Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Elem. Geometrie vom höheren Standpunkte aus; Seminar. — WOLFER: Einl. in die Astronomie; Bahnbestimmungen im Sonnensystem.

Zurich; *Ecole Polytechnique Fédérale*, section normale. — HIRSCH: Höh. Mathem. mit Uebgr. — FRANEL: Mathem. sup. avec exercices. — GROSSMANN: Darstellende Geometrie mit Uebgn. Nicht euklidische Geometrie. — KOLLROS: Géométrie descript. avec exercices. — PÓLYA: Einführg. in die Analysis reeller Grössen; Funktionentheorie; Seminar. — MEISSNER: Mechanik; Ausgew. Kapitel. — PLANCHEREL: Vektor Analysis; Equations diff.; Seminar. — WEYL: Analyt. Geom.; Algebra u. Zahlentheorie; Philosophie der Mathem.; Seminar. — BAESCHLIN: Vermessungskunde; Ausgleichungsrechnung. — WOLFER: Einl. in die Astronomie; Bahnbestimmung. — AMBERG: Didaktik des mathem. Unterrichts. — MARCHAND: Versicherungsmathematik.

Cours libres. — BEYEL: Rechenschieber; Darst. Geom.; Analyt. Geom. des Raumes. — HÜCKEL: Prinzipien der Mechanik. — KIENAST: Endliche Gruppen.

BIBLIOGRAPHIE

Henri VILLAT. — **Mémorial des Sciences mathématiques.** — Fascicules d'environ 56 p., gr. in-8°, publiés à partir de janvier 1925. Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Ces fascicules publiés sous la direction de M. H. Villat et dus à des mathématiciens expérimentés ne tarderont sans doute pas à former une belle encyclopédie. Leur but est la mise au point, facilement accessible, de sujets généralement très homogènes, mais dont jusqu'ici le développement n'allait pas sans quelque dispersion dans les publications périodiques. Chaque fascicule contiendra une solide bibliographie.

Près de cent titres sont annoncés par l'éditeur. Mentionnons ceux des œuvres à publier à bref délai, la première venant d'ailleurs de paraître: P. APPELL, Sur une forme générale des équations de la dynamique; P. APPELL, Séries hypergéométriques de plusieurs valables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques de l'hyperespace; A. BUHL, Séries analytiques et sommabilité; P. LÉVY, Analyse fonctionnelle; M. D'OCAGNE, Esquisse d'ensemble de la Nomographie; G. VALIRON, Fonctions entières et fonctions méromorphes; A. VÉRONNET, Figures d'équilibre et Cosmogonie; E. GOURSAT, Le Problème de Bäcklund.

L'Enseignement Mathématique se fera un devoir et un plaisir d'analyser ces intéressants cahiers au fur et à mesure de leur publication. Nous commençons, dans ce numéro, par le premier, dû à M. P. Appell. Tous nos vœux accompagnent la naissance de cette collection, qui promet d'être aussi bienvenue que brillante.

P. Appell. — **Sur une forme générale des équations de la Dynamique.** — Un fascicule de IV-52 pages, gr. in-8°. Prix: 10 francs. Gauthier-Villars et C^ie^, Paris, 1925.

Tel est le premier fascicule du « Mémorial » annoncé d'autre part. Le savant auteur y réexpose, d'une manière complète et avec bien des adjonctions modernes dues à différents disciples, la théorie d'équations dynamiques créées par lui et d'ailleurs communément appelées de ce fait « équations de M. Appell ». La théorie vise les systèmes *non holonomes*, c'est-à-dire ceux où des liaisons s'expriment par des relations differentielles *non intégrables* entre coordonnées. De tels systèmes ne sont pas exceptionnels; tels sont tous ceux où des surfaces (qui peuvent se réduire à des courbes) roulent sur des surfaces.

Le cerceau est l'un des plus simples. Un premier point, bien frappant, est que la non holonomie paraît plus ou moins marquée, suivant le choix des coordonnées; l'*ordre* du système, c'est-à-dire le nombre des paramètres auxquels les équations de Lagrange ne s'appliquent pas, est variable avec ce choix. Il y a toutefois un ordre minimum pour un système donné.

Les équations de M. Appell exigent la formation d'une *énergie d'accélérations* qui tient alors lieu de l'*énergie de vitesses* suffisante pour former les équations de Lagrange. Les nombreux cas mixtes où ces dernières équations s'appliquent à de certains paramètres montrent nettement, quand ceux-ci deviennent de moins en moins nombreux, combien les nouvelles équations s'imposent en constituant une extension logique des méthodes lagrangiennes. On a même tourné les difficultés de non holonomie de manière lagrangienne en tentant de compléter ou de corriger les équations de Lagrange. D'importants résultats ont été obtenus en ce sens, mais leur analyse se trouve très simplement et très naturellement d'accord avec les propriétés générales des équations de M. Appell dont, d'ailleurs, des raisons analytiques profondes confirment la forme. De même que les équations de Lagrange ou les équations canoniques peuvent avoir leur origine dans le calcul des variations, dans le principe d'Hamilton, il existe un « Principe de la moindre contrainte», dû à Gauss, auquel correspondent directement les équations ici étudiées.

La Physique mathématique semble pouvoir tirer grand parti de ces conceptions.

La roue de Barlow est analogue au cerceau. Maxwell, en électrodynamique a tenté de se servir d'une modification des équations de Lagrange, que M. Guillaume, de Berne, cherche à rattacher aux équations de M. Appell.

Il semble même possible d'apercevoir ces équations comme jouant un rôle de trait d'union entre les mécaniques lagrangienne et einsteinienne. Le parallélisme de M. Levi-Civita est une variation vectorielle infinitésimale non intégrable, en général, ce qui fait qu'une direction ne se conserve pas lorsqu'on la transporte le long d'un contour fermé. Alors M. E. Cartan dit que « l'espace » n'est pas holonome; c'est, très exactement, le point de vue précédent sous des espèces à peine différentes. A cette non holonomie de l'espace on peut faire correspondre la gravifique d'Einstein.

On voit quelle moisson d'idées offre le premier fascicule du « Mémorial ». Ce dernier ne pouvait naître sous de meilleurs auspices.

A. Buhl (Toulouse).

G. VALIRON. — **Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable.** (Mémorial des Sciences mathématiques, Fascicule II.) — 1 vol. gr. in-8° de 60 pages. Prix: 10 fr. — Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Après le premier fascicule dû à M. P. Appell, le Mémorial continue à être inauguré non seulement de façon brillante mais dans un esprit qui est tout particulièrement celui défini par M. Villat. Les aperçus sont immenses et ici à peu près désemcombrés de démonstrations plus ou moins pointilleuses; j'imagine que l'ouvrage de M. Valiron, pourrait être d'un prix inestimable pour le néophyte bien doué qui le prendrait pour guide en s'efforçant de rétablir toutes ces démonstrations sous-entendues; dans les cas les plus difficiles il se reporterait aux Mémoires originaux cités avec précision et abondance. Pour le savant, le fascicule remet promptement en mémoire une foule de résultats dispersés et le but du « Mémorial » est pleinement atteint.

Une condensation, tant soit peu explicative, de ce qui est déjà si bien condensé n'apparaît pas très aisée. On sait que la théorie a son origine dans un théorème publié, en 1879, par M. E. Picard, sur deux valeurs exceptionnelles qu'une fonction uniforme ne peut prendre dans le voisinage d'un point essentiel, théorème repris par MM. Borel et Hadamard. La notion de *genre* d'une fonction entière, due à Laguerre, fut fécondée par Poincaré, la décomposition en facteurs illustrée par Weierstrass et l'on reconnut bientôt que les propriétés générales de l'uniformité se manifestaient de manière particulièrement simple en la fonction entière.

Puis c'est la prodigieuse floraison. C'est, par exemple, le module $M(r)$ d'une analyticité parfois très différente de celle de $f(z)$; on étudie cependant d'abord la croissance exponentielle. C'est le théorème de Landau, rajeuni et approfondi par A. Bloch, sur un nombre $R(c_0, c_1)$ qui décide d'un cercle de non holomorphie ou de l'absence de valeurs exceptionnelles pour une fonction définie par une série entière. Hurwitz précise, Schottky généralise encore et des domaines circulaires nous passons aux domaines sectoriels. Viennent alors deux notions d'une importance capitale: celle de *famille normale* de fonctions due à M. Montel et celle de *chemins de détermination* ou *d'indétermination*, plus ancienne peut-être mais récemment très travaillée par M. Julia. La notion d'*ordre*, due à M. Borel, permet de rassembler facilement beaucoup de propriétés des fonctions entières et méromorphes, au moins quand l'ordre est fini. Ce sont d'abord les questions de dénombrement de zéros (Jensen, Nevanlinna), la théorie de J. Hadamard sur la décomposition de Weierstrass, tout ceci étant intimément lié à la notion de genre, puis les travaux de Wiman, Lindelöf, Phragmen, etc. où réapparaissent les aires sectorielles et les chemins de détermination, poursuivant le plus souvent le point à l'infini avec des procédés d'une rare originalité et relevant plus encore du talent particulier à tel ou tel auteur que de méthodes absolument fixées.

Avec le théorème de M. Borel et l'ordre infini on voit, de mieux en mieux, l'utilité de la notion générale d'ordre; l'ordre infini éclaire les cas d'ordre fini. Le fascicule se termine avec quelques pages sur les fonctions inverses des fonctions entières ou méromorphes.

La bibliographie, naturellement riche, est faite avec beaucoup de discernement. Est-il besoin d'ajouter que les travaux de M. Valiron lui-même forment comme une charpente fondamentale ? Nul n'a oublié les *Lectures on the Theory of integral Functions* analysées récemment ici-même; nous retrouvons maintenant le sympathique auteur avec plus de faits encore et moins de démonstrations mais, précisément à cause de cela et comme nous le disions plus haut, bien dans la note du « Mémorial ».

A. Buhl (Toulouse).

P. Appell. — **Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace.** (Mémorial des Sciences mathématiques, Fascicule III). — 1 vol. gr. in-8° de 76 pages. Prix 10 fr. — Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Le premier fascicule du « Mémorial » ayant déjà été rédigé par M. P. Appell, personne ne s'étonnera qu'il en soit encore de même pour le troisième; à ce rapprochement la collection créée par M. Villat ne peut que gagner en autorité. Ici M. Appell nous livre des aperçus qui furent d'abord pour lui une œuvre de jeunesse, l'œuvre en question s'étant toutefois développée depuis près d'un demi-siècle avec l'apport de plusieurs disciples et devant même, avec la collaboration de M. Kampé de Fériet, aboutir à la prochaine publication d'un volume étendu. Le présent résumé a d'ailleurs eu un précédent en l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, ce précédent étant toutefois de rédaction notablement différente.

