

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	24 (1924-1925)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE DERNIER QUART DE SIÈCLE
Autor:	Plancherel, Michel
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-515749

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE DÉVELOPPEMENT
DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES
DANS LE DERNIER QUART DE SIÈCLE¹

PAR

M. Michel PLANCHEREL (Zurich).

Les « *Leçons sur la théorie des séries trigonométriques* » de M. H. LEBESGUE² et les chapitres consacrés par M. E. W. HOBSON³ à cette théorie dans sa « *Theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series* », ainsi que les articles de Fr. BURCKHARDT⁴ dans l'*Encyclopädie der math. Wiss.* (II A 12), fixent l'état de nos connaissances sur les séries trigonométriques au début du XX^e siècle. Depuis lors, l'intérêt des mathématiciens pour ces séries n'a pas diminué et les progrès réalisés me paraissent assez importants pour que j'essaie de vous présenter un tableau de l'état actuel de nos connaissances sur ce sujet⁵.

Pour abréger mon exposé, je laisserai de côté la théorie des formules intégrales de Fourier, celle des séries trigonométriques de plusieurs variables, celle des séries trigonométriques non harmoniques ainsi que les recherches sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle ou complexe par des polynomes trigonométriques. Ces dernières recherches ont été exposées à notre Société par M. de la VALLÉE-POUSSIN en 1918 et je ne puis mieux faire que vous renvoyer à sa conférence⁶ et à son livre: *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle ou complexe par des suites finies de polynomes*⁷.

¹ Rapport présenté à la réunion de la Société mathématique suisse, tenue à Lugano, le 22 avril 1924.

² H. Lebesgue, 5. (La bibliographie se trouve rassemblée à la fin du rapport). — ³ Hobson, 1. — ⁴ Fr. Burekhardt. — ⁵ Sur le même sujet vient de paraître (septembre 1924) dans l'*Encyklopädie der math. Wiss.* (II C 10) un article de E. Hilb et M. Riesz: *Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen*. — ⁶ Ch. J. de la Vallée-Poussin, 6. — ⁷ Ch. J. de la Vallée-Poussin, 7.

Ainsi délimité mon sujet est encore très étendu et je devrai me borner aux points essentiels. Les progrès les plus importants de la théorie des séries trigonométriques sont dus au développement considérable de la théorie des fonctions de variables réelles; je chercherai à vous montrer qu'ils sont dus plus particulièrement à l'introduction de l'intégrale de Lebesgue et des méthodes de la théorie des séries divergentes, à l'étude des propriétés de la suite des constantes de Fourier et à celle de certaines classes de séries trigonométriques qui, sans être des séries de Fourier, s'en rapprochent par leurs propriétés essentielles.

§ 1. DÉFINITIONS.

1. Nous appellerons *série trigonométrique* toute série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (1)$$

Nous nous bornerons, en général, à supposer que les coefficients a_n, b_n de la série sont réels ainsi que la variable x ; en vertu de la périodicité de $\cos nx, \sin nx$, nous pourrons nous borner à faire varier x dans un intervalle de longueur 2π .

2. Une classe particulière de séries trigonométriques, spécialement importante, est celle des *séries de Fourier*. $f(x)$ désignant une fonction réelle, périodique de période 2π , intégrable au sens de Lebesgue dans l'intervalle d'une période, formons les constantes¹

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos}{\sin} nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Ce sont les *constantes de Fourier* ou les *coefficients de Fourier* de $f(x)$. La série trigonométrique correspondante est appelée —

¹ La notion de série de Fourier dépend donc de la notion d'intégrale. Dans tout ce qui suit, nous nous servirons de la notion d'intégrale due à Lebesgue. Si l'on emploie une notion d'intégrale plus étendue, par exemple celle de Harnack-Young ou celle de Denjoy, on peut former les constantes (2) pour des fonctions qui n'ont pas de série de Fourier. La série trigonométrique correspondante est dite quelquefois une série de Fourier *généralisée*. Nous laisserons de côté ces séries.

qu'elle converge ou non — la *série de Fourier* de $f(x)$. $f(x)$ est la *génératrice* de cette série et nous exprimons la dépendance de $f(x)$ et de la suite de ses constantes de Fourier par le symbole d'équivalence ¹

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) . \quad (3)$$

L'introduction de ce symbole est légitimée par le fait que deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ qui ont même suite de constantes de Fourier, donc même série de Fourier, sont telles que

$$\int_0^x f dx = \int_0^x g dx \quad (4)$$

et réciproquement. On a donc $f(x) = g(x)$ presque partout, c'est-à-dire sauf éventuellement aux points d'un ensemble de mesure nulle ². En général il n'est pas permis de remplacer le symbole d'équivalence par le symbole d'égalité, le second membre de (3) pouvant diverger ou pouvant converger vers une valeur différente de $f(x)$. Notons, par contre, que les équivalences peuvent s'additionner entre elles ou se multiplier par des constantes comme des égalités et que l'intégration terme à terme de l'équivalence (3) conduit à une égalité

$$\int_0^x f dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \quad (5)$$

dans laquelle la série second membre est uniformément convergente ³. Nous rencontrerons au § 7 quelques théorèmes sur la multiplication des équivalences.

§ 2. CONVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES GÉNÉRALES.

1. G. CANTOR ⁴ a montré que la série trigonométrique (1) ne peut converger pour toute valeur de x que si $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ lors-

¹ Hurwitz, 2. — ² Lebesgue 5, p. 91. — ³ Lebesgue 5, p. 102. — ⁴ G. Cantor 1.

que $n \rightarrow \infty$. Plus généralement, cette condition est encore nécessaire pour que $\sum_0^{\infty} A_n$ converge sur un ensemble de points de mesure positive¹. Mais elle est loin d'être suffisante. On peut, avec M. STEINHAUS², construire une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro et qui, cependant, diverge partout. Le même mathématicien a donné une série trigonométrique qui converge dans un intervalle et qui diverge dans un autre intervalle³. Les phénomènes de convergence et de divergence les plus divers peuvent donc se présenter et M. MAZURKIEWICZ a même montré que pour tout procédé « toeplitzien »⁴ de sommation des séries trigonométriques, il est possible de construire une série dont les coefficients tendent vers zéro et qui cependant n'est pas sommable, presque partout, par ce procédé⁵.

2. Nous ne connaissons presque rien sur la structure de l'ensemble des points de convergence ou de divergence d'une série trigonométrique. On voit bien que l'ensemble des points de convergence dans un intervalle de périodicité ne peut pas être entièrement arbitraire, car l'ensemble des ensembles de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ a une puissance supérieure à celle de l'ensemble des suites possibles de constantes a_n, b_n . Si nous ajoutons à ce résultat négatif le fait établi par M. NEDER⁶, qu'étant donné arbitrairement un nombre m ($0 \leq m \leq 2\pi$), il existe des séries trigonométriques qui, dans un intervalle de périodicité, divergent sur un ensemble de mesure m , nous aurons dit tout ce que l'on sait de général sur la question.

3. Une série trigonométrique peut converger partout et ne converger uniformément dans aucun intervalle. On trouvera dans la thèse de M. NEDER⁷ une étude approfondie des questions qui se posent à ce sujet.

4. Une série trigonométrique, même partout convergente, n'est pas, en général, absolument convergente. MM. LUSIN⁸, DENJOY⁹ et S. BERNSTEIN¹⁰ ont obtenu sur la convergence absolue quelques résultats intéressants retrouvés et simplifiés

¹ Lebesgue 5, p. 110. — ² Steinhaus 1. — ³ Steinhaus 5. Voir aussi Lusin 1. — ⁴ Toeplitz 2. — ⁵ Mazurkiewicz. — ⁶ Neder 1. — ⁷ Neder 1. — ⁸ Lusin 2. — ⁹ Denjoy 1. — ¹⁰ S. Bernstein.

dans leur démonstration par M. FATOU¹. Si la série ΣA_n converge absolument au point x_0 , la convergence ou la divergence de la série au point $x_0 - \xi$, symétrique du point arbitraire $x_0 + \xi$ relativement à x_0 , est de même nature qu'au point $x_0 + \xi$. De là résulte que l'ensemble des points de convergence absolue est symétrique par rapport à chacun de ses points. S'il n'a qu'un nombre fini de points et si on les représente (mod. 2π) sur le cercle de rayon 1, ils seront disposés suivant les sommets d'un polygone régulier. S'il y a une infinité de points de convergence absolue, leur ensemble est ou de mesure nulle ou de mesure 2π . Dans ce dernier cas, $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ converge et la série trigonométrique converge absolument partout. Donc, si $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ diverge, l'ensemble des points de convergence absolue est de mesure nulle. Plus généralement, si une série trigonométrique a une infinité de points de convergence absolue, l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ ayant une propriété de convergence ou de divergence déterminée est de mesure nulle ou de mesure 2π .

5. Lorsque les suites a_n , b_n tendent vers zéro et sont telles que l'une des séries de différences $\Sigma \Delta^k a_n$, $\Sigma \Delta^k [(-1)^n a_n]$ ou $\Sigma \Delta^k b_n$, $\Sigma \Delta^k [(-1)^n b_n]$ est absolument convergente, on sait que les séries $\Sigma a_n \cos nx$, $\Sigma b_n \sin nx$ convergent uniformément dans tout intervalle ne contenant aucune valeur congrue à $\frac{2p\pi}{2^k}$ (p entier)². En général, cette convergence n'est pas uniforme dans l'intervalle $\left(\frac{2p\pi}{2^k} - \varepsilon, \frac{2p\pi}{2^k} + \varepsilon\right)$. Si, par exemple, $b_n \geq b_{n+1}$, la condition $nb_n \rightarrow 0$ est nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma b_n \sin nx$ converge uniformément dans tout intervalle³.

§ 3. LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER.

1. Aux critères connus de convergence des séries de Fourier dus à LEJEUNE-DIRICHLET, JORDAN, LIPSCHITZ, DINI et LEBESGUE⁴, M. de la VALLÉE-POUSSIN a ajouté le suivant⁵:

¹ Fatou 3. — ² Lebesgue 5, p. 44. Voir aussi W. H. Young 18. — ³ J. W. Chaundy and A. E. Jolliffe. — ⁴ Pour ces critères voir Lebesgue 5, p. 64-73. — ⁵ Ch. J. de la Vallée Poussin 3.

Si la fonction $f(x)$ est telle que

$$F(u) = \frac{1}{2u} \int_0^u [f(x+u) + f(x-u)] du$$

est à variation bornée quand $u \rightarrow 0$, la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $F(+0)$ au point x .

Ce critère contient celui de Jordan comme cas particulier.

