Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE DERNIER QUART DE SIÈCLE

Autor: Plancherel, Michel

Kapitel: § 8. Série trigonométrique et série conjuguée.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515749

pour $|z| < 1$ et ait pour $|z| < 1$ sa partie réelle positive, il faut et il suffit que le point $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de l'espace à $2n$ dimensions appartienne au corps K_n défini comme le plus petit corps convexe contenant la courbe

$$x_1 = 2\cos\varphi\,, \quad x_2 = 2\cos 2\varphi\,, \ldots, \quad x_n = 2\cos n\varphi$$
$$y_1 = -2\sin\varphi\,, \quad y_2 = -2\sin 2\varphi\,, \ldots, \quad y_n = -2\sin n\varphi$$

et cela quelque soit n.

M. Tœplitz[1] a réussi à exprimer ce résultat sous forme algébrique. En posant

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\,, & a_1 + ib_1 & , \ldots a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1\,, & 2 & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2\,, & a_1 - ib_1 & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - ib_n\,, & a_{n-1} - ib_{n-1} & 2 \end{vmatrix}$$

et en désignant par H_n la forme d'Hermite dont D_n est le discriminant, son résultat énonce qu'une fonction continue périodique de période 2π est $\geqq 0$ lorsque les coefficients a_n, b_n de sa série de Fourier sont tels que les formes $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ ne sont pas négatives.

Ces théorèmes sont en relation étroite avec le théorème de Picard-Landau. Ils appartiennent plutôt au domaine de la théorie des fonctions d'une variable complexe; c'est pourquoi nous n'insisterons pas ici sur les développements et les recherches qu'ils ont provoqués. Notons simplement qu'ils permettent de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de constantes soit la suite des constantes de Fourier d'une fonction mesurable bornée, d'une fonction bornée intégrable au sens de Riemann ou d'une fonction monotone [2].

§ 8. Série trigonométrique et série conjuguée.

1. A toute série trigonométrique

$$A_0 + \sum_1^\infty A_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

[1] Toeplitz 1; voir aussi Fischer 3. — [2] Caratheodory und Fejér; Caratheodory 3, 4.

correspond une *série conjuguée*

$$B_0 + \sum_1^\infty B_n = \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \, ,$$

où b_0 est une constante arbitraire. Ces deux séries ne sont autre chose que la partie réelle et la partie imaginaire de la série de puissances

$$F(z) = \frac{a_0 - ib_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n - ib_n) z^n$$

sur la circonférence $z = e^{ix}$.

On sait depuis les travaux de Pringsheim[1] et de Fejér qu'il existe des séries de puissances $F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, de rayon de convergence 1, telles que $f(x) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{ix})$ soit continue sur tout le cercle de convergence $|z| = 1$ et pour lesquelles pourtant $\Sigma c_n e^{inx}$ a une infinité de points de divergence sur chaque arc de la circonférence de ce cercle. Il existe aussi des séries de puissances $F(z)$ pour lesquelles $f(x)$ est continue sur $|z| = 1$ et pour lesquelles cependant $\Sigma c_n e^{inx}$ converge, mais ne converge uniformément sur aucun arc de cette circonférence; de même il y en a qui convergent uniformément sur cette circonférence, mais non absolument[2].

Lorsque la série $F(z)$ réalise la transformation conforme du cercle $|z| < 1$ sur une aire simple du plan complexe, auquel cas $\sum_1^\infty n \, |a_n - ib_n|^2$ converge, l'étude de la convergence de $F(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ conduit à un résultat extrêmement simple dû à M. Fejér[3]: La série $\sum_1^\infty (a_n - ib_n) e^{inx}$ converge pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(z)$ a une limite radiale ($z = re^{ix}$, $r \to 1 - 0$). Et celà, uniformément sur tout ensemble sur lequel la limite est uniforme.

2. Si la série ΣA_n est une série de Fourier, la série conjuguée

[1] Pringsheim, Fejér. — [2] Neder 1, 2. — [3] Fejér 9; voir aussi Landau 2.

