Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE DERNIER QUART DE SIÈCLE

Autor: Plancherel, Michel

Kapitel: § 9. L'unicité du développement trigonométrique.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515749

W. H. Young a donné des critères généraux de convergence de la série conjuguée, analogues à ceux donnés au § 3 [1].

Si la série $\sum_{1}^{\infty}(a_n - ib_n)e^{inx}$ est partout convergente et converge vers zéro dans un intervalle arbitrairement petit, on a $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ [2]. Ce résultat a été généralisé par M. F. Riesz [3].

M. Privaloff [4] a énoncé quelques théorèmes sur les séries conjuguées: Si f^2 est intégrable et si la série de Fourier ΣA_n de f converge sur un ensemble $\mathcal{M}$ de mesure positive, la série conjuguée ΣB_n converge presque partout sur $\mathcal{M}$. Si une série trigonométrique ΣA_n converge sur un ensemble $\mathcal{M}$ de mesure positive, pour que la série conjuguée ΣB_n converge presque partout sur $\mathcal{M}$ il faut et il suffit qu'elle soit sommable par une certaine moyenne de Cesàro ou par le procédé de Riemann presque partout sur $\mathcal{M}$.

3. M. Fejér [5] a étudié la relation qui existe entre les singularités de Lebesgue et de Du Bois-Reymond de deux séries trigonométriques conjuguées. Il a montré que si ΣA_n est uniformément convergente dans $(0, 2\pi)$ la différence des sommes partielles $s_n(x)$ et $s_n^{(1)}(x)$ relatives à la série conjuguée ΣB_n converge vers zéro et que par conséquent ΣB_n converge au sens ordinaire du mot en tous les points où elle converge (C, 1) — donc presque partout — et qu'elle converge uniformément sur tout ensemble où elle converge uniformément (C, 1). Il a montré encore que si la série $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et si la fonction $F(z)$ est continue pour $|z| \leqq 1$, de la convergence uniforme de ΣA_n résulte celle de ΣB_n et réciproquement. Si $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et est continue pour $|z| \leqq 1$, si de plus ΣA_n converge partout, cette série présente nécessairement la singularité de Lebesgue là où ΣB_n présente celle de Du Bois-Reymond.

§ 9. L'unicité du développement trigonométrique.

1. Un double problème se pose: I. Sachant qu'une série trigonométrique ΣA_n converge vers zéro sur un ensemble E de

---

[1] W. H. Young 24. — [2] Fatou 1. — [3] F. und M. Riesz. — [4] Privaloff 1. — [5] Fejér 6, 11; voir aussi W. H. Young 4.

points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ et ne supposant rien d'avance sur la convergence de la série dans l'ensemble complémentaire CE, quelles propriétés doit avoir l'ensemble E pour qu'on puisse affirmer que $a_n = b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. (*problème de Cantor*).

II. Sachant qu'une série trigonométrique converge sur un ensemble $\mathcal{E}$ de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ vers une fonction $f(x)$ et ne supposant rien d'avance sur la convergence de la série dans l'ensemble complémentaire $C\mathcal{E}$, quelles propriétés doivent avoir $\mathcal{E}$ et $f(x)$ pour que la série trigonométrique soit une série de Fourier (*problème de Du Bois-Reymond*). Il est clair que pour pouvoir conclure, il est nécessaire de supposer que l'ensemble E ou $\mathcal{E}$ est mesurable et que son complémentaire est de mesure nulle. Mais cette condition n'est pas suffisante.

2. G. Cantor[1] a déjà montré que si CE est réductible, $a_n = b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. M. F. Bernstein[2] a montré ensuite que la même conclusion subsiste pourvu que CE ne contienne pas de sous-ensemble parfait; c'est, en particulier, le cas si CE est dénombrable. M. Rajchman[3] et Mlle Bary[4] ont démontré que si CE est un ensemble parfait d'un type spécial, on peut encore affirmer que $a_n = b_n = 0$. Mais ce résultat n'est pas vrai pour tous les ensembles parfaits de mesure nulle; c'est ce que montre M. Menchoff[5] en construisant une série trigonométrique à coefficients non nuls (mais convergeant vers zéro), qui converge vers zéro sur le complémentaire d'un ensemble parfait de mesure nulle, la convergence vers zéro étant de plus uniforme dans tout intervalle fermé contenu dans ce complémentaire.