M. W. H. YOUNG¹ a donné un autre critère qui n'est pas contenu dans celui de M. de la Vallée-Poussin:

Si $f(x)$ est simplement discontinue au point x — c'est-à-dire si $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent — et si dans le voisinage de ce point, on a

$$\frac{1}{2} [f(x+h) + f(x-h)] = \frac{1}{h} \int_0^h g(t) dt ,$$

$g(t)$ étant une fonction bornée ou plus généralement telle que $\frac{1}{h} \int_0^h |g(t)| dt$ soit bornée pour $h \rightarrow 0$, la série de Fourier de $f(x)$ converge au point x vers $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$.

Dans un autre travail, M. W. H. YOUNG² fait voir que dans l'énoncé précédent, la condition relative à $g(t)$ peut être remplacée par celle que, pour une valeur $q > 0$,

$$\frac{1}{h^q} \int_0^h |d[h^q (f(x+h) + f(x-h))]|$$

soit bornée pour $h \rightarrow 0$.

M. G. H. HARDY³ a étudié et comparé entre eux les différents critères connus de convergence des séries de Fourier.

2. RIEMANN a déjà démontré que les coefficients d'une série de Fourier (d'une fonction bornée intégrable au sens de Riemann) tendent vers zéro et LEBESGUE a montré que la propriété subsiste lorsque la fonction, bornée ou non, n'est pas intégrable

¹ W. H. Young 21, — ² W. H. Young 24. On pourra consulter aussi W. H. Young 26, 27. — ³ Hardy 2.

au sens de Riemann mais est intégrable à son sens. Pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Lebesgue on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0^1.$$

Cette propriété ne subsiste plus nécessairement si $f(x)$ est non bornée, intégrable au sens de Riemann ou de Harnack-Young ou de Denjoy, sans l'être au sens de Lebesgue. Si l'on remarque que la condition $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ est une condition nécessaire de convergence de la série de Fourier et qu'il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, mais non au sens de Riemann, et dont la série de Fourier converge partout vers la fonction ², on se rend compte de l'importance qu'il y a à mettre la notion d'intégrale de Lebesgue à la base de la théorie des séries de Fourier.

3. Une propriété importante des séries de Fourier, déjà remarquée par RIEMANN pour la classe des fonctions bornées intégrables à son sens et étendue ensuite par M. LEBESGUE, réside dans le fait que la convergence ou la divergence de la série de Fourier en un point x ne dépend que des valeurs de la génératrice dans l'intervalle arbitrairement petit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ³. Nous exprimerons ce fait en disant que la convergence d'une série de Fourier en un point est une *propriété locale* de sa génératrice.

Du Bois-REYMOND a établi le premier qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge⁴. M. FEJÉR en a donné plusieurs exemples simples⁵. En voici un⁶:

La fonction périodique, de période 2π , définie dans $0 \leq x \leq \pi$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^3}x)}{n^2}$$

et dans $(-\pi, 0)$ par la condition de parité

$$f(-x) = f(x) , \quad -\pi \leq x \leq 0$$

¹ Lebesgue 5, p. 61. — ² Lebesgue 5, p. 68. — ³ Lebesgue 5, p. 60. — ⁴ Du Bois-Reymond. — ⁵ Fejér 3, 4, 5. — ⁶ Fejér 4.

est partout continue. Si on la développe en série de Fourier (de cosinus, puisqu'elle est paire), la série de Fourier de cosinus diverge au point de continuité $x = 0$.

Nous dirons qu'une fonction présente la singularité de Du Bois-Reymond en un point, lorsqu'elle est continue en ce point et que pourtant sa série de Fourier y diverge.

L'existence de fonctions possédant la singularité de Du Bois-Reymond est liée étroitement à l'ordre de grandeur des *constantes de Lebesgue*

$$\rho_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin (2n+1)t}{\sin t} \right| dt \quad (6)$$

Soit \mathfrak{M} l'ensemble des fonctions périodiques, de période 2π , intégrables et bornées, telles que $|f(x)| \leq 1$. Soit $s_n(x)$ la n -ième somme partielle de la série de Fourier de $f(x)$

$$s_n(x) = \sum_{v=0}^n A_v = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin (2n+1)t}{\sin t} f(x+2t) dt .$$

On a donc

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin (2n+1)t}{\sin t} \right| dt = \rho_n .$$

En prenant

$$f(x+2t) = sgn \cdot \frac{\sin (2n+1)t}{\sin t}$$

on voit que $s_n(x) = \rho_n$. ρ_n est donc le maximum de $|s_n(x)|$ au point x , dans le champ fonctionnel \mathfrak{M} . L'existence de fonctions continues dont la série de Fourier diverge tient essentiellement, comme l'a montré M. LEBESGUE¹ au fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \infty$; c'est, d'ailleurs, une conséquence de théorèmes généraux sur les intégrales singulières que MM. LEBESGUE², HAAR³ et HAHN⁴ ont étudiées d'une manière approfondie. ρ_n est une fonction croissante de n et $sgn(\Delta^v \rho_n) = (-1)^{v-1} (v = 1, 2, 3, \dots)$ ⁵.

La valeur asymptotique de ρ_n a été étudiée par plusieurs

¹ Lebesgue 5, p. 86-87. — ² Lebesgue 6. — ³ Haar 1. — ⁴ Hahn 1. — ⁵ Szegö.

auteurs¹. On a

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \operatorname{tg} \frac{v\pi}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2v(2n+1)-1}}{4v^2-1} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \log(2n+1) + \alpha_0 + \sum_{v=1}^k \frac{\alpha_v}{(2n+1)^{2v}} + R_{k+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

Les α_v sont des constantes et le reste R_{k+1} de la formule asymptotique est tel que $R_{k+1}n^{2k+2}$ reste borné lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. M. LEBESGUE a attiré l'attention sur une autre particularité: la série de Fourier d'une fonction partout continue peut être toujours convergente et pourtant ne pas converger uniformément dans $(0, 2\pi)$ ². M. STEINHAUS a donné un exemple dans lequel la convergence n'est uniforme dans aucun intervalle³. On dit qu'une fonction continue dont la série de Fourier est partout convergente, présente en un point la singularité de Lebesgue lorsque sa série de Fourier ne converge pas uniformément dans le voisinage de ce point. M. NEDER⁴ a montré qu'étant donné un nombre m ($0 < m < 2\pi$), il existe une fonction continue dont la série de Fourier converge partout et pour laquelle cependant l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ où le degré de convergence non uniforme de la série est infini a une mesure $\geq m$.

5. Un phénomène intéressant de convergence non uniforme, qui porte le nom de *phénomène de Gibbs*, a été particulièrement étudié⁵. Il concerne l'allure des sommes partielles $s_n(x)$ de la série de Fourier d'une fonction, à variation bornée au voisinage d'un point de discontinuité $x = a$, et consiste dans le fait que $s_n(x)$ a dans le voisinage du point a des maxima et minima relatifs dont les limites pour $n \rightarrow \infty$ sont extérieures à l'intervalle $(f(a+0), f(a-0))$. L'essentiel de ce phénomène peut s'étudier sur la fonction définie dans $(-\pi, \pi)$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$$

¹ Fejér 5, 8; Gronwall 1, 5; Szegö. — ² Lebesgue 4; 5, p. 88. — ³ Steinhaus 3.
— ⁴ Neder 1. — ⁵ Bôcher 1, 2; Carslaw; Gronwall 3; Jackson.

et en dehors par périodicité. La série de Fourier de cette fonction est

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Il suffit d'étudier les sommes partielles $s_n(x)$ dans l'intervalle $0 < x < \pi$. On a $s_n(x) > 0$ pour $0 < x < \pi$ et le maximum absolu M_n de $s_n(x)$ dans $0 < x < \pi$ est atteint au point $x = \frac{\pi}{2n}$. M_n croît avec n et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1,85 \dots > \frac{\pi}{2}^1. \quad (8)$$

6. FEJÉR² a montré comment on peut, à l'aide de la série de Fourier, ou plus exactement, des constantes de Fourier d'une fonction $f(x)$ à variation bornée, déterminer le *saut* $f(x+0) - f(x-0)$. Il suffit de déterminer une des racines positives g de l'équation

$$\int_t^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0 \quad (9)$$

pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(x \pm \frac{g}{n}\right) = f(x \pm 0),$$

d'où

$$f(x+0) - f(x-0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[s_n\left(x + \frac{g}{n}\right) - s_n\left(x - \frac{g}{n}\right) \right]. \quad (10)$$

Il a montré encore que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (b_k \cos kx - a_k \sin kx) = f(x+0) - f(x-0). \quad (11)$$

LUKACS³ a trouvé une autre expression du saut; il a montré que

$$\frac{1}{\pi} [f(x+0) - f(x-0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{v=1}^n (b_v \cos vx - a_v \sin vx) \quad (12)$$

sous la seule hypothèse que le premier membre existe.

¹ Carslaw. — ² Fejér 10; Sidon. — ³ Lukaes.

7. Si $|f(x)|^p$ ($p > 1$) est intégrable dans $(0, 2\pi)$, $\int_0^{2\pi} |s_n(x)|^p dx$

reste bornée pour $n \rightarrow \infty$ et

$$\int_0^{2\pi} |f - s_n|^p dx \rightarrow 0^1. \quad (13)$$

Dans le cas particulier où $p = 2$, HARDY et LITTLEWOOD ont montré² que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_0 - s)^2 + (s_1 - s)^2 + \dots + (s_n - s)^2}{n + 1} = 0 \quad (14)$$

en tout point où $s = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ existe. Si dans (14) on prend $s = f(x)$, la formule est vraie presque partout.

8. RIEMANN a déjà donné des conditions suffisantes pour que la série de Fourier d'un produit $f(x)\lambda(x)$ converge en même temps que la série de Fourier de $f(x)$. Ces conditions ont été élargies par M. LEBESGUE³ puis par M. STEINHAUS qui montre que la série de Fourier de $f\lambda$ converge au point x de convergence de la série de Fourier de f si f est bornée et si $\lambda(x)$ est telle que $\frac{\lambda(x+t) - \lambda(x)}{t}$ soit intégrable par rapport à t dans tout intervalle⁴.