M. Appell définit tout de suite quatre fonctions F_i, par des séries entières à deux variables, x et y, séries qui ont une analogie immédiate avec celles correspondant au cas d'une seule variable. Ces fonctions F_i sont aussi exprimables par des intégrales doubles, de structure algébrique fort simple, qui conservent un sens hors des domaines de convergence des séries précédentes. Il y a, de même, à l'aide de la fonction gamma, des représentations des F_i par intégrales simples à variable complexe. Enfin, de même que la fonction hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation différentielle linéaire, les F_i satisfont à des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre pour lesquelles, avec quelques précautions analytiques, on peut définir des intégrales générales constructibles à partir des F_i considérées comme solutions particulières. Il y a aussi des équations *adjointes* de même type que les précédentes; le tout est abondant mais de classification fort élégante et fournit notamment l'occasion de construire de nombreuses équations identiques à leur adjointe. Nous passons ensuite à des considérations moins élémentaires mais encore plus captivantes. Les équations aux dérivées partielles vérifiées par les F_i n'ont pas, en général, des intégrales uniformes; on peut, avec M. Picard, inverser des quotients de telles intégrales et rechercher les conditions d'uniformité de ces fonctions inverses. On reconnaît l'extension d'un problème de Riemann-Fuchs et l'on arrive ainsi à des fonctions hyperfuchsiennes. La *réduction* des fonctions hypergéométriques en x, y consiste essentiellement à poser $y = f(x)$ dans les équations aux dérivées partielles précédentes d'où des équations différentielles ordinaires dites *réduites* pour certaines formes de $f(x)$; ces dernières équations ont des formes remarquables et sont ainsi intégrées hypergéométriquement. D'autre part, il y a des fonctions hypergéométriques de n variables, d'autres qui dégénèrent du côté des fonctions de Bessel, de plus des intégrales définies généralisent celles mentionnées au début, d'où les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Tel est ce qu'il y a d'absolument essentiel dans la première partie du fascicule. La seconde partie, bien que plus particulière au premier aspect, n'est pas moins intéressante. Il s'agit du cas où des fonctions hypergéométriques se réduisent tout simplement à des polynomes et nous avons ainsi une riche moisson d'équations aux dérivées partielles vérifiables par des polynomes à deux variables. Ces polynomes ont des propriétés d'une élégance remarquable tant différentielles qu'intégrales. Ainsi ils peuvent être en relation, par dérivations partielles, avec des polynomes générateurs encore plus simples; ils donnent des relations intégrales d'orthogonalité et étendent la théorie de Legendre; les polynomes sphériques généralisés, dépendent, à la fois, des considérations précédentes et de la théorie du potentiel dans l'hyperespace. Insister davantage ne pourrait donner ici une meilleure idée de ces harmonies qui occupaient déjà beaucoup Charles Hermite. Nous n'hésitons, pas plus que l'éminent auteur du fascicule, à rappeler à la jeune génération ce nom illustre, évoquant tant de science profonde et si supérieurement élégante; M. Appell nous montre admirablement, par ses propres créations, que la fécondité des méthodes hermitiennes reste intacte et peut inspirer encore bien des recherches auxquelles le troisième cahier du Mémorial servira d'introduction tout particulièrement aisée.

A. Buhl (Toulouse).

Maurice d'Ocagne. — **Esquisse d'ensemble de la nomographie.** (Mémorial des Sciences mathématiques, Fascicule IV). — 1 vol. gr. in-8° de 68 pages. Prix: 10 fr. — Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Que ne connaît, au moins de réputation, les théories nomographiques générales de M. d'Ocagne ? Nous en avons déjà parlé assez longuement dans *L'Enseignement Mathématique* (t. XX, 1918, pp. 30 et 151). Le «Mémorial» fournit, à l'éminent géomètre, l'occasion d'un nouvel exposé particulièrement bref et assimilable.

Qu'à des équations plus ou moins quelconques on puisse faire correspondre des courbes ou des intersections de courbes, par les procédés ordinaires de la géométrie analytique, c'est là une banalité mais une banalité fort peu pratique en général et ce n'est pas du tout la nomographie. Un *abaque* tant soit peu utilisable ne saurait être un réseau plus ou moins inextricable de courbes quelconques. Il doit être constitué par des lignes simples, des droites, des cercles, des points et c'est tout un art que de disposer de tels éléments pour la résolution des problèmes les plus quelconques algébriques ou transcendants. Un des aperçus les plus captivants est précisément, après avoir tiré tout le possible des intersections de droites, de simplifier encore les choses par le procédé dualistique qui donne les nomogrammes à points alignés.

Avec les équations à trois variables commencent les procédés de *disjonction* conduisant aux abaques en damier de Lalanne déjà susceptibles d'être *anamorphosés*.

La notion de genre d'un nomogramme à points alignés correspond au nombre d'échelles non rectilignes qu'il comporte; on sent ici la classification fondamentale avec la réduction au minimum pour le nombre en question. Il y a des nomogrammes à double alignement avec lieu de points doubles formant une charnière assimilable à une ligne de terre d'épure descriptive; ils correspondent à des équations se construisant fort élégamment à l'aide de déterminants. D'ailleurs l'élégance analytique des exposés montre toujours qu'il y avait là une symétrie arithmético-géométrique à exploiter; la nomographie est née, comme tant d'autres branches des mathématiques, de symétries associables en un corps de doctrine qui avait d'autant plus de droits à l'existence que la pratique y trouvait amplement son compte. Les nomogrammes à index parallèles ou en équerre, de même que ceux à index circulaire, appuient élégamment ces assertions. Et si nous avons vu tout à l'heure la nomographie se combiner avec la géométrie descriptive nous la voyons se combiner avec la cinématique par glissement et pivotement des abaques les uns sur les autres. N'y a-t-il point là de quoi éveiller une vive curiosité chez ceux qui ne connaissent encore que sur ouï-dire la science des Clark, Goedseels, Lalanne, Lallemand, Lecornu, Mehmke, Soreau, science si bien représentée aujourd'hui par M. Maurice d'Ocagne qui vient, en peu de pages, de nous en rappeler les traits les plus esthétiques.

A Buhl (Toulouse).

Emile Borel. — **Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications,** publié avec la collaboration de L. Blaringhem, G.-V.-L. Charlier, R. Deltheil, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Traynard. Tome I, fascicule I : *Principes et formules classiques du Calcul des Probabilités.* Tome II, fascicule III : *Mécanique statistique classique.* Volumes gr. in-8° de 150 et 160 p. Prix de chaque fascicule: 20 francs; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

C'est véritablement d'un grand Traité (dont un fascicule dû à M. H. Galbrun a déjà été analysé ici-même) que M. E. Borel entreprend la publication; ceux de Bertrand et de Poincaré, malgré tout leur intérêt n'avaient point l'ampleur de celui de Laplace, tandis que la nouvelle œuvre pourra vraisemblablement prétendre à cette ampleur et, naturellement, à des visées plus modernes. De nombreux collaborateurs, dont plusieurs sont des techniciens avisés, apporteront au livre les plus utiles compléments.

Commençons par analyser brièvement les fascicules ci-dessus annoncés, tous deux dus à M. Borel lui-même. L'un a été rédigé par M. René Lagrange, l'autre par M. Francis Perrin.

Tome I, fasc. I. — C'est une banalité que de faire commencer le Calcul des Probabilités avec l'Analyse combinatoire. Reste à combattre le banal par l'intérêt des exemples choisis. C'est ce qui se produit ici avec le problème du scrutin où le candidat élu possède la majorité non seulement à la fin du dépouillement, mais dans tout le cours de celui-ci. Henri Poincaré n'a point dédaigné cette question créée par D. André. Citons encore les problèmes de la foule et des rencontres, le dernier facile à appuyer sur la notion d'espérance mathématique. Un des points où M. Borel a tout le mérite d'un créateur, c'est l'introduction, entre les probabilités continues et discontinues, des probabilités *dénombrables.* Celles-ci rattachent le Calcul des probabilités aux séries, tout comme les probabilités discontinues le rattachaient aux combinaisons et les probabilités continues aux intégrations à champs géométriques. Une autre originalité consiste à situer d'une manière précise les *problèmes du deuxième ordre*; ce sont surtout ceux, tels les problèmes généraux d'écart, où il faut faire appel à l'approximation donnée par des intégrales définies, les formules combinatoires cessant d'être maniables. Une théorie de la *corrélation* méritait d'être explicitée; elle introduit la valeur moyenne d'une fonction de deux phénomènes plus ou moins dépendants et renseigne sur cette dépendance quand la valeur moyenne en question est empiriquement connue.

Les probabilités continues s'adressent aux géomètres proprement dits ainsi qu'aux analystes experts en intégrales multiples. La probabilité du segment inférieur à e, facile à obtenir dans le cercle ou la sphère mais difficile et beaucoup plus compliquée pour un espace polygonal ou polyédral suffit à attirer l'attention sur des problèmes toujours simples à poser.

Le jeu de pile ou face équivaut à l'étude de la numération binaire ou encore à celle d'un quadrillage sur lequel une partie quelconque s'inscrirait par le tracé d'une ligne brisée. Ainsi bien des résultats deviennent graphiquement intuitifs. Signalons, en passant, le cas, encore peu recommandable, du joueur ayant assez de force de caractère pour savoir se retirer du jeu au premier gain. Les questions de statistique conduisent aux *courbes à escalier* et aux intégrales définies du *problème des moments*. L'objet fondamental est la représentation approximative, par escaliers, de fonctions continues croissantes; nous retrouvons là des raisonnements nés avec les préoccupations modernes concernant les fonctions de variables réelles. Comme quoi le Calcul des Probabilités, qui tient de si près à la pratique courante, ne se trouve pas loin non plus des plus délicates et subtiles analyses concernant la continuité.

Tome II, *fasc. III*. — Nous voici maintenant en contact avec la réalité physique et d'une manière qui, de nouveau, ne peut susciter qu'une admiration sans réserves. La théorie donne l'impression de ces « moules mathématiques » dont parle M. Emile Picard dans ses *Mélanges de Mathématiques et de Physique* (pp. 192, 315) récemment analysés ici-même. Ce n'est pas tant la Physique qui a exigé des constructions plus ou moins diverses ou adéquates auxquelles se seraient pliées les théories probabilitaires; celles-ci continuent à s'offrir avec leurs traits généraux (par exemple avec l'invariant intégral de l'extension en phase, attaché immédiatement aux équations hamiltoniennes) et c'est dans ce moule analytique, jouant un rôle primordial, que s'insèrent les théories cinétiques maxwelliennes tout comme les théories électromagnétiques et électroptiques, dues également au génie de Maxwell, s'insèrent, par exemple, dans des formules stokiennes et des intégrales multiples identiques, au fond, à celle envisagées ici. Les images que bien des physiciens jugent trop audacieuses, ou même contraires au bon sens, se présentent ici de la manière la plus naturelle.

Tels sont la représentation de l'agitation moléculaire dans l'hyperespace, le choc entre molécules interprété comme une réflexion sur une hypersurface, la répartition moléculaire la plus probable, laquelle donne lieu à une très élégante théorie hypersphérique.

Un point extrêmement intéressant, tant par l'élégance de l'analyse que par les aperçus physiques suggérés, est constitué par la combinaison de la loi de répartition de Maxwell avec un mouvement d'ensemble de la masse gazeuse, ce mouvement pouvant être au moins une translation ou une rotation uniforme. La question du libre parcours moyen de la molécule ramène à l'emploi de la transcendante $\theta(x)$ ainsi physiquement introduite dans le Calcul des Probabilités.

De même la théorie des erreurs permet d'aborder simplement la diffusion d'un gaz en lui-même, problème qui, d'autre part, dépend d'une équation aux dérivées partielles identique à celle formée par Fourier quant à la propagation de la chaleur dans un corps homogène. Au delà, les choses se compliquent du fait de l'incertitude affectant la notion de libre parcours, mais non sans une intéressante intervention de la formule de Bayes relative à la probabilité des causes.

Parmi des compléments divers signalons l'influence d'un champ de gravitation, le cas de molécules non sphériques et de très petites impulsions, qui ne semblent pas s'accorder avec les postulats de la Mécanique ordinaire et appeler la Théorie des Quanta, la molécule où *quelque chose* vibre pour produire un rayonnement; il n'est pas indispensable de se représenter ce quelque chose pour parvenir à des équations linéaires et à des développements trigonométriques.

Nous terminons avec le Principe d'évolution ou Principe de Carnot. La Théorie cinétique s'y montre plus puissante que l'ancienne Thermodynamique; elle permet de généraliser l'entropie et ici, comme en tout ce qui précède, se montre *relativiste* en ce sens que, tantôt macroscopique, tantôt microscopique, ses résultats peuvent avoir des aspects différents pour l'observateur grossier et l'observateur subtil. En ces captivantes questions l'insaisissable et parfois si décevante notion de vérité est remplacée, de manière particulièrement heureuse, par celle d'une harmonie que personne, semble-t-il, ne pourra sérieusement contester. Il y a sans doute une forte probabilité pour que ce soit l'Analyse mathématique qui donne les meilleures représentations des phénomènes universels.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Lévy. — **Calcul des Probabilités.** Un vol. gr. in-8° de VIII-350 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925.

