

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1924-1925)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES SÉRIES
TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE DERNIER QUART DE SIÈCLE
Autor: Plancherel, Michel
Kapitel: § 8. Série trigonométrique et série conjuguée.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515749>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

pour $|z| < 1$ et ait pour $|z| < 1$ sa partie réelle positive, il faut et il suffit que le point $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ de l'espace à $2n$ dimensions appartienne au corps K_n défini comme le plus petit corps convexe contenant la courbe

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \varphi, & x_2 &= 2 \cos 2\varphi, \dots, & x_n &= 2 \cos n\varphi \\ y_1 &= -2 \sin \varphi, & y_2 &= -2 \sin 2\varphi, \dots, & y_n &= -2 \sin n\varphi \end{aligned}$$

et cela quelque soit n .

M. TOEPLITZ¹ a réussi à exprimer ce résultat sous forme algébrique. En posant

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & , & a_1 + ib_1 & , & \dots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & , & 2 & & & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & , & a_1 - ib_1 & & & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_n - ib_n & , & a_{n-1} - ib_{n-1} & & & 2 \end{vmatrix}$$

et en désignant par H_n la forme d'Hermite dont D_n est le discriminant, son résultat énonce qu'une fonction continue périodique de période 2π est ≥ 0 lorsque les coefficients a_n, b_n de sa série de Fourier sont tels que les formes $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ ne sont pas négatives.

Ces théorèmes sont en relation étroite avec le théorème de Picard-Landau. Ils appartiennent plutôt au domaine de la théorie des fonctions d'une variable complexe; c'est pourquoi nous n'insisterons pas ici sur les développements et les recherches qu'ils ont provoqués. Notons simplement qu'ils permettent de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de constantes soit la suite des constantes de Fourier d'une fonction mesurable bornée, d'une fonction bornée intégrable au sens de Riemann ou d'une fonction monotone².

§ 8. SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE ET SÉRIE CONJUGUÉE.

1. A toute série trigonométrique

$$A_0 + \sum_1^{\infty} A_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

¹ Toeplitz 1; voir aussi Fischer 3. — ² Caratheodory und Fejér; Caratheodory 3, 4.

correspond une série conjuguée

$$B_0 + \sum_1^{\infty} B_n = \frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

où b_0 est une constante arbitraire. Ces deux séries ne sont autre chose que la partie réelle et la partie imaginaire de la série de puissances

$$F(z) = \frac{a_0 - ib_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) z^n$$

sur la circonférence $z = e^{ix}$.

On sait depuis les travaux de PRINGSHEIM¹ et de FEJÉR qu'il existe des séries de puissances $F(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$, de rayon de convergence 1, telles que $f(x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{ix})$ soit continue sur tout le cercle de convergence $|z| = 1$ et pour lesquelles pourtant $\sum c_n e^{inx}$ a une infinité de points de divergence sur chaque arc de la circonférence de ce cercle. Il existe aussi des séries de puissances $F(z)$ pour lesquelles $f(x)$ est continue sur $|z| = 1$ et pour lesquelles cependant $\sum c_n e^{inx}$ converge, mais ne converge uniformément sur aucun arc de cette circonférence; de même il y en a qui convergent uniformément sur cette circonférence, mais non absolument².

Lorsque la série $F(z)$ réalise la transformation conforme du cercle $|z| < 1$ sur une aire simple du plan complexe, auquel cas $\sum_1^{\infty} n |a_n - ib_n|^2$ converge, l'étude de la convergence de $F(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ conduit à un résultat extrêmement simple dû à M. FEJÉR³: La série $\sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx}$ converge pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(z)$ a une limite radiale ($z = re^{ix}$, $r \rightarrow 1 - 0$). Et cela, uniformément sur tout ensemble sur lequel la limite est uniforme.

2. Si la série $\sum A_n$ est une série de Fourier, la série conjuguée

¹ Pringsheim, Fejér. — ² Neder 1, 2. — ³ Fejér 9; voir aussi Landau 2.