9. M. LUSIN⁵ a indiqué une condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable converge presque partout. Mais cette condition n'est pas simple et nous ignorons si la série de Fourier d'une fonction continue ou d'une fonction de carré intégrable a nécessairement des points de convergence et si leur ensemble est de mesure positive. On sait que la série de Fourier d'une fonction partout continue peut avoir une infinité partout dense de points de divergence et que l'ensemble des points de divergence peut avoir la puissance du continu⁶. M. KOLMOGOROFF⁷ a construit une fonction

¹ M. Riesz 8. Dans le cas $p = 1$ on ne peut pas affirmer que

$$\int_0^{2\pi} |f - s_n| dx \rightarrow 0.$$

Voir à ce sujet S. Banach et H. Steinhaus 1 et Hahn 1. — ² Hardy et Littlewood 2. — ³ Lebesgue 5, p. 117-119. — ⁴ Steinhaus 2. — ⁵ Lusin 4. — ⁶ Neder 1. Le raisonnement de Du Bois-Reymond 1 pour établir l'existence d'un ensemble partout dense de points de divergence n'est pas concluant. Voir à ce propos Neder 5. — ⁷ Kolmogoroff 1.

intégrable, de carré non intégrable, dont la série de Fourier diverge presque partout. Il a montré que si $f(x)$ est de carré intégrable, les suites partielles $s_{n_p}(x)$ de la série de Fourier convergent presque partout vers $f(x)$ lorsque $p \rightarrow \infty$ si

$$\frac{n_{p+1}}{n_p} > k > 1$$

k étant une constante¹.

Après que MM. FATOU², JEROSCH et WEYL³, WEYL⁴ eurent démontré certains résultats moins généraux, M. W. H. YOUNG⁵ établit que si $\sum A_n$ est une série de Fourier, $\sum \frac{A_n}{n^\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ est une série de Fourier convergeant presque partout. M. HARDY⁶ a réussi à faire voir que dans ce résultat n^ε peut être remplacé par $\log n$. Dans le cas spécial des fonctions de carré intégrable, MM. KOLMOGOROFF et SELIVERSTOFF⁷ ont montré que la convergence de $\sum (a_n^2 + b_n^2) (\log n)^{1+\delta} (\delta > 0)$ entraîne la convergence « presque partout » de la série de Fourier $\sum A_n$ et M. MENCHOFF⁸ a montré que le même résultat a lieu si $\sum (|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon})$, ($\varepsilon > 0$), converge.

10. On ne sait pas grand chose sur les propriétés que doit avoir $f(x)$ pour que sa série de Fourier soit absolument convergente. M. S. BERNSTEIN⁹ a cependant démontré que si $f(x)$ est à variation bornée et satisfait uniformément dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$, sa série de Fourier est absolument convergente; si $\alpha > \frac{1}{2}$, il y a des fonctions dont la série de Fourier n'est pas absolument convergente.

§ 4. LA SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER PAR LES MOYENNES DE CESÀRO.

1. On peut toujours remonter d'une série de Fourier — c'est-à-dire de la suite des constantes de Fourier — à la génératrice

¹ Kolmogoroff 2. — ² Fatou 1. — ³ Jerosch et Weyl. — ⁴ Weyl. — ⁵ W. H. Young 11. — ⁶ Hardy 1. — ⁷ A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff. — ⁸ Menchoff 3. — ⁹ S. Bernstein.

en intégrant terme à terme la série et prenant ensuite la dérivée de la fonction somme. Mais ces opérations constituent un double passage à la limite. FEJÉR¹ a montré que l'on peut remonter plus simplement de la suite des constantes de Fourier à la génératrice à l'aide des moyennes arithmétiques $s_n^{(1)}(x)$ des sommes partielles $s_n(x)$

$$s_n(x) = \sum_0^n A_v \quad (15)$$

$$s_n^{(1)}(x) = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = A_0 + \sum_{v=1}^n \left(1 - \frac{v}{n+1}\right) A_v. \quad (16)$$

Il a fait voir que $s_n^{(1)}(x)$ converge vers $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ en tout point où cette expression existe, en particulier donc en tout point de continuité de $f(x)$ et que la convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de $f(x)$. Plus généralement, $s_n^{(1)}(x)$ converge encore vers $f(x)$ si²

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)| du = 0.$$

Or, cette limite est nulle presque partout. Les moyennes arithmétiques $s_n^{(1)}(x)$ convergent donc presque partout vers $f(x)$.

L'important résultat de FEJÉR a été le point de départ de toute une série de recherches dont le caractère général est l'introduction de la théorie de la sommabilité des séries divergentes dans l'étude des séries de Fourier. Série trigonométrique et série de puissances étant en étroite relation, puisque la première est la partie réelle ou imaginaire d'une série de puissances sur un cercle, il est naturel d'appliquer aux séries trigonométriques les procédés de sommation employés dans l'étude des séries de puissances.

2. La méthode de sommation qui s'est montrée la plus féconde est la *méthode des moyennes arithmétiques de Cesàro*³. Soit

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

¹ Fejér 1. — ² Lebesgue 2, 6. — ³ Cesàro 1.

une série quelconque, convergente ou non. Formons la série de puissances

$$f(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n + \dots$$

et supposons son rayon de convergence égal à 1. On sait, depuis Abel, que si $\sum u_n$ converge et a pour somme s , $\lim_{t \rightarrow 1-0} f(t) = s$.

Mais on connaît de nombreux exemples où la limite considérée de $f(t)$ existe et où $\sum u_n$ diverge. Il est alors naturel de convenir de regarder cette limite comme somme de la série divergente: c'est le principe du *procédé de sommation de Poisson* sur lequel nous reviendrons plus loin (§ 6). Notons simplement que la formation de $\lim_{t \rightarrow 1-0} f(t)$ exige en réalité un double passage à la

limite à partir de la suite u_n , car la formation de $f(t)$ en inclut déjà un. CESÀRO a montré comment, très souvent, on peut se restreindre à un seul passage à la limite, et celà à l'aide du théorème suivant¹:

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots; p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ deux suites illimitées. Soit $p_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ converge pour $|t| < 1$ et diverge pour $t = 1$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{p_n} = s$ existe, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge pour $|t| < 1$ et

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n} = s.$$

Nous appliquerons ce théorème au cas où

$$p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n + \dots = (1-t)^{-(1+\delta)}, \quad (\delta > -1)$$

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots = (1-t)^{-(1+\delta)} \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n.$$

¹ Cesàro 2.

Par conséquent,

$$p_n = \frac{\Gamma(n + \delta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\delta + 1)} \equiv C_n^{(\delta)} \quad (17)$$

et

$$a_n = \sum_{\nu=0}^n C_{n-\nu}^{(\delta)} u_\nu \equiv S_n^{(\delta)} . \quad (18)$$

Le théorème de Cesàro montre donc: si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(\delta)}}{C_n^{(\delta)}} = s$$

existe, alors

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_0^\infty u_n t^n = s .$$

Ce résultat conduit à la *définition suivante de la sommation de Cesàro d'ordre δ , ($\delta > -1$).*

La série $\sum_0^\infty u_n$ est dite *sommable* (C, δ), et a pour somme s si

$$\begin{aligned} s_n^{(\delta)} &= \frac{S_n^{(\delta)}}{C_n^{(\delta)}} = \sum_{\nu=0}^n \frac{C_{n-\nu}^{(\delta)}}{C_n^{(\delta)}} u_\nu = \sum_{\nu=0}^n \frac{\Gamma(n - \nu + \delta + 1)}{\Gamma(n - \nu + 1)\Gamma(n + \delta + 1)} u_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^n \left(1 - \frac{\delta}{n + \delta}\right) \left(1 - \frac{\delta}{n + \delta - 1}\right) \dots \left(1 - \frac{\delta}{n + \delta - \nu + 1}\right) u_\nu \end{aligned} \quad (19)$$

converge vers s lorsque $n \rightarrow \infty$.

La convergence ordinaire est identique à la sommabilité ($C, 0$). Essentiel est le fait qu'une série sommable (C, δ_0) est sommable (C, δ) vers la même somme lorsque $\delta > \delta_0$. La somme formelle de deux séries sommables (C, δ) est encore sommable (C, δ) vers la somme des sommes (C, δ) des deux séries. Le produit formel, d'après la règle de Cauchy, de deux séries dont l'une est sommable (C, δ) et l'autre (C, δ') est sommable ($C, \delta + \delta' + 1$) vers le produit des deux sommes¹.

La suite continue des ordres de sommation de Cesàro a l'avantage de constituer une échelle de convergence. Car, pour toute

¹ Cesàro 1, 2; Chapman 1, 2.

série, il existe un ordre δ_0 (éventuellement $\delta_0 = -1$ ou $\delta_0 = \infty$) tel que (si $\delta_0 \neq \infty$) la série soit sommable (C, δ) pour $\delta > \delta_0$ et (si $\delta_0 \neq -1$) ne soit pas sommable (C, δ) pour $\delta < \delta_0$.

3. L'étude systématique de la sommation (C, δ) des séries de Fourier a conduit aux résultats suivants¹.

La série de Fourier d'une fonction intégrable converge (C, δ) ($\delta > 0$) vers $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ en tout point où cette expression existe². Si $f(x)$ est continue en chaque point x d'un intervalle $a \leq x \leq b$, la convergence est uniforme dans cet intervalle. Ceci n'a plus lieu, en général, si $\delta \leq 0$. Le résultat primitif de Fejér est contenu dans le précédent ($\delta = 1$).

Si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)| du = 0$$

la série converge (C, δ) , ($\delta > 0$)³. C'est pour $\delta = 1$ le résultat de Lebesgue énoncé plus haut. M. HAHN⁴ a fait voir que ce résultat ne subsiste plus, en général, si l'on remplace la condition précédente par la même débarrassée du signe de valeur absolue sous l'intégrale; il subsiste, par contre, si l'on remplace la sommation (C, δ) par la sommation $(C, 1 + \delta)$ ⁵.

Si q est un entier positif et si $\delta > q$, la série de Fourier converge (C, δ) vers la q -ième dérivée généralisée de la q -ième intégrale $\int_x^x \int_x^x \dots \int_x^x f dx \dots dx$ ⁶.

La lumière que ces théorèmes jettent sur la nature de la convergence des séries de Fourier est encore plus grande lorsqu'on introduit pour les sommes $s_n^{(\delta)}$ des constantes $\rho_n^{(\delta)}$ analogues aux constantes de Lebesgue $\rho_n = \rho_n^{(0)}$, définies comme borne supérieure de $|s_n^{(\delta)}(x)|$ dans le champ des fonctions f telles que $|f(x)| \leq 1$. $\rho_n^{(\delta)}$ est une fonction bornée de n pour $\delta > 0$ et pour $\delta \geq 1$ on a $\rho_n^{(\delta)} = 1$. Les sommes partielles $s_n^{(\delta)}$ de la série de Fourier d'une fonction bornée $f(x)$ sont donc bornées pour $\delta > 0$ et lorsque $\delta \geq 1$ elles sont toujours comprises entre la borne inférieure et la borne supérieure de $f(x)$. On peut se demander

¹ Chapman 1, 2; Gronwall 4; Hardy 1; M. Riesz 1, 7; W. H. Young 3; Kogbetliantz 2. — ² M. Riesz 1, 7; Chapman 2; Gronwall 4; W. H. Young 3. — ³ Hardy 1. — ⁴ Hahn 2. — ⁵ W. H. Young 2. — ⁶ W. H. Young 3.

ce qu'il advient du phénomène de Gibbs pour une sommation d'ordre $\delta < 1$; la question a été traitée par H. CRAMÉR¹ qui établit l'existence d'une valeur positive k inférieure à 1, telle que lorsque $\delta < k$ le phénomène de Gibbs a lieu et que lorsque $\delta > k$ il n'a pas lieu.