Les ouvrages sur le Calcul des Probabilités naissent, à l'heure actuelle, avec une étonnante rapidité. Ceux de M. E. Borel et d'éminents collaborateurs ne sont pas encore complètement publiés qu'en voici un autre, livrant des enseignements déjà faits au Collège de France et à l'Ecole Polytechnique et d'une manière telle qu'il conquiert hautement le droit de s'imposer, en toute première ligne, à l'attention des géomètres, des psychologues et de tous les théoriciens du Hasard.

Il contient une Première partie de 133 pages qui est presque entièrement dépourvues de formules. Laplace, Bertrand, Poincaré..., ont commencé ainsi, mais ici M. Paul Lévy apporte tant de nombreuses et intéressantes remarques que le plaisir de les lire ne paraîtra certainement point défloré par quelque lecture plus ancienne. De plus, c'est avec intention que j'ai écrit le mot « psychologue ». Devant des faits qui ont des probabilités égales pour différents observateurs, lesquels conviennent d'ailleurs de cette égalité théorique, l'auteur nous fait souvent assister à des différences de jugement qu'on ne peut attribuer qu'à des différences psychologiques entre ces observateurs. Le Calcul des probabilités apparaît alors comme un mode de jugement qu'on peut concevoir, au moins idéalement, comme indépendant des psychologies personnelles. Ceci n'est pas magnifier peu le dit calcul mais Laplace promettait déjà quelque chose en ce sens et le moins qu'on puisse dire est que M. Paul Lévy a continué la grande tradition avec une rare finesse d'esprit.

Passons à la partie mathématique proprement dite. On sait le grand progrès introduit par M. E. Borel avec la notion de « probabilité dénombrable ». Ce progrès est maintenant poursuivi. Tout ce qui dissèque la continuité, les ensembles et leur mesure, les intégrales de Stieltjes et de Lebesgue, les fonctions mesurables, sommables, etc. tout cela, dis-je, est repris d'une façon sommaire, généralement très intuitive et colle, tout au long, avec les formules et les raisonnements d'un Calcul des probabilités convenablement étendu.

Viennent aussi du côté de la loi de Gauss, de la fonction caractéristique attachée à la courbe en cloche, des généralisations qui, à l'étonnement de l'auteur lui-même, font retomber sur des résultats obtenus par Cauchy et oubliés depuis. C'est qu'il y a des courbes en cloche plus simples que celle de Gauss, par exemple $y(1+x^2)=1$.

La « Composition des lois de Probabilité » part très simplement de la notion de variable éventuelle toujours assimilable au gain d'un joueur. Elle conduit aux compositions, de coefficients et de fonctions caractéristiques, non moins simples et à une première conclusion de *stabilité* concernant la loi de Gauss. La loi de Cauchy est également stable. Lois composantes et loi résultante sont liées par d'intuitifs théorèmes de continuité.

Les « Lois de probabilité variables, la notion de loi réduite » développent considérablement l'ancienne idée d'après laquelle une erreur, somme d'un grand nombre d'erreurs partielles indépendantes, obéit à une loi qui tend vers celle de Gauss. Une loi dépendant d'un paramètre peut tendre vers une loi limite quand ce paramètre tend vers une limite; ceci conduit à des fonctions caractéristiques tendant vers des fonctions limites et comme, en général, la limite d'expressions variables est plus simple que ces expressions ou que, du moins, il y a avantage à ce qu'il en soit ainsi dans beaucoup de questions pratiques, les lois variables avec limite conduisent naturellement aux lois de probabilité réduites.

Avec la « Loi des grands nombres » nous étudions toujours des transformations possibles de la loi de Gauss mais, comme on peut s'en douter, ces transformations n'apparaissent point d'abord comme arbitraires; elles sont dans un « domaine d'attraction » de la loi de Gauss. Bien plus un espace fonctionnel, avec ses points qui représentent des fonctions ou des lois, peut intervenir d'une manière prodigieusement intéressante; cet espace admet la loi de Gauss pour origine. De telles considérations donnent à la théorie une structure analytique que d'autres auteurs moins bien outillés déclaraient trop complexe, cette structure devenant ici maniable et intuitive.

Il y a, tout de même, des « Lois exceptionnelles » n'appartenant pas au domaine d'attraction de la loi de Gauss. Elles ont leurs domaines d'attraction particuliers ce qui n'empêche pas qu'il existe une composition de lois appartenant à différents domaines d'attraction.

Mais, avec la « Théorie des erreurs », la loi de Gauss reprend toute son importance; à son exposant quadratique s'attache la fameuse méthode des moindres carrés.

Enfin dans la « Théorie cinétique des gaz » l'exponentielle de Gauss reparaît encore dans la loi de Maxwell. Le Calcul des probabilités vient ici compléter merveilleusement la mécanique rationnelle; il démontre notamment l'équipartition de l'énergie et conduit, c'est le cas de le dire, à considérer la réalité moléculaire comme extrêmement probable.

Ce bel ouvrage se termine par une Note sur « Les Lois de probabilité dans les ensembles abstraits ».

Si le calcul des probabilités se joue élégamment du dénombrable et du continu, peut-il s'étendre, au moins en tant qu'abstraction théorique, comme la théorie des ensembles elle-même, avec les ensembles plus puissants que le continu ?

N'essayons point de répondre, pour M. Paul Lévy, à cette question aussi passionnante que difficile. Renvoyons à son livre, si fin, si disert, si original malgré toute la modestie qui lui a fait fouiller l'œuvre des prédécesseurs pour tenter de rendre à chacun ce qui lui était dû. On y verra comment les théories les plus en vogue peuvent prendre, tout à coup, du fait d'un auteur habile, un remarquable cachet synthétique qui semble leur imprimer des couleurs spéciales, séduisantes et nouvelles.

A. BUHL (Toulouse).

Stanislas MILLOT. — **Théorie nouvelle de la Probabilité des Causes.** — Une brochure gr. in-8°, VI-36 pages. Prix 5 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925.

Le Calcul des Probabilités est décidément à la mode. Dans la délicate question de la probabilité des causes, M. St. Millot ne quitte pas le point de vue de Laplace mais il en déduit une théorie surtout géométrique en introduisant la notion de *zone de probabilité*. D'où d'intéressantes figures et l'application de méthodes nomographiques de M. M. d'Ocagne.

Outre les questions assez habituelles concernant la masculinité ou la féminité dans les naissances, l'auteur examine des cas biologiques plus originaux, comme celui d'une réaction tentée à l'Institut Pasteur d'Alger sur des malades suppurants ou non. La recherche du degré de certitude pour que la réaction corresponde effectivement à un état spécial revient, en effet, à un calcul graphique très simple.

Les fondements de la brochure sont constitués par quatre Notes présentées aux *Comptes rendus* en 1922-23. On ne peut que souhaiter à l'auteur de développer encore davantage ses méthodes de tracé.

A. BUHL (Toulouse).

G. BOULIGAND. — **Précis de Mécanique rationnelle** à l'usage des élèves des Facultés des Sciences. — Tome I, avec un choix de problèmes proposés à la licence et à l'agrégation et rédigés par M. J. Dollon. Un vol. gr. in-8° de VIII-282 pages. Prix 25 fr. Vuibert, Paris, 1925.

Ceci paraît être le premier ouvrage de quelque étendue, concernant la Mécanique rationnelle, qui soit dû à un jeune élève de M. P. Appell. Logiquement, un tel livre devait apparaître tôt ou tard, mais combien l'excellence et le caractère grandiose de l'œuvre du Maître semblait devoir entacher d'inutilité toute nouvelle tentative dirigée dans le même sens. Or, ce qui justifie ici cette nouvelle tentative, c'est précisément le triomphe des idées jadis mises au premier plan par M. Appell, c'est-à-dire de cette mécanique analytique qui autrefois rejetée à la fin des traités, puis heureusement mêlée à ceux-ci, arrive maintenant en première ligne, l'idéalisme mathématique s'étant révélé sinon supérieur (la question est toujours controversée), du moins beaucoup plus intéressant que l'empirisme phénoménal.

Il a fallu aussi mettre de plus en plus nettement en place les théories mécaniques par rapport à leurs principes et, dans cet ordre d'idées, la netteté de M. Bouligand — je ne crois pas exagérer — me semble parfaite. Si, par exemple, il s'agit de la cinématique galiléenne — et l'on peut faire beaucoup d'excellente science en ne considérant que celle-là — nous sommes simplement priés de ne pas oublier qu'elle repose sur la notion du temps absolu et, comme la géométrie euclidienne, sur une conception idéale du solide.

L'esprit de classification analytique porte également, dès la cinématique, sur les mouvements à relations différentielles tantôt intégrables, tantôt non intégrables. Quelque grand que soit le rôle de la non holonomie en dynamique, la chose n'en a pas moins une origine cinématique. Un chapitre également fort original rassemble la géométrie des masses et la cinétique; les mv, les mv^2 ne se somment pas autrement que les m ou les mx et, dès que l'on a défini l'ellipsoïde d'inertie, le mouvement à la Poinsot est également définissable.

Quant aux principes dynamiques proprement dits, le plus important est, sans contredit, le « Principe de Relativité ». Il impose, comme système de référence fondamental, soit l'espace défini par les étoiles réputées fixes, soit celui qui s'en déduit par translation rectiligne et uniforme.

C'est l'idée d'attraction newtonienne qui mène à l'idée générale de *force* et la symétrie qu'on peut donner aux équations du problème des n corps conduit au principe d'égalité de l'action et de la réaction, tout comme au principe de proportionnalité $F = m\gamma$.

De plus, une combinaison linéaire des équations relatives aux n corps exprime la non-accélération du G du système; c'est le principe de relativité. Tout ceci est d'ailleurs conforme tant à l'ordre historique qu'à l'affirmation moderne explicite qui, de toute mécanique, fait une gravifique.

Quel regret de ne pas pouvoir, faute de place, disserter élégamment avec M. Bouligand sur l'égalité de la masse inerte (celle de $F = m\gamma$) et de la masse pesante (celle de $P = mg$); le génial Einstein a tiré de là bien des conséquences. Un chapitre aussi bien commencé se continue naturellement en passant des *principes* aux *théorèmes* et aux *équations* universelles de la dynamique.

Il me faut maintenant être de plus en plus bref. La dynamique analytique, essentiellement lagrangienne, est plus particulièrement rattachée aux principes « d'économie ». M. Bouligand la fait dépendre du calcul des variations, suivant la méthode bien connue. Quant aux ds^2 de la force vive, ils engendrent des $g_{ji}\, dq_i\, dq_j$, c'est-à-dire des espaces riemanniens où s'interprètent toujours élégamment des phénomènes qui ne cessent cependant point de se dérouler dans l'espace ordinaire. Encore une chose qui est indiquée depuis longtemps dans le Traité de M. Appell (T. II, 2^{me} éd., 1904, p. 431); elle remonte à Riemann et à Beltrami, mais avait un avenir dépassant sans doute les espérances des créateurs.

La théorie des systèmes « équivalents » est alors comparable à celle des surfaces applicables et les questions de stabilité selon Lejeune-Dirichlet empruntent au continu riemannien une physionomie particulièrement intuitive. Le principe de la moindre action ramène tout problème à fonction de forces et à liaisons holonomes indépendantes du temps à un problème de géodésiques riemaniennes.

Les chocs et percussions sont étudiés par des méthodes lagrangiennes du premier degré par rapport aux vitesses ce qui fait « un théorème à ne jamais employer » d'un énoncé quadratique dû à Carnot. Beaucoup d'exemples, puis un chapitre très documenté sur les problèmes sans frottement. Larges emplois de la notion d'équivalence et des représentations spatiales les plus quelconques. On se demande, après cela, s'il se trouvera encore des gens pour ne pas apercevoir les correspondances toutes naturelles qui peuvent s'établir entre les hyperespaces euclidiens ou non et les systèmes les plus immédiatement tangibles. En tout cas, la question est tranchée par les savants et le bel ouvrage de M. Bouligand y contribue beaucoup.