ΣB_n ne l'est pas nécessairement. Nous avons cependant déjà noté que si la génératrice de ΣA_n est de carré intégrable, ΣB_n est aussi la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable. Plus généralement, M. M. RIESZ[1] a fait voir que si ΣA_n est la série de Fourier d'une fonction f telle que $|f|^p (p>1)$ est intégrable, ΣB_n est, elle aussi, la série de Fourier d'une fonction conjuguée g telle que $|g|^p$ est intégrable. Ce théorème résulte du fait que la fonction conjuguée

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cot\frac{t-x}{2}\,dt \tag{24}$$

existe presque partout lorsque $f(x)$ est intégrable, à condition de prendre comme valeur de l'intégrale la valeur principale de Cauchy[2] et du fait que si $|f|^p (p > 1))$ est intégrable, on a (en supposant pour simplifier que $a_0 = b_0 = 0$)

$$\int_0^{2\pi} |g|^p\,dx \leqq M_p \int_0^{2\pi} |f|^p\,dx$$

M_p ne dépendant que de p.

Si la fonction $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n$ est continue et satisfait uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre α

$$|f(x+h) - f(x)| < k\,|h|^\alpha\,, \qquad k > 0\,, \qquad \alpha > 0$$

la série conjuguée ΣB_n est aussi une fonction continue et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α si $\alpha \neq 1$, et d'ordre $1-\varepsilon$ (ε positif arbitrairement petit) si $\alpha = 1$[3].

Si la fonction $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n$ est à variation bornée, la série conjuguée ΣB_n converge en tout point où la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale (24)

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot\frac{t}{2}\,dt$$

existe, donc presque partout[4].

---

[1] M. Riesz 8. — [2] Plessner. — [3] Fatou 1; Privaloff 3. — [4] Young 4.

W. H. Young a donné des critères généraux de convergence de la série conjuguée, analogues à ceux donnés au § 3 [1].

Si la série $\sum_{1}^{\infty}(a_n - ib_n)e^{inx}$ est partout convergente et converge vers zéro dans un intervalle arbitrairement petit, on a $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ [2]. Ce résultat a été généralisé par M. F. Riesz [3].

M. Privaloff [4] a énoncé quelques théorèmes sur les séries conjuguées: Si f^2 est intégrable et si la série de Fourier ΣA_n de f converge sur un ensemble $\mathcal{M}$ de mesure positive, la série conjuguée ΣB_n converge presque partout sur $\mathcal{M}$. Si une série trigonométrique ΣA_n converge sur un ensemble $\mathcal{M}$ de mesure positive, pour que la série conjuguée ΣB_n converge presque partout sur $\mathcal{M}$ il faut et il suffit qu'elle soit sommable par une certaine moyenne de Cesàro ou par le procédé de Riemann presque partout sur $\mathcal{M}$.

3. M. Fejér [5] a étudié la relation qui existe entre les singularités de Lebesgue et de Du Bois-Reymond de deux séries trigonométriques conjuguées. Il a montré que si ΣA_n est uniformément convergente dans $(0, 2\pi)$ la différence des sommes partielles $s_n(x)$ et $s_n^{(1)}(x)$ relatives à la série conjuguée ΣB_n converge vers zéro et que par conséquent ΣB_n converge au sens ordinaire du mot en tous les points où elle converge (C, 1) — donc presque partout — et qu'elle converge uniformément sur tout ensemble où elle converge uniformément (C, 1). Il a montré encore que si la série $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et si la fonction $F(z)$ est continue pour $|z| \leqq 1$, de la convergence uniforme de ΣA_n résulte celle de ΣB_n et réciproquement. Si $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et est continue pour $|z| \leqq 1$, si de plus ΣA_n converge partout, cette série présente nécessairement la singularité de Lebesgue là où ΣB_n présente celle de Du Bois-Reymond.

§ 9. L'unicité du développement trigonométrique.

1. Un double problème se pose: I. Sachant qu'une série trigonométrique ΣA_n converge vers zéro sur un ensemble E de

---

[1] W. H. Young 24. — [2] Fatou 1. — [3] F. und M. Riesz. — [4] Privaloff 1. — [5] Fejér 6, 11; voir aussi W. H. Young 4.