4. La convergence ordinaire et *a fortiori* la convergence (C, δ) ($\delta > 0$) d'une série de Fourier est une propriété locale. Ce n'est plus le cas, en général, lorsque $\delta < 0$. La convergence en un point dépend alors non seulement du comportement de la fonction dans le voisinage de ce point, mais de son comportement dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$. C'est une propriété non plus locale, mais globale.

L'influence des points singuliers de la fonction sur les propriétés de convergence de sa série de Fourier est mise en évidence dans le résultat de Kogbetliantz²: Si $f(x)$ est à variation bornée dans les intervalles $(0, \xi - \varepsilon)$ et $(\xi + \varepsilon, 2\pi)$ et si dans l'intervalle $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ elle peut se mettre sous la forme

$$c_0 |x - \xi|^{-\alpha} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant à variation bornée dans $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, c_0 une constante et $0 < \alpha < 1$, la série de Fourier est sommable (C, δ), $\delta > \alpha - 1$ en tout point $x \neq \xi$ vers $\frac{1}{2} [f(x + 0) + f(x - 0)]$. Par contre, elle n'est plus sommable (C, δ) en ce point si $\delta \leq \alpha - 1$. Les moyennes $s_n^{(\delta)}$ d'ordre $\delta < \alpha - 1$ ne sont pas bornées en n ; par contre, celles d'ordre $\delta = \alpha - 1$ sont bornées en n , mais ne convergent pas pour $n \rightarrow \infty$. Il est d'autant plus remarquable que si la fonction est à variation bornée dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ la série converge (C, δ) partout vers $\frac{1}{2} [f(x + 0) + f(x - 0)]$ lorsque $\delta > -1$ ³.

5. HARDY et LITTLEWOOD⁴ se sont posé la question de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série de Fourier soit sommable au point x par une sommation de Cesàro d'ordre suffisamment élevé. Ils sont arrivés au résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction intégrable $f(x)$ soit sommable par une moyenne

¹ Cramer. — ² Kogbetliantz. — ³ W. H. Young 15. — ⁴ Hardy and Littlewood 3.

de Cesàro en un point x est qu'il existe un entier k tel que si l'on pose

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(t) dt, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_1(t) dt, \dots$$

on ait

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_k(t) = 0.$$

Ils ont montré en particulier que si f est bornée dans un intervalle contenant le point x , la série de Fourier est ou bien sommable au point x pour toute moyenne de Cesàro d'ordre $\delta > 0$ ou bien n'est sommable par aucune. La condition nécessaire et suffisante de sommabilité est dans ce cas: $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_1(t) = 0$ ¹.

§ 5. LES SÉRIES DE FOURIER RESTREINTES.

1. En général la série obtenue par dérivation terme à terme d'une série de Fourier diverge partout. Mais M. FEJÉR² a déjà établi que l'on peut encore, à l'aide des moyennes arithmétiques, remonter de la série dérivée à la dérivée de la génératrice. M. W. H. YOUNG³ a montré que la série dérivée terme à terme de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée converge presque partout (G, δ), $\delta > 0$, vers la dérivée de la fonction. Plus généralement, il a établi que⁴:

a) la convergence (C, 1) de la première dérivée (formelle) d'une série de Fourier (c'est-à-dire la série obtenue par dérivation terme à terme) en un point est une propriété locale;

b) qu'il en est de même de la convergence (C, p) de la p -ième dérivée.

Il résulte de ces propositions que si, par exemple, $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ est continue et à variation bornée dans le voisinage d'un point, la p -ième dérivée de la série de Fourier de f converge (C, p) vers $\frac{d^p f}{dx^p}$ au point considéré.

¹ Hardy and Littlewood 3; M. Riesz 7. — ² Fejér 1. — ³ W. H. Young 20. — ⁴ W. H. Young 31.

2. Ces résultats ont conduit M. YOUNG à introduire sous le nom de séries de Fourier restreintes de classe p une classe de séries trigonométriques qui sans être nécessairement des séries de Fourier s'en rapprochent beaucoup par leurs propriétés et qu'il caractérise par les deux propriétés suivantes:

I. La série trigonométrique obtenue en intégrant p -fois terme à terme la série donnée (on laisse de côté le terme constant) est une série de Fourier dont nous désignerons par $F(x)$ la génératrice.

II. Dans un intervalle partiel (a, b) d'un intervalle de périodicité, $F(x)$ est l'intégrale p -uple d'une fonction $f(x)$ intégrable dans (a, b) . On suppose donc que dans (a, b)

$$F(x) = \int_{(p)}^x \dots \int_{(p)}^x f dx \dots dx, \quad f(x) = \frac{d^p F}{dx^p}.$$

La série trigonométrique donnée est alors appelée par M. Young une *série de Fourier de classe p restreinte à l'intervalle (a, b)* et $f(x)$ la fonction *associée* à cette série dans l'intervalle (a, b) . La raison de cette dénomination est que dans (a, b) et relativement à la sommation de Cesàro d'ordre p une telle série a exactement les mêmes propriétés de convergence que la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0, 2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) ¹.

3. Pour pouvoir donner pour une série de Fourier restreinte de classe p des critères de convergence relatifs à une sommation d'ordre $q < p$, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse supplémentaire relative non plus seulement à l'intervalle (a, b) mais à tout l'intervalle $(0, 2\pi)$. Comme hypothèse supplémentaire, M. W. H. Young ajoute la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^{p-1}} = 0.$$

Les conditions de convergence (C, $p - 1$) dans (a, b) d'une telle série sont alors les mêmes que celles de la convergence (C, $p - 1$) de la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0, 2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) ².

¹ W. H. Young 31. — ² W. H. Young 23, 33.

En particulier donc, si $p = 1$, nous voyons qu'une série de Fourier restreinte de classe 1, telle que $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ jouit dans l'intervalle de restriction et relativement à la convergence ordinaire de toutes les propriétés d'une série de Fourier.

M. YOUNG a fait de ces séries une application importante à l'étude de la convergence des séries de polynomes de Legendre¹, des séries de fonctions de Bessel² et de certaines séries trigonométriques non harmoniques³. Une autre application intéressante⁴ généralise un théorème de FATOU⁵ affirmant qu'une série de puissances $\sum a_n z^n$, telle que $a_n \rightarrow 0$, de rayon de convergence 1, converge sur le cercle de convergence en tout point de régularité de la fonction analytique engendrée par la série. Ce théorème de Fatou a été dans sa démonstration notablement simplifié par M. M. RIESZ⁶ qui a montré de plus que la convergence est uniforme sur un arc de régularité et qui a, en remplaçant la condition $a_n \rightarrow 0$ par la condition $\frac{a_n}{n^\delta} \rightarrow 0$ ($\delta \geq 0$), montré que le théorème subsiste, à condition de remplacer la convergence ordinaire par la convergence (C, δ) . Si $\left| \frac{a_n}{n^\delta} \right| < M$, les sommes partielles de la série restent bornées (C, δ) aux points de régularité.

§ 6. AUTRES PROCÉDÉS DE SOMMATION.

1. Il est quelquefois utile d'introduire d'autres procédés de sommation équivalents au procédé de Cesàro. C'est ainsi qu'on peut, pour les indices δ positifs entiers, définir avec HÖLDER⁷ un procédé de sommation que MM. KNOPP⁸ et SCHNEE⁹ ont montré équivalent au procédé de sommation (C, δ) . CHAPMAN¹⁰, M. RIESZ¹¹ et W. H. YOUNG¹² ont étudié de tels procédés.

2. M. de la VALLÉE-POUSSIN¹³ a donné un procédé nouveau pour sommer une série $\sum_0^\infty u_n$; il consiste à donner comme

¹ W. H. Young 29, 30. — ² W. H. Young 35. — ³ W. H. Young 34. — ⁴ W. H. Young 32. — ⁵ Fatou 1. — ⁶ M. Riesz 3, 5, 6. — ⁷ Hölder. — ⁸ Knopp 1, 2, 3. — ⁹ Schnee; voir aussi Landau 1, 2. — ¹⁰ Chapman 1. — ¹¹ M. Riesz 1, 2; voir aussi Hardy and Riesz 1. — ¹² W. H. Young 3. — ¹³ Vallée-Poussin 2.

somme à la série la limite de

$$V_n = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} u_k \quad . \quad (20)$$

Ce procédé est plus puissant que celui de Cesàro d'ordre quelconque. On peut en effet montrer¹ que toute série sommable (C, δ) est *sommable* (V. P), c'est-à-dire par le procédé de M. de la Vallée-Poussin; mais que, par contre, il existe des séries sommables (V. P) qui ne sont sommables par aucune moyenne de Cesàro.

Si l'on somme une série de Fourier par le procédé (V. P.) on voit que la série a pour somme (V. P.) l'expression

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \int_0^t [f(x+t) + f(x-t)] dt$$

en tout point où cette limite existe, donc presque partout et que si, au point x , f possède une dérivée généralisée d'ordre k , la série obtenue en dérivant p fois terme à terme la série de Fourier de f converge (V. P.) vers cette dérivée généralisée. Pour toute fonction intégrable

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - V_n(x)| dx = 0$$

V_n désignant la n -ième somme partielle (V. P.) de la série de Fourier de f .

λ désignant une constante, le procédé de sommation où l'on remplace V_n par

$$V_n^\lambda = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+2\lambda+1)(n+2\lambda+2)\dots(n+2\lambda+k)} u_k$$

est équivalent au procédé de M. de la Vallée-Poussin².

3. D'autres procédés de sommation interviennent dans cer-

¹ Gronwall 6, 7; Moore. — ² Kogbetliantz 1.

taines recherches; c'est le cas du *procédé de sommation dit de Poisson*, où l'on cherche la limite pour $r \rightarrow 1 - 0$ de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

et de celui qui se présente dans la *théorie de la propagation de la chaleur*:

$$\lim_{r \rightarrow 1 - 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^{n^2} \right]$$

Notons encore le *procédé de Riemann*:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right].$$

Ces divers procédés possèdent dans le cas des séries de Fourier des propriétés analogues à celles que possède le procédé de M. de la Vallée-Poussin¹.

§ 7. LA THÉORIE DES CONSTANTES DE FOURIER.