Le dernier chapitre, consacré à des compléments de dynamique analytique, s'inspire surtout, quant aux auteurs les plus modernes, des travaux de MM. Hadamard et Cartan. Ce sont d'abord les invariants intégraux, les équations canoniques et particulièrement les transformations canoniques qui jouent un si grand rôle dans les travaux de Poincaré. Mais le plus remarquable est l'intervention de l'Analysis Situs. Puisqu'aux systèmes mécaniques correspondent tout naturellement des variétés figuratrices, dont la géométrie correspond à la dynamique des systèmes en question, la topologie de ces variétés doit évidemment être de première importance et permettre de classer les équations différentielles d'origine dynamique tout comme les surfaces de Riemann, par exemple, permettent la classification des fonctions ou intégrales algébriques. Il n'y a, là encore, aucune raison générale pour que les variétés figuratrices soient euclidiennes; ce qui domine est plutôt la notion de groupe et il est fort naturel de voir cette notion apporter en mécanique un ordre analogue à celui déjà apporté en géométrie.

On voit combien est profonde l'œuvre de M. Bouligand. Elle n'en a pas moins une grande portée pratique, ainsi qu'en témoignent les très nombreux exercices illustrant le volume et comme ceux-ci ont été rédigés par un élève, brillant sans doute, mais enfin par un élève, il est à présumer que l'auteur trouvera aisément bien d'autres disciples. A. Buhl (Toulouse).

A. Chatelet. — **Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers.** — 1 vol. gr. in-8° de IV-244 pages; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Il s'agit ici d'une étude abstraite malaisée à peindre rapidement. Contentons-nous de dire que les déterminants et leurs symétries qui donnent par exemple, le Calcul tensoriel, la Composition et les Fonctions permutables de MM. Volterra et Pérès, donnent également des harmonies d'importance aussi grande dans le domaine algébrico-arithmétique. Ces harmonies sont même de plus vaste envergure, les déterminants pouvant s'étendre en tableaux et en matrices, et d'origine plus ancienne puisque ce sont notamment les substitutions linéaires et les propriétés des formes quadratiques qui imposèrent des notions de groupe en lesquelles on rechercha ensuite des propriétés structurales indépendantes de tout algorithme algébrique particulier. De plus l'adjectif *abélien* nous invite à remonter jusqu'aux travaux d'Abel, ce qui n'est pas une minime recommandation.

L'impossibilité d'analyser l'œuvre d'une manière continue laisse au moins la liberté d'y signaler, de ci de là, des choses frappantes, bien faites pour éveiller la curiosité. Tel est le transport, aux matrices, des termes du langage arithmétique le plus élémentaire. Il y a des *diviseurs* et des *multiples* tantôt *à droite*, tantôt *à gauche* et l'on comprend que cette arithmétique de position correspond à des opérations matricielles qui ne sont pas toujours permutables. Il y a des *espaces*, des *polyèdroïdes*, créés par la nécessité de localiser des points *entiers* et le seul fait de chercher à mettre les matrices sous des formes canoniques simples tient lieu de problèmes de réduction résolus surtout par Hermite avec un appareil qui n'avait pas toute la pureté schématique de celui employé ici.

L'algèbre des groupes abéliens est un curieux symbolisme à éléments monomes; ces groupes sont particulièrement élégants lorsqu'ils deviennent *cycliques*. Leurs *automorphismes* admettent des produits, à produits matriciels correspondants, pour lesquels il y a associativité mais non forcément commutativité. Ces automorphismes forment des *corps* ayant une droite et une gauche. La comparaison des groupes abéliens à celui formé par les racines de l'unité conduit à la notion des *caractères*. Il y a aussi des groupes *composés*, nés d'éléments appartenant à plusieurs groupes, de même qu'on imagine aisément des tableaux assemblages de plusieurs tableaux primitifs.

Restons sur ces symétries et propriétés qui semblent, plus que d'autres, pouvoir engendrer les notions spatiales à partir du Nombre; rappelons seulement que leur étude a rassemblé les noms les plus illustres, tels ceux de Abel, Gauss, Kronecker, Dedekind, Galois, Frobenius, Hermite, Jordan, Laguerre, Netto, Stieltjes, Weber, Weierstrass.... M. Albert Châtelet a heureusement condensé ces travaux délicats où l'on domine maintenant, à peu près sans calculs, les théories algébriques les plus générales.

A. Buhl (Toulouse).

Th. De Donder. — **La Gravifique de Weyl-Eddington-Einstein.** — Une brochure de 48 pages; prix: 8 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1924.

Il s'agit ici de ce qu'on a déjà nommé « la nouvelle Gravifique ». La première s'appuyait sur la courbure scalaire de l'espace-temps; la seconde a voulu s'affranchir de cette hypothèse géométrique et remplacer les symboles de Christoffel par des expressions, à trois indices, d'abord indéterminées. La tentative analytique était des plus intéressantes mais il semble bien qu'au point de vue physique elle ne se soit pas révélée aussi féconde qu'on pouvait l'espérer. Ceci n'est pas sans tourner à l'avantage de la véritable théorie einsteinienne, de celle d'Einstein lui-même. Là où ce dernier semblait ne pas introduire toute la généralité possible, il introduisait ce qui pouvait avoir une signification physique et cela valait certainement mieux encore. D'ailleurs Albert Einstein doit être un homme d'un heureux caractère; loin de montrer quelque humeur des transformations, sans doute trop hâtives, que l'on tentait de faire subir à sa théorie, il entreprit leur étude de bonne grâce et c'est cette étude que M. Th. De Donder nous présente par une méthode variationnelle analogue à celle déjà employée dans *La Gravifique einsteinienne* de l'éminent géomètre et physicien belge. La conclusion est bien que le résultat entrevu ne paraît point avoir de grande valeur *physique*. Est-ce-à-dire toutefois qu'il est inutile ? Il n'en est rien; outre qu'il a fait approfondir l'étude de l'espace-temps, il a aussi attiré l'attention de côté des *identités* de la Gravifique, identités dont celle de Bianchi peut donner une idée particulière. Ce rôle des identités, en Physique mathématique, là où on n'a guère considéré jusqu'ici que des équations, est parmi les révélations les plus curieuses dues aux nouvelles théories. Sur de tels points les contacts avec la théorie des groupes sont particulièrement importants. Et voilà, tout de même, un important sujet de réflexions peut-être pas très facile à cultiver, s'il faut, pour cela, revenir aux *Sitzungsberichte* de Berlin, mais que le lumineux exposé de M. De Donder a précisément mis à la portée de tous les géomètres.

A. Buhl (Toulouse).

Tullio LEVI-CIVITA. — **Lezioni di Calcolo differenziale assoluto** raccolte e compilate dal Dott. Enrico Persico. — 1 vol. in-8° de 314 p. ; prix : 60 lires. Alberto Stock, Rome, 1925.

On sait que le Calcul différentiel absolu constitue une charpente particulièrement aisée à construire et particulièrement apte à supporter le magnifique édifice des théories einsteiniennes. On le trouve chez Laue, Eddington, Wright, Carmichael, Struik, Marcolongo, Kopff, Juvet, Galbrun, Marais et tant d'autres. Pour Schouten il est le *Ricci-Kalkul.* En fait, il semble surtout devoir ses origines à MM. Ricci et Levi-Civita et il faut se féliciter de ce que ce dernier et célèbre géomètre ait songé à nous en donner une vue d'ensemble.

Les débuts analytiques du Calcul sont essentiellement symétriques; ils reposent sur les propriétés des déterminants fonctionnels et des matrices. Comme la théorie des groupes, ils exigent des notions sur les équations aux différentielles totales, les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles, les méthodes d'intégration de Morera et de Mayer.

Mais l'originalité la plus élégante apparaît avec les fondements algébriques du nouveau Calcul.

Des changements de variables, en un point M de l'espace, ne peuvent évidemment altérer une quantité scalaire telle, par exemple, que la température de M; il y a *invariance.* Il en est de même pour un travail élémentaire mais celui-ci s'exprime à l'aide de composantes vectorielles pour lesquelles il y a *covariance.* Pour les transformations linéaires, l'opposition des formules

$$x_i = c_{ik} x'_k \,, \qquad x'_i = c^{ki} x_k$$

introduit la *contrevariance. Les tenseurs* sont des expressions aussi générales que possible qui peuvent être m fois covariantes et n fois contrevariantes.

Les formes différentielles quadratiques, dont le rôle est fondamental dans la théorie des surfaces, offrent les premiers exemples de propriétés tensorielles; leurs coefficients sont covariants et ont des associés contrevariants qu'on rencontre notamment dans l'évaluation de l'angle de deux directions; de là peuvent naître une foule de tenseurs à significations diverses. Le plus grand intérêt provient du complément apporté à la géométrie intrinsèque de Gauss, sur une surface ou une variété quelconque, par la notion de *déplacement parallèle généralisé* entièrement mise en évidence par M. Levi-Civita. Cette notion, qui correspond analytiquement à la dérivation covariante, est aussi susceptible de définitions purement géométriques; le parallélisme sur une développable se reconnaît au parallélisme ordinaire obtenu par développement de la surface; on peut raisonner de même sur une surface S quelconque à l'aide d'une *courbe de transport* T, tracée sur S, et de la développable circonscrite à S le long de T. Sur une variété quelconque il existe toujours des courbes à tangentes *autoparallèles :* ce sont les *géodésiques.*

La dérivation covariante peut d'abord s'exposer en insistant presque uniquement sur les analogies qu'elle offre avec la dérivation partielle ordinaire; elle conduit notamment à des divergences généralisées d'où naissent les *paramètres différentiels* attachés aux variétés les plus générales. Les propriétés cartésiennes ou *localement géodésiques* peuvent être conservées en géométrie tensorielle précisément en vertu de l'indépendance qu'un tenseur manifeste, par définition, vis-à-vis des changements de coordonnées. Et ceci est d'une importance capitale pour l'établissement par voie préliminaire euclidienne d'une foule de résultats non euclidiens.

Les *symboles de Riemann* traduisent, à la fois, la non permutabilité des dérivées tensorielles successives et le concept de *courbure* pour variétés à ds^2 quelconque. Ces symboles sont riches en propriétés symétriques; c'est ici que se place, entre autres, la célèbre *identité de Bianchi* susceptible de deux formes différentes et également remarquables. Notons aussi que la courbure d'une variété s'y révèle intrinsèquement dans le transport, par parallélisme généralisé, d'un vecteur suivant un circuit fermé; ceci est d'ailleurs l'occasion de signaler une intéressante formule due à M. J. Pérès, ainsi que les recherches de MM. Schouten et Bompiani d'après lesquelles la courbure s'attache à un cycle comme rapport entre la variation de directions due au parcours cyclique et l'aire du cycle.

Une même variété géométrique peut donner lieu à des métriques distinctes, comme, par exemple, la surface de la Terre suivant qu'on l'étudie sur la Terre même ou sur une carte. Il y a alors des relations remarquables entre les symboles de Christoffel et de Riemann d'où de nouveaux aperçus qui trouvent surtout leur application avec les variétés à courbure constante.

N'oublions pas de mentionner qu'une des idées essentielles utilisées par M. Levi-Civita est d'étudier une variété V_n en la considérant comme plongée dans un espace euclidien à N dimensions, avec $N > n$, mais aussi petit que possible. Alors $N - n$ est la *classe* de V_n. Si la classe est nulle nous sommes partout en géométrie euclidienne et tous les symboles de Riemann sont nuls. Si la classe est égale à *un* nous sommes sinon dans le cas le plus simple du moins dans le premier qui ait véritablement une originalité. On peut alors facilement tenter, pour la V_n, des représentations sphériques de la courbure, ou rechercher si elle n'est pas applicable sur une variété à courbure constante, etc. Enfin la théorie apporte de l'ordre dans celle des congruences, dans celle des rotations de Ricci, elle suggère des *dérivées d'arcs* à propriétés analogues à celles des opérateurs X représentant les transformations infinitésimales des groupes... Quels horizons non-euclidiens et polydimensionnels n'ouvre-t-elle pas à l'œil du géomètre ? Isolée de toute préoccupation physique, elle fait encore mieux ressortir la valeur de l'algorithme einsteinien qui n'a plus, pour ainsi dire, à se démontrer lui-même, mais simplement à s'appuyer sur un monument d'admirable esthétique et de merveilleuse clarté.