3. Le problème de Du Bois-Reymond n'a pas reçu lui non plus de solution complète. Un critère général pour décider si une série trigonométrique est une série de Fourier est le suivant[6]: Pour que la série ΣA_n soit une série de Fourier, il faut et il suffit que la série $\Sigma \int_0^x A_n dx$ converge dans tout l'intervalle $(0,2\pi)$ vers une fonction $F(x)$ qui soit l'intégrale définie d'une fonction

---

[1] Cantor 2. — [2] F. Bernstein 1; voir aussi W. H. Young 1. — [3] Rajchman 2, 3. — [4] Bary. — [5] Menchoff 1. — [6] W. H. Young 6, 16. Pour des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série trigonométrique soit la série de Fourier d'une fonction bornée ou d'une fonction de puissance p-ième $(p > 1)$ intégrable, voir W. H. Young 16, Steinhaus 7.

intégrable $f(x)$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

$f(x)$ est alors la génératrice de la série.

M. LEBESGUE [1] a démontré que si ΣA_n converge sur un ensemble $\mathcal{E}$, de complémentaire $C\mathcal{E}$ réductible, vers une fonction $f(x)$ bornée sur $\mathcal{E}$, ΣA_n est une série de Fourier dont $f(x)$ est la génératrice (f étant définie arbitrairement sur $C\mathcal{E}$). MM. W. H. YOUNG [2] et Ch. J. de la VALLÉE-POUSSIN [3] ont fait voir ensuite que pour pouvoir conclure que $\sum\limits_0^\infty A_n$ est une série de Fourier il suffit de supposer que $\Phi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \text{sup.} \left|\sum\limits_0^n A_\nu\right|$ soit intégrable dans $(0, 2\pi)$ et soit finie dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ ou s'il y a des points d'infinitude de cette limite, que leur ensemble soit dénombrable ou ne contienne pas de sous-ensemble parfait.

4. Les problèmes de Cantor et de Du Bois-Reymond se posent pour chaque procédé de sommation des séries trigonométriques. Ils ont été étudiés pour le procédé de Cesàro [4].

BIBLIOGRAPHIE [5]

S. BANACH et H. STEINHAUS. — Sur la convergence en moyenne des séries de Fourier [*Bull. Cracovie*, 1918, 87-96].

N. BARY. — Sur l'unicité du développement trigonométrique [*C. R.* 177, 1195-1198, (1923)].

F. BERNSTEIN. — Zur Theorie der trigonometrischen Reihe [*Leipz. Ber.* 60, 325-338, (1908)].

S. BERNSTEIN. — Sur la convergence absolue des séries trigonométriques [*C. R.* 158, 1661-1663, (1914)].

M. BÔCHER. — 1. Introduction to the theory of Fouriers-series [*Annals of Math.* (2) 7, 81-152, (1906)].

2. On Gibb's phenomenon [*J. f. Math.* 144, 41-47, (1914)].

Fr. BURCKHARDT. — Trigonometrische Reihen und Integrale [*Encyclop. d. math. Wiss.*, II A 12, Leipzig, Teubner].

1 Lebesgue 5, p. 122. — 2 W. H. Young, 6, 16. — 3 Vallée-Poussin 4, 5. — 4 M. Riesz 4; Rajchman; W. H. Young 17.

5 Une bibliographie très complète de tous les travaux intéressant de près ou de loin la théorie des séries trigonométriques a été donnée par M. M. Lecat : *Bibliographie des séries trigonométriques.* Avec un appendice sur le calcul des variations [Louvain, chez l'auteur, 1921].