1. L'idée d'édifier à côté de la théorie de la convergence des séries de Fourier une théorie des suites des constantes de Fourier semble avoir été formulée pour la première fois d'une façon nette par HURWITZ² qui a montré que l'on peut additionner et multiplier entre elles les équivalences des fonctions intégrables bornées et qu'une équivalence intégrée terme à terme donne lieu à une égalité. Le problème général de cette théorie des constantes de Fourier est le suivant: De propriétés connues de $f(x)$, quelles conséquences conclure pour la suite de ses constantes de Fourier et inversement.

En réalité on sait très peu de choses sur les caractéristiques d'une suite de constantes de Fourier. On sait que $a_n \rightarrow 0$ et

que $\sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n}$ converge³. Il n'existe pas de fonction $\lambda(n)$ telle que

¹ Vallée-Poussin 2, Hahn 1. — ² Hurwitz 3. — ³ Lebesgue 5, p. 102, 124.

$\lambda(n) \leqq \lambda(n+1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n) = \infty$ et pour laquelle $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lambda(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lambda(n) = 0$ ait lieu pour toute suite de constantes de Fourier¹. Mais ces propriétés sont loin d'être suffisantes pour caractériser une suite de constantes de Fourier.

On sait encore que si une fonction f est à variation bornée, ses coefficients de Fourier satisfont à des inégalités du type

$$|a_n| < \frac{M}{n}, \quad |b_n| < \frac{M}{n}, \quad (21)$$

où M est une constante et que si elle est de plus continue et périodique

$$na_n \rightarrow 0, \quad nb_n \rightarrow 0^2.$$

On sait encore que si f est continue et périodique une relation $na_n \rightarrow a$, $nb_n \rightarrow b$ ne peut avoir lieu³ que si $a = b = 0$ ³.

Lorsque la fonction f continue périodique satisfait uniformément à une condition de Lipschitz, ou possède des dérivées jusqu'à un certain ordre, ou lorsqu'elle est analytique, les inégalités (21) peuvent être remplacées par de plus précises.

Du fait qu'une suite donnée a_n , b_n est une suite de constantes de Fourier on ne peut pas conclure que si l'on intervertit dans cette suite l'ordre d'une infinité de termes, la suite obtenue est encore une suite de constantes de Fourier. Par exemple, si l'on permute les a_n et les b_n de même indice entre eux, la nouvelle suite n'est plus nécessairement une suite de constantes de Fourier. Le rôle disymétrique des a_n et des b_n est d'ailleurs mis en évidence dans le fait que $\sum \frac{b_n}{n}$ converge toujours pour une série de Fourier, tandis que $\sum \frac{a_n}{n}$ ne converge pas nécessairement. Sous certaines conditions, M. W. H. YOUNG a établi que⁴

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \log \frac{1}{2(1 - \cos x)} dx;$$

¹ Lebesgue 6. — ² F. Riesz 5; Neder 3; Steinhaus 8, Czillag. — ³ Steinhaus 8, 9. — ⁴ W. H. Young 12.

or, l'intégrale du second membre diverge pour certaines fonctions intégrables. De même, si dans la suite a_n, b_n des constantes de Fourier d'une fonction on remplace une infinité de termes par zéro ou si l'on supprime certains termes en déplaçant l'indice de ceux qui suivent, les suites obtenues par ces opérations ne sont plus nécessairement des suites de constantes de Fourier. M. W. H. YOUNG¹ a étudié certains cas où du fait que la suite a_n, b_n est une suite de constantes de Fourier, la suite $\frac{a_n}{\varphi(n)}, \frac{b_n}{\varphi(n)}$ est encore une suite de constantes de Fourier, $\varphi(n)$ étant une fonction positive croissante tendant vers l'infini. Il a étudié aussi le cas où les $\varphi(n)^{-1}$ sont les constantes de Fourier d'une fonction ou les coefficients de la série dérivée d'une série de Fourier.

2. Les résultats les plus importants de la théorie des constantes de Fourier sont contenus dans la formule de PARSEVAL, dans le théorème de RIESZ-FISCHER et dans leurs généralisations. Ces théorèmes se rapportent aux fonctions $f(x)$ dont une puissance p -ième ($p > 1$) est intégrable.

La *formule de Parseval*² énonce que si $f(x)$ est de carré intégrable, c'est-à-dire si $\int_0^{2\pi} f^2 dx$ est finie, la série $\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$ converge et que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2). \quad (22)$$

Une conséquence est que si $g(x)$ est une seconde fonction de carré intégrable ayant la suite α_n, β_n comme suite de constantes de Fourier, la série $\sum (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$ converge et

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} fg dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \alpha_n + b_n \beta_n). \quad (23)$$

Le *théorème de Riesz-Fischer*³ est relatif aux séries de fonctions orthogonales. Dans le cas particulier des séries trigonométriques il énonce que: Etant donnée une suite de constantes réelles

¹ W. H. Young 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16. — ² Lebesgue 5, p. 100; voir aussi Vallée-Poussin 1; Hurwitz 3, 4; Fischer 1. — ³ F. Riesz 1, 3; E. Fischer 2; W. H. Young and G. C. Young; Plancherel.

a_n, b_n assujetties à la seule condition: $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ converge, il existe une et, à une fonction d'intégrale nulle près, une seule fonction $f(x)$ ayant la suite donnée a_n, b_n comme suite de constantes de Fourier. Cette fonction $f(x)$ est de carré intégrable.

Ce théorème montre en particulier que si

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est de carré intégrable, la série conjuguée

$$\sum_1^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

est encore la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable.

3. La généralisation donnée par M. W. H. YOUNG¹ de ces théorèmes a été complétée sur un point par M. HAUSDORFF². Sans avoir le caractère simple du théorème de Riesz-Fischer elle est aussi intéressante. Pour l'exprimer sous une forme concise, notons

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (i = \sqrt{-1}) , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Evidemment

$$f_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) , \quad f_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k) .$$

Notons encore

$$S_p = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} , \quad J_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et supposons

$$p > 1 , \quad q > 1 , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Alors:

I. Si $p \leq q$ et si la suite arbitraire de constantes a_k, b_k est telle

¹ W. H. Young 9, 10; pour d'autres généralisations, en particulier pour l'étude du cas où (23) subsiste en sommant le second membre par une moyenne de Cesàro, voir W. H. Young 7, 8, 15. — ² Hausdorff.

que S_p est fini, les a_k, b_k sont les constantes de Fourier d'une fonction $f(x)$ telle que $|f(x)|^q$ soit intégrable. De plus

$$J_q \leqq S_p.$$

II. Si $p \leqq q$ et si la fonction arbitraire $f(x)$ est telle que $|f(x)|^p$ est intégrable, la série S_q formée à l'aide des constantes de Fourier de f converge et

$$S_q \leqq J_p.$$

Pour $p = q = 2$, on retrouve le théorème de Riesz-Fischer et la formule de Parseval.

4. Si les fonctions $f(x), g(x)$ sont telles que $|f|^p$ et $|g|^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 0, q > 0$) sont intégrables, la formule de Parseval (23) subsiste¹.

5. La formule (23) subsiste encore si f est intégrable et g à variation bornée².

6. Il n'est pas possible de caractériser d'une manière simple la suite des constantes de Fourier d'une fonction continue. On peut se demander, par exemple, s'il existe un exposant $\alpha < 2$ tel que la série $\sum(|a_n|^\alpha + |b_n|^\alpha)$ converge pour toute fonction continue. Mais la réponse est négative³.

Il est intéressant de noter que si la suite des constantes a_n, b_n est telle que $\sum(|a_n|^\alpha + |b_n|^\alpha)$ converge pour un exposant $\alpha > 2$ la série $\sum A_n$ peut ne pas être une série de Fourier, ni même une série de Fourier généralisée, engendrée par une fonction intégrable au sens de Harnack-Lebesgue. C'est, par exemple, le cas des séries⁴

$$\sum n^{-\alpha} \cos(n^2 x), \quad \sum n^{-\alpha} \sin(n^2 x), \quad \alpha \leqq \frac{1}{2}.$$

TITCHMARSH⁴ et PERRON⁶ donnent d'autres exemples, à certains égards plus simples.

7. Des résultats très curieux ont été obtenus par M. CARATHÉODORY⁷ sur les constantes de Fourier des fonctions positives.

Pour que la série de puissances $1 + \sum_1^\infty (a_n + ib_n)z^n$ converge

¹ M. Riesz 8. — ² Young 8. — ³ Carleman. — ⁴ Hardy and Littlewood 1.
— ⁵ Titchmarsh 1. — ⁶ Perron. — ⁷ Caratheodory 1, 2.

pour $|z| < 1$ et ait pour $|z| < 1$ sa partie réelle positive, il faut et il suffit que le point $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ de l'espace à $2n$ dimensions appartienne au corps K_n défini comme le plus petit corps convexe contenant la courbe

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \varphi, & x_2 &= 2 \cos 2\varphi, \dots, & x_n &= 2 \cos n\varphi \\ y_1 &= -2 \sin \varphi, & y_2 &= -2 \sin 2\varphi, \dots, & y_n &= -2 \sin n\varphi \end{aligned}$$

et cela quelque soit n .

M. Tœplitz¹ a réussi à exprimer ce résultat sous forme algébrique. En posant

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & a_1 + ib_1 & \dots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & 2 & & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & a_1 - ib_1 & & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - ib_n & a_{n-1} - ib_{n-1} & & 2 \end{vmatrix}$$

et en désignant par H_n la forme d'Hermite dont D_n est le discriminant, son résultat énonce qu'une fonction continue périodique de période 2π est ≥ 0 lorsque les coefficients a_n, b_n de sa série de Fourier sont tels que les formes $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ ne sont pas négatives.

Ces théorèmes sont en relation étroite avec le théorème de Picard-Landau. Ils appartiennent plutôt au domaine de la théorie des fonctions d'une variable complexe; c'est pourquoi nous n'insisterons pas ici sur les développements et les recherches qu'ils ont provoqués. Notons simplement qu'ils permettent de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de constantes soit la suite des constantes de Fourier d'une fonction mesurable bornée, d'une fonction bornée intégrable au sens de Riemann ou d'une fonction monotone².

§ 8. SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE ET SÉRIE CONJUGUÉE.

1. A toute série trigonométrique

$$A_0 + \sum_1^{\infty} A_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

¹ Toeplitz 1; voir aussi Fischer 3. — ² Caratheodory und Fejér; Caratheodory 3, 4.

correspond une série conjuguée

$$B_0 + \sum_1^{\infty} B_n = \frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

où b_0 est une constante arbitraire. Ces deux séries ne sont autre chose que la partie réelle et la partie imaginaire de la série de puissances

$$F(z) = \frac{a_0 - ib_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) z^n$$

sur la circonference $z = e^{ix}$.