A. BUHL (Toulouse).

A. SPEISER. — **Klassische Stücke der Mathematik.** — 1 vol. in-8° de 168 pages avec 16 figures, broché 9 fr.—; relié toile, 12 fr.; Art. Institut Orell Füssli, Zürich.

Ce livre est en quelque sorte une anthologie dans le genre de ces collections de morceaux choisis, destinés aux amateurs de musique, et simplifiés parfois au point de vue technique par un virtuose. Le désir de voir surgir, dans le domaine des mathématiques aussi, une collection de ce genre était bien justifié, et il faut savoir gré à M. Speiser d'avoir réalisé ce projet d'une manière si brillante. Il s'est efforcé de mettre en lumière l'objet même des mathématiques et leurs liens avec les autres branches de la science. Il remarque dans sa Préface que le but et la portée des mathématiques sont parfois mal compris, même dans les cercles scientifiques, bien que tout homme cultivé ait suivi des cours de mathématiques pendant au moins douze ans de sa vie.

Les savants dont les écrits ont fourni à M. Speiser les morceaux qui constituent cette collection viennent de toutes les parties de l'Europe. Nous trouvons Archytas, Platon, Aristote — le maître des savants —, Euclide, Archimède, Dante — qu'il rapproche d'une manière fort ingénieuse de Riemann —, Léonard de Vinci, Képler, Gœthe, Descartes, Pascal, les Bernoulli, le père Saccheri, même Jean-Jacques, Euler, Einstein, Sylvester et Hjelmslev, tandis que Le Tintoret apporte sa collaboration par le tableau reproduit en tête du volume.

Nous tenons à féliciter aussi la Maison d'édition Orell Füssli pour tout le soin qu'elle a apporté à l'impression de ce bel ouvrage qui se présente sous une forme à la fois originale et élégante.

Grace Chisholm Young (Lausanne).

Félix Klein. — **Gesammelte mathematische Abhandlungen,** Dritter Bd., herausgegeben von R. Fricke, H. Vermeil et E. Bessel-Hagen (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen): Elliptische Funktionen, insbes. Modulfunktionen, Hyperelliptische u. Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie u. Automorphe Funktionen; Anhang, verschiedene Verzeichnisse. — 1 vol. in-8°, X-774-36 p. avec 138 figures; 30 M.; Verlag Julius Springer, Berlin.

Le dernier et le plus intéressant des trois volumes des œuvres de Félix Klein contient les mémoires sur la Théorie des Fonctions qui constituent, selon l'auteur, le couronnement de ses recherches théoriques. La lumière presque éblouissante, projetée par ses œuvres, est due en grande partie au don caractéristique de l'auteur, don que nous avons déjà mentionné (*Enseignement Mathématique*, tome XXII, p. 392), de coordonner les différentes parties de l'édifice mathématique. Avec une virtuosité admirable, Klein emploie tour à tour les méthodes de l'algèbre, de la géométrie, de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions analytiques.

S'il fallait choisir les plus intéressants parmi ces mémoires, les recherches sur les fonctions automorphes, y compris les fonctions modulaires, l'emporteraient probablement. Rassemblés en un volume commode et bien imprimé, mis au point par des annotations et parsemés de souvenirs autobiographiques ils offrent un excellent moyen d'acquérir une idée générale de ces fonctions et de leur place dans l'ensemble. Une grande part de l'intérêt qu'ils susciteront aujourd'hui sera concentrée sur la distinction précise entre les rôles de la France et de l'Allemagne dans la découverte de ces fonctions. Cet exposé historique se trouve dans la correspondance échangée entre Klein et Poincaré aux pages 587-622 avec un article sur la préhistoire du sujet, ajouté par Klein.

Les premières Notes de Poincaré sur ce qu'il nomma les *fonctions fuchsiennes* parurent au printemps 1881. Malheureusement il n'était pas versé dans la littérature étrangère du sujet; quoiqu'il lût facilement l'allemand, il n'était pas au courant de l'œuvre fondamentale de Riemann et de Schwarz et des recherches déjà publiées par Klein.

Dans une lettre du 15 juin 1881, Poincaré écrit: « Je vous rendrai justice à cet égard quand je publierai mes résultats; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des *Mathematische Annalen* qui n'existent pas à la bibliothèque Universitaire de Caen » (p. 590). Et en date du 22 juin: « Aussitôt après l'avoir reçue, j'ai couru à la Bibliothèque pour y demander le 70e volume de Borchardt; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le mémoire de M. Schwarz (p. 593).

Ce serait rendre hommage de la manière la plus efficace à la mémoire de celui qui fut reconnu plus tard comme le mathématicien le plus distingué de son temps, que d'améliorer ses conditions défectueuses, dont lui aussi avait souffert, dans les universités provinciales de France.

Dans ce même ordre d'idées il faut en revanche compter parmi les mérites de Klein d'avoir, suivant les meilleures traditions allemandes, insisté d'emblée auprès de ses élèves sur la nécessité d'un examen consciencieux de la littérature, préalable à l'impression de leurs propres recherches. C'est pour atteindre à cette culture générale, qu'il a créé l'admirable salle de lecture de Goettingue. Il possédait lui-même une mémoire extraordinaire pour les citations, ce qui, joint à sa capacité phénoménale de se saisir d'une idée, nous rendait autrefois ses conseils très précieux. Il n'a jamais émis un jugement plus juste qu'en écrivant à Poincaré (p. 610): « Für mich ist die lebendige Verbindung mit gleichstrebenden Mathematikern immer die Vorbedingung zur eigenen mathematischen Produktion gewesen », et ce qui augmente la valeur de ses annotations personnelles c'est qu'il se souvient des sources de ses travaux et qu'il nous le confie.

Rendu attentif aux lacunes que présentaient, au point de vue de l'histoire, ses Notes sur les fonctions fuchsiennes, Poincaré a du reste noblement reconnu sa dette envers Klein, et, en dépit des protestations de celui-ci, a doté du nom de *fonctions kleiniennes* les autres fonctions uniformes, plus générales, que Klein a bien nommées les *fonctions automorphes*. Ce sont en effet les fonctions, uniformes ou non, qui se reproduisent quand on fait subir aux variables indépendantes un groupe approprié de substitutions linéaires.

La correspondance qui s'ensuivit nous montre ces deux chercheurs enthousiasmés de leur sujet, rivalisant d'efforts pour trouver des théorèmes fondamentaux et pourtant admirant sincèrement leurs œuvres réciproques. Je citerai les phrases suivantes de Poincaré:

Juin 15, 1881. « Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Je n'en suis nullement étonné, car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non-euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe » (pp. 589-90).

Juillet 5, 1881. « Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient comme cas particulier « alle meine Existenzbeweise ». Mais il arrive après (p. 600).

Janvier 1882. « J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressant » (p. 606).

Et de Klein:

« Ich sehe, dass Sie nun wirklich zu einem Beweise gekommen sind (8. August) « que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intégre par des fonctions zétafuchsiennes » und « que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire. « Indem ich Ihnen dazu gratuliere, dass Sie so weit gekommen sind, möchte ich Ihnen einen Vorschlag machen, der Ihnen und meinen Interessen auf gleiche Weise gerecht wird » (p. 602). Cette proposition fut que Poincaré écrirait un article pour les *Mathematishe Annalen*, ce qu'il a fait en effet. Malheureusement l'état de santé de Klein mit bientôt fin à ce tournoi mathématique.

Un sujet qui intéressera plus d'un lecteur du tome III est l'attitude de Klein vis-à-vis de Riemann. Quoique Klein n'ait jamais vu Riemann, nous la comparons volontiers à celle de Platon vis-à-vis de Socrate. Maint philologue prétend que le Socrate de Platon n'est pas historique, et le même philologue pourrait croire que le Riemann de Klein n'est pas non plus historique. Pour ma part, je m'exprimerais autrement. Ce que Platon nous raconte de Socrate, c'est ce qu'il a cru voir dans son maître, et, pour le voir, il a fallu le « grand front » de Platon. Ce que Klein nous raconte de Riemann, c'est ce qu'il a cru voir du maître dans ces écrits, et, j'oserais dire, que c'est l'intuition qui a fait voir à Klein des points de vue de Riemann que nul des disciples de ce dernier n'avait soupçonnés. On n'a qu'à regarder le portrait de Riemann pour voir combien il était modeste. Je crois volontiers qu'il avait beaucoup d'idées latentes dont il n'avait lui-même pas conscience.

Il faut lire ce que Klein nous raconte à la page 479 au sujet de sa brochure « Algebraische Funktionen und ihre Integrale » (1882), où il prétendait révéler la vraie pensée de Riemann qui serait à la base de sa conception de la théorie des fonctions, une base essentiellement concrète et physique de ces notions abstraites et métaphysiques. Comme les valeurs réelles d'une fonction algébrique se représentaient couramment par les points d'une courbe, Riemann avait introduit ses surfaces planes avec leur pluralité de feuillets superposés qui n'adhèrent qu'en leurs points de ramification, pour faire la répartition des valeurs complexes d'une fonction algébrique $f(x + iy)$. Klein prétendait que c'était en considérant des phénomènes physiques que Riemann est parvenu à cette conception, et que la surface primitive de Riemann n'était pas aussi abstraite et compliquée, mais était tout naturellement une surface courbe appropriée dans l'espace, tel le tore.

Sur une telle surface les phénomènes du mouvement stable d'un fluide, de la chaleur ou de l'électricité, se représente mathématiquement par une fonction, le potentiel, qui satisfait à l'équation différentielle fondamentale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

de la théorie des fonctions complexes $f\ (x + iy)$. D'une manière fort saisissante Klein développe cette idée dans sa brochure, et montre que de ce point de vue la plupart des théorèmes de la théorie des fonctions deviennent intuitifs. D'après Klein, Riemann n'aurait introduit les surfaces qui portent son nom qu'ultérieurement pour élucider son exposition arithmétisée. A ce propos Klein avait cité comme source de sa pensée une phrase de Prym, élève de Riemann, « que les surfaces de Riemann n'étaient pas nécessairement dans leurs origines des surfaces à plusieurs feuillets superposés au plan. On pourrait étudier les fonctions complexes de position sur n'importe quelle surface courbe aussi bien que sur les surfaces planes. »

Mais Klein a reconnu qu'il avait mal traduit la pensée de Prym. Celui-ci niait formellement (8 avril 1882) qu'il aurait pu vouloir dire que Riemann lui-même eût conçu l'idée de répartir les valeurs d'une fonction complexe sur une surface courbe comme le fait Klein dans sa brochure.

Les remarques qui précèdent immédiatement le passage que nous venons de rappeler me semblent intéresser particulièrement les lecteurs de cette Revue. Elles sont une réponse au reproche qu'on a pu faire à Klein: celui de manquer de rigueur mathématique dans les considérations qui lui servent de base dans sa brochure, comme aussi, du reste, dans d'autres parties de ses écrits. Klein défend ici le principe des méthodes intuitives dont il a fait usage.

