèmes cycliques équivalents sont déductibles l'un de l'autre par une permutation métacyclique.* Cette proposition, importante dans notre recherche et que nous avions dû admettre sans démonstration dans deux mémoires précédents [2], en faisant naturellement la réserve qu'elle restait à établir, est maintenant démontrée par M. P. Lambossy. Par suite les résultats des deux mémoires indiqués sont maintenant *définitifs*, c'est-à-dire que nous avons jusqu'ici:

1° Le nombre des systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner pour les premières valeurs de $N = 6n + 1$ jusqu'à $N = 43$.

2° Théoriquement, une méthode pour obtenir *tous* les systèmes cycliques *différents* pour $N = 6n + 1$ premier (ou puissance de nombre premier); pratiquement son application à $N = 49$, 61 ou 67 demanderait déjà un temps considérable.

3° Une borne inférieure et une borne supérieure du même ordre de grandeur, du nombre des *systèmes de caractéristiques différents* d'une certaine classe (les systèmes de caractéristiques différents sont les souches de familles de systèmes cycliques différents avec symétrie propre). Ces deux bornes sont des sommes constituées de la même façon d'expressions semblables, expression dont nous ne donnerons que la première et la plus simple:

---

[1] Dans un des prochains numéros du journal nous donnerons le développement complet d'un des exercices. (L. C.)

[2] L'un a paru dans le *Jour. de math. pures et appliquées*, t. 2, 1923, fasc. 1, p. 73-98. L'autre paraîtra prochainement dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Ses résultats sont contenus *en partie* dans une note aux *Comptes Rendus*, t. 175, p. 936, séance du 20 nov. 1922.

pour la borne inférieure:

$$(n-2)\left\{1+\frac{n-7}{2}+\frac{(n-7)(n-14)}{2.3}+\frac{(n+7)(n-14)(n-21)}{2.3.4}+\ldots\right\}$$

pour la borne supérieure:

$$(n-2)\left\{1+\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}+\ldots\right\}$$

Chacun de ces systèmes de caractéristiques, dont nous connaissons non seulement le nombre approché, mais que nous sommes à même de donner d'une façon presque immédiate, dès que nous avons une racine primitive de N, détermine *au moins* $\left[\frac{2^{n-1}}{3}\right]$ systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner, systèmes qui possèdent ou uniquement le groupe cyclique $\{|x, 1+x|\}$ ou le sous-groupe métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{2n}x|\}$, et que nous sommes à même aussi, ayant le système de caractéristiques, de donner d'une façon immédiate.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Un nouveau mode de décomposition des nombres entiers.

Dans le tome XL des mémoires de l'Académie royale de Belgique, CATALAN a fait paraître un travail intitulé: « Recherches sur quelques produits indéfinis ».

Considérons la formule (144) qui se trouve à la page 30 de ce mémoire:

$$\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+\ldots)^2\\ &=(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots)(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots).\end{aligned}$$

Multiplions-en les deux membres par $(1+q+q^3+q^6+\ldots)$; nous aurons:

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+\ldots)^3\\ &=(1+q+q^3+q^6+\ldots)(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots)(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)\end{aligned}\right\}\text{(F)}.$$

A la page XXXI de sa « Théorie des Nombres », Edouard LUCAS nous apprend que tout entier est la somme de trois triangulaires.