On sait depuis les travaux de PRINGSHEIM¹ et de FEJÉR qu'il existe des séries de puissances $F(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$, de rayon de convergence 1, telles que $f(x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{ix})$ soit continue sur tout le cercle de convergence $|z| = 1$ et pour lesquelles pourtant $\sum c_n e^{inx}$ a une infinité de points de divergence sur chaque arc de la circonference de ce cercle. Il existe aussi des séries de puissances $F(z)$ pour lesquelles $f(x)$ est continue sur $|z| = 1$ et pour lesquelles cependant $\sum c_n e^{inx}$ converge, mais ne converge uniformément sur aucun arc de cette circonference; de même il y en a qui convergent uniformément sur cette circonference, mais non absolument².

Lorsque la série $F(z)$ réalise la transformation conforme du cercle $|z| < 1$ sur une aire simple du plan complexe, auquel cas

$\sum_1^{\infty} n |a_n - ib_n|^2$ converge, l'étude de la convergence de $F(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ conduit à un résultat extrêmement simple

dû à M. FEJÉR³: La série $\sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx}$ converge pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(z)$ a une limite radiale ($z = re^{ix}$, $r \rightarrow 1 - 0$). Et celà, uniformément sur tout ensemble sur lequel la limite est uniforme.

2. Si la série $\sum A_n$ est une série de Fourier, la série conjuguée

¹ Pringsheim, Fejér. — ² Neder 1, 2. — ³ Fejér 9; voir aussi Landau 2.

ΣB_n ne l'est pas nécessairement. Nous avons cependant déjà noté que si la génératrice de ΣA_n est de carré intégrable, ΣB_n est aussi la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable. Plus généralement, M. M. RIESZ¹ a fait voir que si ΣA_n est la série de Fourier d'une fonction f telle que $|f|^p (p > 1)$ est intégrable, ΣB_n est, elle aussi, la série de Fourier d'une fonction conjuguée g telle que $|g|^p$ est intégrable. Ce théorème résulte du fait que la fonction conjuguée

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cot \frac{t-x}{2} dt \quad (24)$$

existe presque partout lorsque $f(x)$ est intégrable, à condition de prendre comme valeur de l'intégrale la valeur principale de Cauchy² et du fait que si $|f|^p (p > 1)$ est intégrable, on a (en supposant pour simplifier que $a_0 = b_0 = 0$)

$$\int_0^{2\pi} |g|^p dx \leq M_p \int_0^{2\pi} |f|^p dx$$

M_p ne dépendant que de p .

Si la fonction $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n$ est continue et satisfait uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre α

$$|f(x+h) - f(x)| < k |h|^\alpha, \quad k > 0, \quad \alpha > 0$$

la série conjuguée ΣB_n est aussi une fonction continue et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α si $\alpha \neq 1$, et d'ordre $1 - \varepsilon$ (ε positif arbitrairement petit) si $\alpha = 1$ ³.

Si la fonction $f(x) \sim \sum_1^\infty A_n$ est à variation bornée, la série conjuguée ΣB_n converge en tout point où la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale (24)

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{t}{2} dt$$

existe, donc presque partout⁴.

¹ M. Riesz 8. — ² Plessner. — ³ Fatou 1; Privaloff 3. — ⁴ Young 4.

W. H. YOUNG a donné des critères généraux de convergence de la série conjuguée, analogues à ceux donnés au § 3¹.

Si la série $\sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx}$ est partout convergente et converge vers zéro dans un intervalle arbitrairement petit, on a $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ². Ce résultat a été généralisé par M. F. RIESZ³.

M. PRIVALOFF⁴ a énoncé quelques théorèmes sur les séries conjuguées: Si f^2 est intégrable et si la série de Fourier $\sum A_n$ de f converge sur un ensemble \mathfrak{M} de mesure positive, la série conjuguée $\sum B_n$ converge presque partout sur \mathfrak{M} . Si une série trigonométrique $\sum A_n$ converge sur un ensemble \mathfrak{M} de mesure positive, pour que la série conjuguée $\sum B_n$ converge presque partout sur \mathfrak{M} il faut et il suffit qu'elle soit sommable par une certaine moyenne de Cesàro ou par le procédé de Riemann presque partout sur \mathfrak{M} .

3. M. FEJÉR⁵ a étudié la relation qui existe entre les singularités de Lebesgue et de Du Bois-Reymond de deux séries trigonométriques conjuguées. Il a montré que si $\sum A_n$ est uniformément convergente dans $(0, 2\pi)$ la différence des sommes partielles $s_n(x)$ et $s_n^{(1)}(x)$ relatives à la série conjuguée $\sum B_n$ converge vers zéro et que par conséquent $\sum B_n$ converge au sens ordinaire du mot en tous les points où elle converge (C, 1) — donc presque partout — et qu'elle converge uniformément sur tout ensemble où elle converge uniformément (C, 1). Il a montré encore que si la série $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et si la fonction $F(z)$ est continue pour $|z| \leq 1$, de la convergence uniforme de $\sum A_n$ résulte celle de $\sum B_n$ et réciproquement. Si $F(z)$ converge pour $|z| < 1$ et est continue pour $|z| \leq 1$, si de plus $\sum A_n$ converge partout, cette série présente nécessairement la singularité de Lebesgue là où $\sum B_n$ présente celle de Du Bois-Reymond.

§ 9. L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE.

1. Un double problème se pose: I. Sachant qu'une série trigonométrique $\sum A_n$ converge vers zéro sur un ensemble E de

¹ W. H. Young 24. — ² Fatou 1. — ³ F. und M. Riesz. — ⁴ Privaloff 1. — ⁵ Fejér 6, 14; voir aussi W. H. Young 4.

points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ et ne supposant rien d'avance sur la convergence de la série dans l'ensemble complémentaire CE , quelles propriétés doit avoir l'ensemble E pour qu'on puisse affirmer que $a_n = b_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). (*problème de Cantor*). II. Sachant qu'une série trigonométrique converge sur un ensemble \mathcal{E} de points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ vers une fonction $f(x)$ et ne supposant rien d'avance sur la convergence de la série dans l'ensemble complémentaire $C\mathcal{E}$, quelles propriétés doivent avoir \mathcal{E} et $f(x)$ pour que la série trigonométrique soit une série de Fourier (*problème de Du Bois-Reymond*). Il est clair que pour pouvoir conclure, il est nécessaire de supposer que l'ensemble E ou \mathcal{E} est mesurable et que son complémentaire est de mesure nulle. Mais cette condition n'est pas suffisante.

2. G. CANTOR¹ a déjà montré que si CE est réductible, $a_n = b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. M. F. BERNSTEIN² a montré ensuite que la même conclusion subsiste pourvu que CE ne contienne pas de sous-ensemble parfait; c'est, en particulier, le cas si CE est dénombrable. M. RAJCHMAN³ et M^{lle} BARY⁴ ont démontré que si CE est un ensemble parfait d'un type spécial, on peut encore affirmer que $a_n = b_n = 0$. Mais ce résultat n'est pas vrai pour tous les ensembles parfaits de mesure nulle; c'est ce que montre M. MENCHOFF⁵ en construisant une série trigonométrique à coefficients non nuls (mais convergeant vers zéro), qui converge vers zéro sur le complémentaire d'un ensemble parfait de mesure nulle, la convergence vers zéro étant de plus uniforme dans tout intervalle fermé contenu dans ce complémentaire.

3. Le problème de Du Bois-Reymond n'a pas reçu lui non plus de solution complète. Un critère général pour décider si une série trigonométrique est une série de Fourier est le suivant⁶: Pour que la série $\sum A_n$ soit une série de Fourier, il faut et il suffit que la série $\sum \int_0^x A_n dx$ converge dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ vers une fonction $F(x)$ qui soit l'intégrale définie d'une fonction

¹ Cantor 2. — ² F. Bernstein 1; voir aussi W. H. Young 1. — ³ Rajchman 2, 3. — ⁴ Bary. — ⁵ Menchoff 1. — ⁶ W. H. Young 6, 16. Pour des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série trigonométrique soit la série de Fourier d'une fonction bornée ou d'une fonction de puissance p -ième ($p > 1$) intégrable, voir W. H. Young 16, Steinhaus 7.

intégrable $f(x)$

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

$f(x)$ est alors la génératrice de la série.

M. LEBESGUE¹ a démontré que si $\sum A_n$ converge sur un ensemble \mathcal{E} , de complémentaire $C\mathcal{E}$ réductible, vers une fonction $f(x)$ bornée sur \mathcal{E} , $\sum A_n$ est une série de Fourier dont $f(x)$ est la génératrice (f étant définie arbitrairement sur $C\mathcal{E}$). MM. W. H. YOUNG² et Ch. J. de la VALLÉE-POUSSIN³ ont fait voir ensuite

que pour pouvoir conclure que $\sum_0^\infty A_n$ est une série de Fourier

il suffit de supposer que $\Phi(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_0^n A_n \right|$ soit intégrable dans $(0, 2\pi)$ et soit finie dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ ou s'il y a des points d'infinitude de cette limite, que leur ensemble soit dénombrable ou ne contienne pas de sous-ensemble parfait.

4. Les problèmes de Cantor et de Du Bois-Reymond se posent pour chaque procédé de sommation des séries trigonométriques. Ils ont été étudiés pour le procédé de Cesàro⁴.

BIBLIOGRAPHIE⁵

- S. BANACH et H. STEINHAUS. — Sur la convergence en moyenne des séries de Fourier [*Bull. Cracovie*, 1918, 87-96].
- N. BARY. — Sur l'unicité du développement trigonométrique [*C. R.* 177, 1195-1198, (1923)].
- F. BERNSTEIN. — Zur Theorie der trigonometrischen Reihe [*Leipz. Ber.* 60, 325-338, (1908)].
- S. BERNSTEIN. — Sur la convergence absolue des séries trigonométriques [*C. R.* 158, 1661-1663, (1914)].
- M. BÖCHER. — 1. Introduction to the theory of Fourier-series [*Annals of Math.* (2) 7, 81-152, (1906)].
2. On Gibb's phenomenon [*J. f. Math.* 144, 41-47, (1914)].
- Fr. BURCKHARDT. — Trigonometrische Reihen und Intégrale [*Encyclop. d. math. Wiss.*, II A 12, Leipzig, Teubner].

¹ Lebesgue 5, p. 122. — ² W. H. Young, 6, 16. — ³ Vallée-Poussin 4, 5. —

⁴ M. Riesz 4; Rajchman; W. H. Young 17.

⁵ Une bibliographie très complète de tous les travaux intéressants de près ou de loin la théorie des séries trigonométriques a été donnée par M. M. Lecat : *Bibliographie des séries trigonométriques*. Avec un appendice sur le calcul des variations [Louvain, chez l'auteur, 1921].