« Je cherche, dit-il, «à parvenir par des réflexions de nature physique à une réelle compréhension des idées fondamentales de la théorie riemannienne. Je voudrais que des procédés semblables deviennent fréquents, car le genre usuel des publications mathématiques refoule habituellement au second plan la question importante de la façon dont on est conduit à la construction de certains problèmes ou de certaines déductions. J'estime que c'est à tort que la majorité des mathématiciens passent entièrement sous silence leurs réflexions intuitives pour ne publier que des démonstrations (certes nécessaires) d'une forme rigoureuse et le plus souvent arithmétisée. Ils semblent retenus par une certaine crainte de ne pas paraître assez scientifiques à leurs collègues. Ou bien la cause est-elle, dans d'autres cas, le désir de ne pas révéler à leurs concurrents la source de leurs propres réflexions?» Il dit encore: « C'est en physicien que j'ai rédigé ma note sur Riemann, aussi ai-je rencontré l'approbation de plusieurs physiciens. »

GRACE CHISHOLM YOUNG (Lausanne).

HURWITZ-COURANT. — **Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen** von A. HURWITZ, herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über *Geometrische Funktionentheorie* von R. COURANT (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band III, zweite Auflage). — 1 vol. gr. in-8°, VI et 496 p., avec 128 fig.; broché, M. 23,40; Julius Springer, Berlin, 1925.

Dans cette deuxième édition de l'excellent ouvrage de Hurwitz-Courant les remarquables cours de Hurwitz sur la théorie des fonctions et sur les fonctions elliptiques ont été reproduits sans modification notable. Seuls quelques paragraphes nouveaux ont été introduits sur la fonction gamma et la série de Lagrange. En revanche la troisième section du livre, consacrée à la théorie géométrique des fonctions au point de vue de Riemann et due à la plume de M. Courant, a été entièrement remaniée. L'étude de la plupart des questions traitées a pris dans cette deuxième édition une ampleur beaucoup plus grande, des développements nouveaux ayant trait aux problèmes les plus captivants, — ceux de Dirichlet, de Riemann et de l'uniformisation des fonctions analytiques, ont été ajoutés, — le champ s'est donc considérablement élargi. L'auteur a cherché à donner une idée des recherches les plus récentes, et nous croyons que l'exposé nouveau résume fidèlement les aspects divers des grands problèmes posés par Riemann et Dirichlet dont la pensée a reçu dans ces dernières années des prolongements si inattendus.

Le lecteur fera un rapprochement entre les exposés, de tendances si différentes, de Hurwitz et de M. Courant, c'est-à-dire entre le point de vue arithmétique de Weierstrass et ceux de Cauchy-Riemann.

D. MIRIMANOFF (Genève).

E. Kamke. — **Das Lebesguesche Integral** (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, t. 23). — 1 vol. gr. in-8°, IV et 151 p., cartonné, 6 Goldmark; B.-G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1925.

Ce petit volume est une excellente introduction à la théorie moderne des fonctions réelles. Son but principal est de mettre à la portée des étudiants les notions si fécondes de la théorie de la mesure et de celle de l'intégrale de Lebesgue. L'auteur débute par un exposé très clair des principes des théories cantoriennes, en s'arrêtant surtout sur la notion de mesure. Il passe ensuite à l'intégrale de Lebesgue, dont il donne, dans le cas de fonctions bornées, la définition même de M. Lebesgue. Mais dans le cas de fonctions non bornées, il préfère se servir de la méthode très simple de M. Perron développée par MM. Bauer, Hake et P. Alexandroff. Des indications bibliographiques intéressantes sont données à la fin du volume et dans le texte de l'ouvrage. D. Mirimanoff (Genève).

G. Pólya und G. Szegö. — **Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis** (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XIX et XX). — *Erster Band:* Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie, 354 p.; broché, 15 Goldmark; cartonné, 16,50 Goldmark. — *Zweiter Band:* Funktionentheorie. Nullstellen. Polynome. Determinanten. Zahlen theorie, 417 p.; broché, 18 Goldmark; cartonné, 19.50 Goldmark. 2 vol. in-8°, J. Springer, Berlin, 1925.

Ce remarquable recueil que MM. Pólya et Szegö viennent de publier dans la Collection des « Grundlehren der mathematischen Wissenschaften » diffère des ouvrages similaires connus et par le choix des sujets traités et par le groupement des problèmes. Si des théories déjà constituées, comme celle des fonctions analytiques, y occupent une place importante, une foule de problèmes, et des plus suggestifs, sont empruntés à des domaines à peine explorés, à des théories en formation ou en pleine évolution; quelques-uns sont tirés des publications récentes ou résument des recherches personnelles inédites des auteurs. Les sujets abordés sortent donc souvent des cadres de l'enseignement classique, mais l'étudiant, constamment guidé par les auteurs, arrive à pénétrer dans les domaines nouveaux par la voie la plus rapide et, je crois, la plus sûre. Les propositions qu'il trouve dans ce recueil ne sont pas simplement apprises, il se les assimile en les démontrant. Au commencement de chaque chapitre, du reste, les notions et les propriétés nécessaires sont rappelées ou indiquées rapidement.

Ce qui distingue encore et surtout le recueil de MM. Pólya et Szezö, c'est, je l'ai déjà dit, un groupement original des problèmes. Rares sont les questions qui peuvent ou doivent être abordées isolément. Le plus souvent elles se présentent en groupes ou en séries tendant vers un but commun. Les unes sont destinées à faire connaître une méthode particulière; d'autres n'aboutissent à quelque proposition générale, parfois importante et même nouvelle, qu'après une suite de travaux d'approche; dans d'autres encore on se borne à l'étude d'un théorème important qu'on aborde par des côtés nouveaux; parfois une propriété générale est fournie par la considération des deux cas extrêmes, méthode que les auteurs comparent au tracé d'une ligne droite par deux points donnés.

Et si, malgré les indications des auteurs et ce groupement ingénieux des problèmes, l'étudiant n'arrive pas à vaincre des difficultés encore trop grandes pour lui, il trouvera dans la seconde partie du volume la solution cherchée rapidement indiquée.

On voit quels services cet ouvrage est appelé à rendre aux étudiants. En les initiant graduellement aux méthodes mathématiques, par un entraînement rationnel, ce recueil leur facilitera singulièrement l'accès des domaines les plus beaux que les programmes classiques laissent ordinairement de côté.

L'ouvrage de MM. Pólya et Szegö est divisé en sections; le premier volume en comprend trois consacrées aux théories fondamentales de l'analyse: séries, calcul intégral, théorie des fonctions analytiques; le second volume en comprend six d'un caractère plus spécial que je recommande particulièrement aux étudiants avancés. Ils y trouveront, par exemple, dans la section consacrée aux fonctions analytiques, la notion si importante d'ordre d'une fonction entière et une indication des méthodes pour étudier les relations entre l'ordre, l'exposant de convergence et le genre; ils y trouveront aussi la théorie de la représentation conforme, le fameux théorème de Koebe et une foule de résultats connexes. Dans les trois sections qui suivent ils seront conduits à faire l'étude des polynomes d'une forme particulière, des déterminants et des formes quadratiques; enfin dans les deux dernières sections ils rencontreront pour la première fois des problèmes relatifs à la théorie des nombres et la géométrie. Je les signale à l'attention des mathématiciens. C'est peut-être pour la première fois que des problèmes de ce genre (j'ai surtout en vue les problèmes arithmétiques) ont été systématiquement réunis. Faut-il insister sur l'importance de cette discipline que beaucoup de mathématiciens ignorent ?

Ce nouveau recueil a donc, on le voit, des mérites très grands. Œuvre originale, éminemment utile, elle ouvrira l'esprit de l'étudiant en l'initiant aux méthodes mathématiques et, mieux que beaucoup de traités classiques, e préparera à des recherches personnelles.

D. Mirimanoff (Genève).

Mémorial de l'Office national météorologique de France, n° 10. Table à 12 décimales de Log n! pour toutes les valeurs de n de 1 à 1000, par R. de Montessus de Ballore et F.-J. Duarte. Applications à l'étude des statistiques. — 1 vol. gr. in-4°, 33 p., Etienne Chiron, Paris, 1925.

Ce numéro du *Mémorial*, que je signale particulièrement à l'attention des lecteurs de l'*Enseignement mathématique*, contient une table de log n! avec 12 décimales, calculée par M. F.-J. Duarte pour toutes les valeurs de n allant de 1 à 1000. Les mathématiciens auront ainsi à leur disposition une table précieuse qui leur sera particulièrement utile dans les calculs de statistique. M. de Montessus de Ballore en montre l'importance dans un avertissement intéressant consacré à l'étude de quelques formules approchées utilisées par les statisticiens dont ces tables permettent d'apprécier la valeur. Comme M. de Montessus de Ballore le fait remarquer, les tables de M. Duarte donnent par soustraction les logarithmes avec 12 décimales des nombres 1, 2, ..., 1000. Dans ses calculs M. F.-J. Duarte a fait preuve d'une habileté et d'une patience rares.

D. Mirimanoff (Genève).

Index generalis. Annuaire général des Universités. Année 1924-1925. Publié sous la direction de R. de Montessus de Ballore. — 1 vol. in-16° de plus de 2000 pages; relié; Editions Spes, 17, rue Soufflot, Paris.

Cette nouvelle édition, consacrée à l'année 1924-1925, marque un progrès considérable sur les précédentes, grâce aux renseignements toujours plus nombreux qu'elle apporte. Elle se présente sous la forme d'un volume de plus de 2000 pages dont la première partie est consacrée aux universités et écoles supérieures du monde entier, avec l'indication des cours professés et des noms des professeurs. La seconde partie se rapporte aux observatoires, aux bibliothèques, aux grandes académies et aux sociétés savantes. L'ouvrage se termine par des tables très complètes, dont la Table alphabétique comprend près de 50.000 personnalités scientifiques et littéraires citées dans le volume.

Constamment mis à jour grâce à la collaboration des chefs de service des institutions mentionnées, l'Index Generalis a sa place marquée dans toutes les bibliothèques. H. F.

Riemann-Weber. — **Differentialgleichungen der Physik.** I, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Herausgegeben von R. M. v. Mises. — 1 vol. in-8° de 688 pages; 40 Mk.; Verlag Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Tous ceux qui se sont occupés des équations différentielles de la physique connaissent l'ouvrage classique de Riemann-Weber. Cette septième édition, publiée par les soins de MM. les Prof. Ph. Frank (Prague) et R. von Mises (Berlin), diffère entièrement des précédentes. En cherchant à mettre ce nouvel exposé en harmonie avec les progrès réalisés au cours des quinze dernières années, les auteurs ont été amenés à modifier entièrement le plan de l'ouvrage. Le premier volume comprend la partie mathématique, tandis que les problèmes qui relèvent plus particulièrement de la mécanique analytique et de la physique mathématique feront l'objet du second volume.

Ce premier volume a été publié sous la direction de M. v. Mises avec la collaboration de MM. Bieberbach (Berlin), Caratheodory (Munich), Courant (Gœttingue), Löwner (Berlin), Rademacher (Hambourg), Rothe (Berlin) et Szegö (Berlin), qui se sont chargés de la rédaction des différents chapitres. Il comprend les principes de l'analyse supérieure dont la connaissance est indispensable à ceux qui désirent approfondir les problèmes de la physique mathématique. Groupés en quatre grandes sections ces chapitres forment en quelque sorte de courtes monographies qui peuvent être consultées séparément suivant les applications que l'on a en vue.

La première partie traite des notions fondamentales d'algèbre supérieure et de la théorie des fonctions. M. Szegö expose d'abord les principes de la théorie des fonctions à variables réelles ainsi que la notion d'intégrale d'après Stieltjes et Lebesgue; puis viennent les formes linéaires et l'analyse vectorielle par M. v. Mises; les variables complexes, le théorème de Cauchy et ses conséquences, les fonctions elliptiques par M. Löwner; les séries et les produits infinis, par Szegö; le calcul des variations par Caratheodory.

La seconde partie est consacrée aux équations différentielles ordinaires dont les principaux problèmes sont exposés successivement par MM. Bierberbach, v. Mises et Szegö.

Les équations intégrales et la théorie du potentiel forment l'objet de la troisième partie, rédigée par M. v. Mises.