ΣB_n ne l'est pas nécessairement. Nous avons cependant déjà noté que si la génératrice de ΣA_n est de carré intégrable, ΣB_n est aussi la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable. Plus généralement, M. M. RIESZ¹ a fait voir que si ΣA_n est la série de Fourier d'une fonction f telle que $|f|^p$ ($p > 1$) est intégrable, ΣB_n est, elle aussi, la série de Fourier d'une fonction conjuguée g telle que $|g|^p$ est intégrable. Ce théorème résulte du fait que la fonction conjuguée

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cot \frac{t-x}{2} dt \quad (24)$$

existe presque partout lorsque $f(x)$ est intégrable, à condition de prendre comme valeur de l'intégrale la valeur principale de Cauchy² et du fait que si $|f|^p$ ($p > 1$) est intégrable, on a (en supposant pour simplifier que $a_0 = b_0 = 0$)

$$\int_0^{2\pi} |g|^p dx \leq M_p \int_0^{2\pi} |f|^p dx$$

M_p ne dépendant que de p .

Si la fonction $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n$ est continue et satisfait uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre α

$$|f(x+h) - f(x)| < k |h|^\alpha, \quad k > 0, \quad \alpha > 0$$

la série conjuguée ΣB_n est aussi une fonction continue et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α si $\alpha \neq 1$, et d'ordre $1 - \varepsilon$ (ε positif arbitrairement petit) si $\alpha = 1$ ³.

Si la fonction $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n$ est à variation bornée, la série conjuguée ΣB_n converge en tout point où la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale (24)

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{t}{2} dt$$

existe, donc presque partout⁴.

¹ M. Riesz 8. — ² Plessner. — ³ Fatou 1; Privaloff 3. — ⁴ Young 4.

W. H. YOUNG a donné des critères généraux de convergence de la série conjuguée, analogues à ceux donnés au § 3¹.

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx}$ est partout convergente et converge vers zéro dans un intervalle arbitrairement petit, on a $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ². Ce résultat a été généralisé par M. F. RIESZ³.

M. PRIVALOFF⁴ a énoncé quelques théorèmes sur les séries conjuguées: Si f^2 est intégrable et si la série de Fourier $\sum A_n$ de f converge sur un ensemble \mathcal{M} de mesure positive, la série conjuguée $\sum B_n$ converge presque partout sur \mathcal{M} . Si une série trigonométrique $\sum A_n$ converge sur un ensemble \mathcal{M} de mesure positive, pour que la série conjuguée $\sum B_n$ converge presque partout sur \mathcal{M} il faut et il suffit qu'elle soit sommable par une certaine moyenne de Cesàro ou par le procédé de Riemann presque partout sur \mathcal{M} .

3. M. FEJÉR⁵ a étudié la relation qui existe entre les singularités de Lebesgue et de Du Bois-Reymond de deux séries trigonométriques conjuguées. Il a montré que si $\sum A_n$ est uniformément convergente dans $(0, 2\pi)$ la différence des sommes partielles $s_n(x)$ et $s_n^{(1)}(x)$ relatives à la série conjuguée $\sum B_n$ converge vers zéro et que par conséquent $\sum B_n$ converge au sens ordinaire du mot en tous les points où elle converge (C, 1) — donc presque partout — et qu'elle converge uniformément sur tout ensemble où elle converge uniformément (C, 1). Il a montré encore que si la série $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et si la fonction $F(z)$ est continue pour $|z| \leq 1$, de la convergence uniforme de $\sum A_n$ résulte celle de $\sum B_n$ et réciproquement. Si $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et est continue pour $|z| \leq 1$, si de plus $\sum A_n$ converge partout, cette série présente nécessairement la singularité de Lebesgue là où $\sum B_n$ présente celle de Du Bois-Reymond.

§ 9. L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMETRIQUE.

1. Un double problème se pose: I. Sachant qu'une série trigonométrique $\sum A_n$ converge vers zéro sur un ensemble E de

¹ W. H. Young 24. — ² Fatou 1. — ³ F. und M. Riesz. — ⁴ Privaloff 1. — ⁵ Fejér 6, 14; voir aussi W. H. Young 4.