- G. CANTOR. — 1. Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz [*J. f. Math.* 72, 130-142, (1870)].
 2. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen [*Math. Ann.* 5, 123-133, (1872)].
- C. CARATHEODORY. — 1. Ueber den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen die gegebene Werte nicht annehmen [*Math. Ann.* 64, 95-115, (1907)].
 2. Ueber den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen [*Palermo Rend.* 32, 193-217, (1911)].
 3. Ueber die Fourierkonstanten der nach Riemann integrierbaren Funktionen [*Math. Ztschr.* 1, 309-320, (1918)].
 4. Ueber die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen [*Berl. Ber.*, 1920, 559-573].
- C. CARATHEODORY und L. FEJÉR. — Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz [*Palermo Rend.* 32, 218-239, (1911)].
- T. CARLEMAN. — 1. Ueber die Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion [*Acta Math.* 41, 377-384, (1919)].
 2. A theorem concerning Fourier series [*London Math. Soc. Proc.* (2), 21, 483 (1923)].
- H. S. CARSLAW. — A trigonometrical sum and the Gibb's phenomenon in Fourier series [*American J. of Math.* 39, 185-198, (1917)].
- CESÀRO. — 1. Sur la multiplication des séries [*Bull. Sc. math.* 16, 114-120, (1890)].
 2. Sulla determinazione assintotica delle serie di potenze [*Rend. Acad. Napoli* (2), 7, 187-195 (1893)].
- S. CHAPMAN. — 1. On the general theory of summability, with applications to Fourier series and other series [*Quart. J. Math.* 43, 1-52, (1912)].
 2. On non integral orders of summability of series and integrals [*London Math. Soc. Proc.* (2) 9, 369-409, (1911)].
- J. W. CHAUNDY and A. E. JOLLIFFE. — The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series [*London Math. Soc. Proc.* (2) 15, 214-216, (1916)].
- H. CRAMER. — Etudes sur la sommation des séries de Fourier [*Arkiv f. Mat.* 13, n° 20, 1-21 (1918)].
- P. CZILLAG. — Ueber die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung [*Math. es phys. lapok* 27, 301-308, (1918)].
- P. DU BOIS-REYMOND. — Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln [*Abh. d. math. phys. Cl. d. K. Bayer. Akad. d. W.* 12, I-XXIV, 1-103, (1876)].
- A. DENJOY. — 1. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques [*C. R.* 155, 135-136, (1912)].
 2. Sur une classe de fonctions admettant une dérivée seconde généralisée [*Amsterdam Akad. Versl.*, 29, 331-340 (1920)].
 3. Sur une propriété des séries trigonométriques [*Amsterdam Akad. Versl.*, 29, 628-639 (1920)].
- P. FATOU. — 1. Séries trigonométriques et séries de Taylor [*Acta Math.* 30, 335-400, (1906)].

- P. FATOU. — 2. Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables [*C. R.* 142, 765-767, (1906)].
3. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques [*Bull. Soc. math. France* 41, 47-53 (1913)].
- L. FEJÉR. — 1. Untersuchungen über Fouriersche Reihen [*Math. Ann.* 58, 51-69, (1904)].
2. Ueber die Fouriersche Reihe [*Math. Ann.* 64, 273-288, (1907)].
3. Eine stetige Funktion deren Fouriersche Reihe divergiert [*Rend. Palermo* 28, 402-404, (1909)].
4. Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe [*J. f. Math.* 137, 1-5, (1910)].
5. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen (*J. f. Math.* 138, 22-53, (1910)].
6. Sur une paire de séries de Fourier conjuguées [*C. R.* 150, 518-520, (1910)].
7. Sur les sommes partielles de la série de Fourier [*C. R.* 150, 1299-1302, (1910)].
8. Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues [*Ann. Ec. Norm.* (3) 28, 63-103, (1911)].
9. La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple [*C. R.* 156, 46-49, (1913)].
10. Ueber die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourier-Reihe [*J. f. Math.* 142, 165-188, (1913)].
11. Ueber konjugierte trigonometrische Reihen [*J. f. Math.* 144, 48-56, (1914)].
12. Ueber gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen [*Palermo Rend.* 38, 79-97, (1914)].
13. Fourierreihe und Potenzreihe [*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, 28, 64-76 (1917)].
14. Ueber Potenzreihen deren Summe im abgeschlossenen Konvergenz-
kreise überall stetig ist [*Münch. Sitzungsb.*, 33-51. (1917)].
- E. FISCHER. — 1. Zwei neue Beweise für den Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten [*Monatsh. f. Math. u. Phys.* 15, 69-92, (1904)].
2. Sur la convergence en moyenne [*C. R.* 144, 1022-1024, (1907)].
3. Ueber das Caratheodorysche Problem Potenzreihen mit positivem Realteil betreffend [*Rend. Palermo* 32, 240-256, (1911)].
- Ph. FRANK. — Ueber das Vorwiegen des ersten Koeffizienten in der Fourierschen Reihe einer konvexen Funktion [*Math. Ann.* 77, 301-302, (1916)].
- T. H. GRONWALL. — 1. Ueber die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen [*Math. Ann.* 72, 244-261, (1912)].
2. On a theorem of Fejér and an analogon to Gibbs phenomenon [*Amer. Math. Soc. Trans.* 13, 445-468 (1912).]
3. Ueber die Gibbsche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx$ [*Math. Ann.* 72, 228-237, (1912)].
4. On the summability of Fourier series [*Amer. Math. Soc. Bull.* (2) 19, 392; 20, 139-146].
5. On Lebesgues constants in the theory of Fourier series [*Annals of Math.* (2) 15, 125-128, (1914)].

- T. H. GRONWALL. — 6. Sur quelques méthodes de sommation et leur application à la série de Fourier [*C. R.* 158, 1664-1665, (1914)].
7. Ueber einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die Fourierschen Reihen [*J. f. Math.* 147, 16-35, (1917)].
- W. GROSS. — Zur Poissonschen Summierung [*Wien. Akad. Ber.* 124, 1017-1037 (1915)].
- A. HAAR. — 1. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (I. Mitteilung) [*Math. Ann.* 69, 331-371, (1910)].
2. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, II [*Math. Ann.* 71, 38-53, (1911)].
- H. HAHN. — 1. Ueber die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, I und II. [*Denkschriften der Wiener Akademie* 93, 585-692, (1917)].
2. Ueber Fejér's Summierung der Fourierschen Reihen [*Jahresber. d. deutsch. Math. Ver.* 25, 359-366, (1916)].
- G. H. HARDY. — 1. On the summability of Fourier's series [*London Math. Soc. Proc.* (2) 12, 365-372, (1913)].
2. Notes on some points in the integral calculus [*Messenger of Math.* 49, 149-155, (1920)].
- G. H. HARDY and S. CHAPMAN. — A general view of the theory of summable series [*Quart. J. Math.* 42, 181-215, (1911)].
- G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD. — 1. Some problems of diophantine approximation [*Acta Math.* 37, 232-238, (1914)].
2. Sur la convergence des séries de Fourier et des séries de Taylor [*C. R.* 165, 1047-1049, (1917)].
3. Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series [*Math. Ztschr.* 19, 67-96, (1924)].
4. The allied series of a Fourier series [*London Math. Soc. Proc. Records* (2) 22, XLIII].
- G. HARDY and M. RIESZ. — The general theory of Dirichlets series [*Cambridge Tracts of Mathematics*, No. 18 (Cambridge, University Press, 1915)].
- G. HAUSDORFF. — Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen [*Math. Ztschr.* 16, 163-169, (1923)].
- E. W. HOBSON. — 1. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series (Cambridge University Press, 1907).
2. On the convergence of series of orthogonal functions [*London Math. Soc. Proc.* (2) 12, 297-308, (1913)].
- O. HÖLDER. — Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze [*Math. Ann.* 20, 535-549, (1882)].
- A. HURWITZ. — 1. Sur les séries de Fourier [*C. R.* 132, 1473-1475, (1901)].
2. Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier [*Ann. Ec. Norm.* (3) 19, 357-408, (1902)].
3. Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen [*Math. Ann.* 57, 425-446, (1903)].
4. Ueber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen [*Math. Ann.* 59, 553, (1904)].
- D. JACKSON. — Ueber eine trigonometrische Summe [*Palermo Rend.* 32, 257-262, (1911)].
- F. JEROSCH und H. WEYL. — Ueber die Konvergenz von Reihen die nach periodischen Funktionen fortschreiten [*Math. Ann.* 66, 67-80, (1908)].

- K. KNOPP. — 1. Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an der Konvergenzgrenze [*Inauguraldissertation*, Berlin 1907].
 2. Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn J. Schur [*Math. Ann.* 74, 459-461, (1913)].
 3. Zur Theorie der C- und H-Summabilität [*Math. Ztschr.* 19, 97-113, (1924)].
- Erw. KOGBELLIANTZ. — 1. Sur la sommation des séries ultrasphériques par la méthode Σ_0 de M. de la Vallée-Poussin [*Palermo Rend.* 46, 146-164, (1922)].
 2. Analogies entre les séries trigonométriques et les séries sphériques au point de vue de leur sommabilité par les moyennes arithmétiques [*Ann. Ec. Norm.*, 40, 259-323 (1923)].
- A. KOLMOGOROFF. — 1. Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout [*Fund. Math.* 4, 324-328, (1923)].
 2. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier [*Fund. Math.* 5, 96-97, (1924)].
- A. KOLMOGOROFF et G. SELIVERSTOFF. — Sur la convergence des séries de Fourier [*C. R.* 178, 301-303, (1924)].
- Edm. LANDAU. — 1. Die Identität des Cesàroschen und des Hölderschen Grenzwertes [*Leipz. Ber.* 65, 131-138, (1913)].
 2. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie [Berlin, J. Springer, 1916].
- H. LEBESGUE. — 1. Sur les séries trigonométriques [*Ann. Ec. Norm.* (3) 20, 453-485, (1903)].
 2. Recherches sur la convergence des séries de Fourier [*Math. Ann.* 61, 251-280, (1905)].
 3. Sur une condition de convergence des séries de Fourier [*C. R.* 140, 1378-1381, (1905)].
 4. Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier [*C. R.* 141, 875-877, (1905)].
 5. Leçons sur les séries trigonométriques [Paris, Gauthier-Villars, 1906].
 6. Sur les intégrales singulières [*Ann. Toulouse* (3) 1, 25-117, (1909)].
- F. LUKACS. — Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe [*J. f. Math.* 150, 107-112, (1920)].
- N. LUSIN. — 1. Ueber eine Potenzreihe [*Palermo Rend.* 32, 386-390, (1911)].
 2. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques [*C. R.* 155, 580-581, (1912)].
 3. Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen [*Moskau Math. Sammlung* 28, 461-472], en russe.
 4. Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier [*C. R.* 156, 1655-1658, (1913)].
- S. MAZURKIEWICZ. — Ueber nicht summierbare Potenz- und trigonométrische Reihen [*Prace mat. fiz.* 28, 109-118, (1917)].
- D. MENCHOFF. — 1. Sur l'unicité du développement trigonométrique [*C. R.* 163, 433-436, (1916)].
 2. Sur les séries de fonctions orthogonales [*Fund. Math.* 4, 82-105, (1923)].
 3. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales [*C. R.* 178, 298-301 (1924)].
- Ch. N. MOORE. — Sur la relation entre certaines méthodes pour la sommation d'une série divergente [*C. R.* 158, 1774-1775, (1914)].