Enfin, dans la quatrième partie, viennent les principes fondamentaux de la théorie des équations aux dérivées partielles et les grands problèmes qui s'y rattachent, exposés par MM. Rademacher, Löwner, Szegö, Rothe et Courant.

Sous cette nouvelle forme le traité de Riemann-Weber continuera à rendre de grands services à la physique mathématique. H. F.

H. Schulze. — **Radio im Physikunterricht.** (Beiheft I der "Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften"). — 1 fasc. in-8° de 64 pages avec 69 figures; M. 1,80; Verlag Otto Salle, Berlin.

Cette brochure est la première d'une série de cahiers-annexes des « Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften ». Ces cahiers-annexes traiteront les sujets actuels de la recherche scientifique en vue de leur introduction progressive dans l'enseignement. C'est ainsi qu'on verra paraître successivement: la relativité dans l'enseignement, la théorie des quanta dans l'enseignement, une introduction à la géométrie, etc., etc.

Destiné spécialement à ceux qui enseignent la physique, le petit volume que nous avons sous les yeux contient surtout, à côté de brefs rappels théoriques, la description détaillée de la construction et de l'emploi de quelques dispositifs expérimentaux simples pour la démonstration des propriétés des ondes hertziennes. A ce titre, il est précieux pour faire un choix parmi les innombrables appareils de démonstration qui ont vu le jour au cours des deux dernières décades. Il contribuera certainement, pour le lecteur attentif, à amener quelques clartés nouvelles dans la compréhension d'un sujet très vaste, qui s'est développé par à-coups, et que beaucoup de maîtres de physique n'ont pas pu suivre pas à pas.

Voici un bref extrait de la table des matières: Introduction historique; ondes amorties; ondes entretenues; circuits oscillants; couplage des circuits; lampes à trois électrodes; leur construction; étude qualitative et quantitative des propriétés des lampes; leurs divers emplois.

E. Steinmann (Genève).

J. J. Schwatt. — **An introduction to the operations with series.** — 1 vol. in-8°, X et 287 pages. Press of the University of Pennsylvania. Philadelphia, 1924.

Cet ouvrage est une manière de *vade-mecum* pour le mathématicien qui a besoin de tel ou tel développement en série ou pour le professeur en quête d'exercices. L'auteur a employé systématiquement des procédés fondés sur les dérivées successives des fonctions de fonctions. Il a omis les critères de convergence qui se trouvent dans d'autres traités, pour ne se consacrer qu'à l'étude du calcul des termes du développement. Il y a dans les procédés de calcul proposés par l'auteur des choses que nous croyons nouvelles. Ajoutons que ce livre est fort bien édité, la typographie des formules innombrables — il y a bien dans ce livre 3000 équations — est impeccable.

G. Juvet (Neuchâtel).

Leonida Tonelli. — **Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.** Volume Secondo. — 1 vol. in-8°, VIII+660 p., 80 Lire, Nicola Zanichelli, Bologna, 1924.

Nous n'exposerons ici que le principe sur lequel repose la méthode nouvelle du calcul des variations, dite méthode directe, dont M. Tonelli a synthétisé dans son deuxième volume les principaux résultats. L'originalité du principe ne manquera pas d'engager les lecteurs de cette revue à pousser plus avant.

Disons qu'une fonction est semi-continue inférieurement, si sa valeur en un point est inférieure ou égale à la limite inférieure des valeurs qu'elle prend au voisinage de ce point. Une fonction semi-continue inférieurement peut fort bien n'être pas continue, mais une fonction définie et semi-continue inférieurement sur un intervalle fermé y atteint sa borne inférieure.

Appelons suite minimisante une suite de valeurs de la variable, telle que la limite inférieure des valeurs de la fonction sur cette suite soit égale à la limite inférieure de toutes les valeurs de cette fonction. Les points d'accumulation d'une telle suite fourniront des minima des valeurs de la fonction. Cela est à peu près évident. Donc la connaissance d'une suite minimisante permet de déterminer les minima d'une fonction semi-continue inférieurement.

Passons alors au calcul fonctionnel. L'argument, la variable, au lieu d'être un point sera une ligne. Le même principe s'appliquera à la recherche des minima des fonctions de ligne représentées par les intégrales dont le calcul des variations recherche les extrema.

La connaissance d'une suite minimisante pour une fonction de ligne semi-continue inférieurement permettra d'affirmer l'existence des extrêmales et de les déterminer pourvu toutefois que les lignes d'accumulation existent et qu'elles appartiennent au domaine envisagé.

L'objet principal du premier tome de M. Tonelli est l'étude des ensembles de courbes et de la continuité ou de la semi-continuité des fonctions de lignes, nous l'avons signalé dans notre première notice (T. 22, p. 234).

Dans ce second volume, l'auteur traite de l'application de cette nouvelle méthode aux problèmes classiques du calcul des variations.

L'auteur publiera probablement un troisième livre, où il traitera des applications du calcul des variations qui vont des mathématiques pures à l'économie politique. Une simple notice bibliographique ne suffit pas à montrer tout l'intérêt de l'œuvre de M. Tonelli. Rolin Wavre (Genève).

D.-E. Smith. — **History of Mathematics.** Vol. II: Special Topics of elementary Mathematics. — 1 vol. in-8° de 725 p.; 4 doll. 40; Ginn et Cie, Boston.

Le Tome I de l'Histoire des mathématiques du Prof. D.-E. Smith a déjà été signalé dans l'*Ens. math.* (23e année, p. 234). Ce second volume donne un aperçu historique du développement des principaux objets qui par leur ensemble constitue les mathématiques élémentaires. L'auteur expose successivement l'histoire de l'arithmétique, de la géométrie, de l'algèbre, de la trigonométrie, des poids et mesures et des premières notions du calcul différentiel et intégral. Il montre quelle a été la genèse des concepts mathématiques et leur développement chez les principaux peuples.

Ce qui augmente encore la valeur de l'Ouvrage, ce ne sont pas seulement les renseignements bibliographiques en notes au bas de chaque page, mais aussi les nombreuses figures et illustrations intercalées dans le texte. On trouvera par exemple d'intéressantes figures concernant les systèmes de numération et leurs symboles, les abaques, les poids et mesures utilisés autrefois dans les divers continents. Mentionnons aussi les fac-similés reproduisant telles pages ou figures caractéristiques d'ouvrages anciens.

D'une lecture attrayante et instructive, l'Histoire des mathématiques de M. Smith est appelée à rendre de grands services à l'enseignement des mathématiques élémentaires. H. F.

Proceedings of the first International Congress for Applied Mechanics, Delft, 1924. Edited by Prof. C. B. Biezeno and Prof. J. M. Burgers. — 1 vol. in-4° de XXII-460 p.; 18 Fl.; J. Waltman Jr., Delft.

Grâce à une collaboration très étroite entre la science pure et les recherches expérimentales, des progrès considérables ont été réalisés depuis le commencement du siècle dans le domaine de la Mécanique appliquée. Que l'on songe, par exemple, au développement qu'ont pris l'hydrodynamique et l'aérodynamique. On comprend dès lors qu'un congrès destiné à réunir les savants et les techniciens qui s'intéressent aux applications de la Mécanique devait avoir un grand succès. Le premier congrès a eu lieu à Delft en avril 1924; il sera suivi d'autres qui viendront alterner avec les congrès internationaux de mathématiques

Dans son précédent fascicule L'*Ens. mathém.* a déjà donné un compte rendu du Congrès de Delft avec la liste complète des conférences inscrites à l'ordre du jour des séances générales et des communications réparties sur les sections, au nombre de trois: I, Mécanique rationnelle; II, Théorie de l'élasticité; III, Hydrodynamique et Aérodynamique. Nous pouvons donc nous borner à signaler ici ce beau volume renfermant les travaux du congrès et ne comprenant pas moins de 354 figures, planches ou illustrations en phototypie. MM. Biezeno et Burgers ont apporté le plus grand soin à la publication des « Proceedings » qu'ils ont pu faire paraître déjà au printemps 1925, c'est-à-dire un an après le congrès. H. F.

R. Bricard. — **Lecons de Cinématique**. Tome I, Cinématique théorique. — 1 vol. in-8° de 337 p. avec 117 fig.; 45 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Ce traité de Cinématique reproduit, avec des développements assez considérables, le cours professé par M. Bricard à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. Il comprendra deux volumes. Le Tome I contient l'exposé des principes de Cinématique théorique utiles aux techniciens, tandis que le Tome II sera consacré aux mécanismes.

Dans ce premier volume l'auteur examine d'abord, sous le titre « Préliminaires géométriques » quelques théories géométriques complémentaires qui ne figurent pas au programme d'admission à l'Ecole Centrale: propriétés des courbes gauches, des surfaces réglées; éléments de la géométrie réglée (complexe et congruence linéaires). Dans le Chapitre I, il reprend la théorie cependant classique des vecteurs, mais pour la traiter par les méthodes, exposées à cette occasion, du calcul vectoriel, dont le livre contient des applications assez nombreuses. De remarquables traités tout récents témoignent d'un mouvement favorable à l'introduction dans l'enseignement de ce calcul, trop négligé en France jusqu'ici, et M. R. Bricard a voulu collaborer à une œuvre utile.

En Cinématique proprement dite, il a nettement séparé l'étude du déplacement fini, qui n'est qu'un chapitre de la Géométrie pure, de celle du mouvement, où intervient la notion de temps. Une grande importance est attachée à la théorie des mouvements relatifs, d'abord parce qu'on ne peut étudier que des mouvements relatifs (la conception métaphysique du mouvement absolu n'intéresse pas le mathématicien), ensuite par ce que les propriétés géométriques du mouvement sont toutes dominées par le théorème de la composition des vitesses. Le roulement, qui est aussi d'une importance fondamentale, fait l'objet d'un examen approfondi.

Trois Chapitres sont consacrés aux propriétés géométriques du mouvement plan et du mouvement dans l'espace, à un et plusieurs paramètres.

Dans la troisième partie sont étudiés, comme applications, des déplacements et des mouvements particuliers. L'auteur a cherché à varier autant que possible les exemples choisis.

P. Dupont. — **La Mécanique nouvelle** démontrée par les principes classiques. Interprétation et transformation des équations de Lorentz et d'Einstein. — 1 vol. in-8° de 143 p., Fr. 15.—; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris.

L'Auteur s'est proposé de résoudre le problème suivant qu'il imagine posé en 1850 à un candidat à un diplôme modeste:

« Chercher ce que deviendraient les équations de la cinématique des systèmes en mouvement uniforme par rapport à l'éther de Fresnel, en supposant que ce mouvement ait pour effet de contracter les longueurs dans une proportion $\eta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ parallèlement à la direction du mouvement et de ralentir tous les phénomènes et notamment la marche des horloges dans la proportion $\frac{1}{\eta}$? Indiquer quelle autre transformation subiraient les dites équations, si, au lieu d'horloges normales, on en employait d'autres, réglées à distance par signaux lumineux en appliquant comme écart à chacune la moitié du temps du trajet aller et retour du signal, à partir de l'horloge régulatrice ? »

Cela lui permet de trouver la transformation de Lorentz et une foule de théorèmes dont nous ne comprenons pas l'intérêt, car nous avons l'esprit déformé par une manière de comprendre la relativité qui diffère de celle de M. Dupont; la notion de groupe donne à la relativité une signification que les plus habiles dialectiques fondées sur ce que l'Auteur appelle « le bon sens vulgaire » ne sauraient obscurcir. Poincaré d'ailleurs a écrit que la notion de groupe préexiste dans notre esprit; le bon sens consiste donc à s'en servir. C'est pourquoi malgré les critiques très fondées que l'Auteur fait à certaine philosophie plaquée sur la relativité, nous ne pouvons pas le suivre dans les interprétations qu'il donne de ses calculs.

G. Juvet (Neuchâtel).

P. Constan. — **Cours d'astronomie et de navigation** (Nouvelle édition mise en harmonie avec les derniers programmes d'examens de la marine marchande). — 2 vol. grand in-8° se vendant séparément, avec nombreuses figures dans le texte. Tome I. *Astronomie*, 1 vol. de 318 p., avec 163 figures et 3 planches, 30 fr.; Tome II, *Navigation*, 1 vol. de 454 p., avec 220 figures et 2 planches. Gauthier-Villars et Cie.

Ce traité dont les 2 premiers volumes viennent d'être réédités, le troisième étant « en préparation », est consacré à l'exposé méthodique des connaissances théoriques qu'on exige aujourd'hui d'un capitaine de navire, dans le domaine de l'astronomie et de la navigation. C'est dire qu'il n'a pas pour objet toutes les parties de cette science et de cet art, mais les questions qu'il traite sont très nettement posées et les développements mathématiques ou physiques nécessaires à leur compréhension sont exposés avec concision, netteté et clarté.

On recommandera aussi cet ouvrage aux étudiants qui désirent se rendre compte de l'utilité d'une science qui passe généralement pour inutile. Les problèmes de la navigation auxquels se sont intéressés plus d'un mathématicien éminent lui donneront un grand nombre d'exemples, où les méthodes mathématiques ont pu obtenir les approximations exigées par la pratique.

Le livre de M. Constan est l'un de ceux qu'il faut avoir parcourus et même lus avec soin si l'on veut connaître vraiment l'une des plus utiles et souvent l'une des plus ingénieuses applications de l'astronomie.

G. Juvet (Neuchâtel).

E. Fabry. — **Nouveau Traité de Mathématiques générales**. Tome I: Algèbre, Géométrie analytique. Tome II: Analyse, Mécanique, Théorie des erreurs. (Quatrième édition entièrement refondue). — 2 vol. in-8, 385 et 276 p.; fr. 30 et 40; Librairie scientifique J. Hermann, Paris.

Il s'agit bien d'un nouveau traité. Tenant compte du développement qu'a pris l'enseignement des mathématiques générales destiné aux physiciens et aux ingénieurs, l'auteur a entièrement remanié son Ouvrage, qui comprend maintenant deux volumes : le premier étant consacré à l'algèbre et à la géométrie analytique, et le second à l'analyse et à la mécanique.

« Les modifications, dit l'auteur dans sa Préface, ont pour but de rendre ce traité plus utile aux physiciens et aux ingénieurs, qui ont besoin des mathématiques pour leurs applications. J'ai cependant évité de donner des énoncés sans démonstration; il n'est pas nécessaire de retenir tous les détails des démonstrations, mais, pour appliquer correctement un théorème, il est nécessaire d'en avoir bien compris le principe; on a de la peine à bien saisir un énoncé dont on ne connaît pas exactement la raison.»

Ainsi remanié et complété le Traité de M. Fabry constitue un excellent guide pour tous ceux qui veulent étudier les mathématiques en vue de leurs applications. H. F.

R. Fueter. — **Das mathematische Werkzeug** des Chemikers, Biologen, und Statistikers. Vorlesungen über die höheren mathematischen Begriffe in Verbindung mit ihren Anwendungen. — 1 vol. in-8 de 268 p. avec 144 fig.; broché, Fr. 15; Orell Füssli, Zürich.

Ce volume fait partie de la Collection des ouvrages publiés sous les auspices de la Société mathématique suisse et dont les premiers volumes sont constitués par l'« Introduction à la Mécanique rationnelle » de Ch. Cailler et les « Klassische Stücke der Mathematik » de M. A. Speiser.

L'auteur ne se borne pas à exposer les notions de mathématiques indispensables à l'étude des sciences chimiques et naturelles ou de la statistique, mais il montre, à l'aide de problèmes bien choisis, comment ces notions interviennent effectivement dans les applications. C'est ce qui augmente à la fois l'intérêt et la portée de cet ouvrage qui ne manquera pas de rendre de grands services à tous ceux qui ont besoin de l'« outillage mathématique », comme l'indique le titre du volume. H. F.

W. Lietzmann. — **Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen** 1. *Rechenbuch*, von P. B. Fischer. Ausgabe in 1 Band, 4. Aufl. 296 u. 23 S. — Ausgabe in 3 Heften : I. Lehrstoff der Sexta, 102 u. 14 S., 2 M.; II. Lehrstoff der Quinta, S. 103-210 u. 14 S., M. 2, 20; III, Lehrstoff der Quarta, S. 211-296 u. 23 S., 2 M. — B. G. Teubner, Leipzig.

W. Lietzmann. — **Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Mädchenschulen**. *Rechenbuch für höhere Mädchenschulen.* Auf Grund des Rechenbuches von P. B. Fischer, bearbeitet von O. Richter, 217 S., 3 M. 60. — Ausgabe in 3 Heften (comme ci-dessus).

Leitfaden für den Rechenunterricht, von Osw. Richter. 61 S., 1 M.

Aufgabensammlung und Leitfaden für Geometrie, Ausgabe für Oberlyzeen, Deutsche Oberschulen u. Studienanstalten, von W. Lietzmann, P. Zühlke und K. Stracke. 125 u. 70 S., 3 M. — B. C. Teubner, Leipzig.

Aufgabensammlung u. Leitfaden für Arithmetik, Algebra u. Analysis. Ausgabe für Oberlyzeen, Deutsche Oberschulen u. Studienanstalten. Auf Grund von E. Bardeys Aufgabensammlung bearbeitet von W. Lietzmann, P. Zühlke u. Th. Grossmann. 236 u. 106 S., 5 M.

H. Müller. — **Mathematisches Unterrichtswerk**. Neubearbeitete Einheitsausgabe für höhere Lehranstalten. Herausgegeben von E. Kullrich. — 1. Müller-Pietzker, *Rechenbuch*, Bearbeitet von E. Kullrich u. W. Zabel. Einheitsausgabe in einem Gesamtband oder in 3 Heften : Heft 1, Klasse VI, 83 S., 1 M. 60; Heft 2, Klasse V, 95 S., 1 M. 80; Heft 3, Klasse IV, 135 S., 2 M. 40. — B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons eu plus d'une fois l'occasion de signaler le profit que les maîtres trouvent à examiner les manuels d'enseignement des pays qu'ils n'habitent pas. Mieux que les simples plans d'études les livres en usage dans les écoles permettent de se rendre compte du niveau de l'enseignement et des tendances nouvelles. C'est ainsi que pour l'Allemagne on pourra consulter, entre autres, les collections de manuels publiés par la Maison Teubner.

L'une de ces collections est dirigée par M. Lietzmann. Elle comprend une édition spécialement destinée aux établissements de garçons et une édition pour les écoles de jeunes filles.

L'autre porte le titre de H. Müllers « Mathematisches Unterrichtswerk ». Elle est également très répandue.

On trouvera ci-dessus la liste des volumes récents que nous venons de recevoir. Pour obtenir la liste complète de chaque série il suffira d'en faire la demande à l'éditeur.

A ce même point de vue on pourra aussi consulter les ouvrages ci-après :

F. G. Mehler. — **Hauptsätze der Elementar-Mathematik** zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Bearbeitet von Schulte-Tigges. Ausgabe B. (ohne Uebungen) Oberstufe, Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. — **Geometrische Aufgaben und Uebungen.** — 2 vol. in-8 de 254 p. et 89 p.; Mk. 4 et Mk. 1.50; Walter de Gruyter et Co. Berlin

Nouvelle édition, entièrement remaniée par M. Schulte-Tigges, du manuel « Mehler's Hauptsätze der Elementar-Mathematik » à l'usage de l'enseignement secondaire supérieur. L'ouvrage est accompagné d'un recueil d'exercices. Dans cette huitième édition les matières ont été groupées comme suit:

Introduction à la Géométrie moderne. Principes de Géométrie descriptive. Etude synthétique des sections coniques. Arithmétique et Algèbre. Trigonométrie plane. Stéréométrie. Trigonométrie sphérique et applications à la Géographie mathématique et à l'Astronomie. Premières notions du Calcul différentiel et intégral. Géométrie analytique du plan.

Mathematisch-physikalische Bibliothek. Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik, herausgegeben von W. Lietzmann u. A. Witting. — Petits volumes in-16, cartonnés, B. G. Teubner, Leipzig.

A. Czwalina. — **Archimedes.** — 47 p. avec 22 fig., 1 GM.

K. Fladt. — **Unendliche Reihen.** — 52 p., 1 GM.

L. Peters. — **Die Determinanten.** — 50 p., avec 5 fig., 1 GM.

O. Knopf. — **Mathematische Himmelskunde.** — 48 p., avec 30 fig. ,1 GM.

P. Luckey. — **Einführung in die Nomographie**, I, Die Funktionsleiter. Zweite Auflage. — 59 p., avec 35 fig., 1 table et 53 exercices, 1 GM.

H. Wieleitner. — **Der Gegenstand der Mathematik** im Lichte ihrer Entwicklung. — 62 p. avec 20 fig., 1 GM.

G. Wolff. — **Mathematik u. Malerei.** Zweite Auflage. — 84 p., avec 21 fig. et 35 reproductions, 2 GM.

Cette remarquable collection de monographies comprend aujourd'hui 65 petits volumes dont un certain nombre ont déjà atteint ou même dépassé la deuxième édition. Elle a pour but de vulgariser les mathématiques dans le public des gens cultivés; mais elle s'adresse aussi aux élèves des écoles moyennes et aux étudiants en mathématiques. Tous ceux qui enseignent les mathématiques élémentaires y trouveront de nombreuses remarques dont ils sauront tirer profit pour leurs leçons.

Les volumes énumérés ci-dessus donnent une idée de la grande variété des objets traités par les auteurs. Celui de M. Czwalina donne un aperçu des méthodes d'Archimède et de leur influence sur le développement des mathématiques.

Avec M. Wieleitner nous sommes encore dans le domaine de l'histoire; il passe en revue les concepts fondamentaux qui ont contribué au développement de la science, depuis la géométrie des Grecs jusqu'au calcul différentiel et intégral.

Ceux de MM. Fladt et Peters apportent une introduction à l'étude des séries et des déterminants, tandis que celui de M. Knopf est une première initiation à l'astronomie.

Les mathématiques appliquées sont représentées par deux volumes qui paraissent en seconde édition : l'introduction à la nomographie, I, par M. Luckey et « les mathématiques et la peinture », par M. Wolff. Richement illustré ce dernier ouvrage initie le lecteur aux méthodes de la perspective.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

Amedeo Agostini e Enea Bortolotti. — **Esercizi di Geometria Analitica.** Parte Prima. — 1 vol. in-8° de 227 p.; Lire 25.—; Nicola Zanichelli, Bologne.

Ce recueil d'exercices vient compléter le traité de géométrie analytique du professeur Ettore Bortolotti. Le premier volume comprend un choix très intéressant de problèmes sur les formes de première espèce, l'homographie et l'involution, sur le point et la droite dans le plan et sur la droite et le plan dans l'espace.

X. Atanassievitch. — **La doctrine métaphysique et géométrique de Bruno** exposée dans son ouvrage « de Triplici minimo ». — 1 vol. in-8° de 156 p.; Les Presses Universitaires de France, Paris, V^e^.

L'auteur fait une étude détaillée de l'interprétation de la doctrine métaphysique et mathématique du minimum de Bruno. Cette doctrine sert d'antécédent historique à la monadologie de Leibniz et à la doctrine du finitiste contemporain M. Petronievics.

E. Barbette. — **La Magie des Nombres.** — 1 fasc. in-4° de 47 p.; mémoire autographié, 15 fr.; en vente chez l'auteur, rue Courtois, 12, Liége.

Cette Note sur la théorie de nombres se rattache au dernier Théorème de Fermat. Quelques-uns de ses résultats ont fait l'objet d'une communication de l'auteur au Congrès de Grenoble de 1925. (V. p. 303 de ce fascicule).

Serge Bernstein. — **Leçons sur les propriétés extrémales** et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. — 1 vol. in-8° de VIII-204 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Cet Ouvrage fait partie de la Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. E. Borel. Il reproduit, avec