- P. NALLI. — Sulle serie di Fourier delle funzioni non assolutamente integrabili [*Palermo Rend.* 40, 33-37, (1915)].
- L. NEDER. — 1. Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen einschliesslich der Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. [*Inauguraldissertation*, Göttingen, 1919].
2. Konvergenzdefekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises [*Math. Ztschr.* 6, 262-269, (1920)].
3. Ueber die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung [*Math. Ztschr.* 6, 270-273, (1920)].
4. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen [*Math. Ann.* 84, 117-136, (1921)].
5. Ueber stetige Funktionen mit überall dicht divergierenden Fourierreihe [*Jahresber. d. deutsch. Math. Ver.* 30, 153-156, (1921)].
- B. OTTOLENGHI. — Somma generalizzata e grado di indeterminazione delle serie [*Giorn. d. Mat.* 49, [(8) 2], 233-279, (1911)].
- J. PAL. — Sur les transformations des fonctions qui font converger leurs séries de Fourier [*C. R.* 158, 101-103, (1914)].
- O. PERRON. — Einige elementare Funktionen, welche sich in eine trigonometrische aber nicht Fouriersche Reihe entwickeln lassen [*Math. Ann.* 87, 84-89, (1922)].
- M. PLANCHEREL. — Démonstration du théorème de Riesz-Fischer et du théorème de Weyl sur les suites convergentes en moyenne [*Bull. Sc. math.* (2) 47, 195-204, 384, (1923)].
- A. PLESSNER. — Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. [*Inauguraldissertation*, Giessen, 1922].
- A. PRINGSHEIM. — Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise [*Münch. Sitzungsber.* 30, 37-100, (1900)].
- J. PRIVALOFF. — 1. Sur la convergence des séries trigonométriques conjuguées [*C. R.* 162, 123-126, (1916) et 165, 96-99 (1917)].
2. Sur la dérivation des séries de Fourier [*Palermo Rend.* 41, 202-206, (1916)].
3. Sur la convergence des séries trigonométriques conjuguées [*C. R.* 165, 96-99, (1917)].
4. Sur les fonctions conjuguées [*Bull. Soc. math. France*, 44, 100-103, (1916)].
- A. RAJCHMAN. — 1. Eine Erweiterung des de la Vallée-Poussinschen Eindeutigkeitsatzes der Theorie der trigonometrischen Reihen [*Monatsh. f. Math. u. Phys.* 26, 263-288, (1915)].
2. Sur l'unicité du développement trigonométrique [*Fund. Math.* 3, 287-302, (1922)].
3. Rectification et addition à ma note sur l'unicité du développement trigonométrique [*Fund. Math.* 4, 366-367, (1923)].
- Fr. RIESZ. — 1. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions [*C. R.* 144, 615-619, (1907)].
2. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm [*C. R.* 144, 734-736, (1907)].
3. Ueber orthogonale Funktionensysteme [*Göttinger Nachr.* 1907, 116-122].
4. Sur les séries trigonométriques [*C. R.* 145, 583-586, (1907)].
5. Ueber die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion beschränkter Schwankung [*Math. Ztschr.* 2, 312-315, (1918)].

- M. RIESZ. — 1. Sur les séries de Dirichlet et les séries entières [C. R. 149, 309-312, (1909)].
2. Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques [C. R. 152, 1651-1654, (1911)].
3. Ueber einen Satz des Herrn Fatou [J. f. Math. 440, 89-99, (1911)].
4. Ueber summierbare trigonometrische Reihen [Math. Ann. 71, 54-75, (1911)].
5. Neuer Beweis des Fatouschen Satzes [Göttinger Nachr., 1916, 62-65].
6. Sätze über Potenzreihen [Ark. för Mat. Astron. och Fys. 11, No. 12, (1916)].
7. Sur la sommation des séries de Fourier [Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio scientiarum mathematicarum, 1, 104-113, (1923)].
8. Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier [C. R. 178, 1464-1466, (1924)].
- Fr. und M. RIESZ. — Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion [4^{me} Congrès des mathématiciens scandinaves à Stockholm, 1916, 27-44].
- G. SANNIA. — Sul metodo di sommazione di Cesàro [Torino Atti, 50, 133-148, (1915)].
- S. SIDON. — Bestimmung des Sprunges der Funktion aus der Fourierschen Reihe [Math. és phys. lapok, 27, 309-311, (1918)].
- W. SCHNEE. — Die Identität des Cesàroschen und des Hölderschen Grenzwertes [Math. Ann. 67, 110-125, (1909)].
- J. SCHUR. — Ueber die Aequivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte [Math. Ann. 74, 447-458, (1913)].
- H. STEINHAUS. — 1. Sur une série trigonométrique divergente [C. R. Soc. scientifique de Varsovie, 1912 (5^{me} année), 223-227].
2. Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier [Bull. Cracovie (A) 1913, 113-116].
3. Sur la convergence non-uniforme des séries de Fourier [Bull. Cracovie (A) 1913, 145-160].
4. Sur une fonction remarquable représentée par une série de Fourier [Bull. Cracovie (A) 1913, 291-304].
5. Sur un problème de MM. Lusin et Sierpinski [Bull. Cracovie (A) 1913, 435-450].
6. Résolution d'une question de Fatou [Bull. Cracovie 1918, 69-71].
7. Einige Eigenschaften der trigonometrischen und der Fourierschen Reihen [Krakau Abh. 56, 176-225, (1916), en polonais].
8. Bemerkung zu der Arbeit des Herrn L. Neder: Ueber die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung [Math. Ztschr. 8, 320-322, (1920)].
9. On Fourier's coefficients of bounded functions [London Math. Soc. Proc. (2), 19, 273-275 (1920)].
- G. SZEGÖ. — Ueber die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen [Math. Ztschr. 9, 163-166, (1921)].
- O. SZASZ. — Ueber die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen [Math. Ann. 77, 482-496, (1916)].
- O. TOEPLITZ. — 1. Ueber die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen [Palermo Rend. 32, 191-192, (1911)].
2. Ueber allgemeine lineare Mittelbildungen [Prace mat. fiz. 22, 113-119, (1913)].

TITCHMARSH. — 1. A note on the Riesz-Fischer theorem in the theory of trigonometrical series [*London Math. Soc. Proc. Records* (2) 22, XX].

2. The order of magnitude of the coefficients in a generalised Fourier series [*London Math. Soc. Proc. Records*, March 1923].
3. Principal value Fourier series [*London Math. Soc. Proc. Records*, March 1924].

Ch. J. de la VALLÉE-POUSSIN. — 1. Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson [*Annales de la Soc. scientif.*, Bruxelles, 18 B, 18-34, (1893)].

2. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier [*Bull. Acad. Sc., Belgique*, 1908, 193-254].
3. Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier [*Palermo Rend.* 31, 296-299, (1911)].
4. Sur l'unicité du développement trigonométrique [*C. R.* 155, 951-953, (1912)].
5. Sur l'unicité du développement trigonométrique [*Bull. Acad. Sc., Belgique*, 1912, 702-718].
6. L'approximation des fonctions d'une variable réelle [*Ens. Math.*, 20, 5-29, (1918-19)].
7. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle [Paris, Gauthier-Villars, 1919].

H. WEYL. — Ueber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten [*Math. Ann.* 67, 225-245, (1909)].

W. H. YOUNG. — 1. A note in trigonometrical series [*Messenger of Math.* (2), 38, 44-48, (1909)].

2. On the convergence of a Fourier series and of its allied series [*London Math. Soc. Proc.* (2) 10, 254-272, (1912)].
3. Ueber eine Summationsmethode für die Fourierreihe [*Leipz. Ber.* 63, 369-387, (1911)].
4. Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe [*Münch. Sitzungsber.* 41, 361-371 (1911)].
5. On the nature of the successions formed by the coefficients of a Fourier series [*London Math. Soc. Proc.* (2) 10, 344-362, (1912)].
6. On the conditions that a trigonometrical series should have the Fourier form [*London Math. Soc. Proc.* (2) 9, 421-433, (1911)].
7. On a class of parametric integrals and their application in the theory of Fourier series [*London Roy. Soc. Proc.* (A) 85, 401-414, (1911)].
8. On the integration of Fourier series [*London Math. Soc. Proc.* (2) 9, 449-462, (1911)].
9. Sur la généralisation du théorème de Parseval (*C. R.* 155, 30-33, (1912)].
10. Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée [*C. R.* 155, 472-475, (1912)].
11. Sur les séries de Fourier convergentes presque partout [*C. R.* 155, 1480-1482, 1912)].
12. On certain series of Fourier [*London Math. Soc. Proc.* (2) 11, 357-366, (1913)].
13. On the multiplication of successions of Fourier constants [*London Roy. Soc. Proc.* (A) 87, 331-339, (1913)].
14. On the formation of usually convergent Fourier series [*London Roy. Soc. Proc.* (A) 88, 178-188, (1913)].

- W. H. YOUNG. — 15. On Fourier series and functions of bounded variations [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 88, 561-568, (1913)].
16. On a condition that a trigonometrical series should have a certain form [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 88, 569-574, (1913)].
17. On trigonometrical series whose Cesàro partial summations oscillate finitely [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 89, 150-157, (1914)].
18. On the Fourier series of bounded functions [*London Math. Soc. Proc. (2)* 12, 41-70, (1913)].
19. On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants [*London Math. Soc. Proc. (2)* 12, 71-88, (1913)].
20. On the usual convergence of a class of trigonometrical series [*London Math. Soc. Proc. (2)* 13, 13-28, (1914)].
21. Sur la convergence des séries de Fourier [*C. R.* 163, 187-190, (1916)].
22. On the order of magnitude of the coefficients of a Fourier series [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 93, 42-55, (1917)].
23. On the ordinary convergence of restricted Fourier series [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 93, 276-292, (1917)].
24. Sur les conditions de convergence des séries de Fourier [*C. R.* 163, 975-978, (1916)].
25. On the mode of approach to zero of the coefficients of a Fourier series [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 93, 455-467, (1917)].
26. Les séries trigonométriques et les moyennes de Cesàro [*C. R.* 163, 427-430, (1916)].
27. Sur une nouvelle suite de conditions pour la convergence des séries de Fourier [*C. R.* 164, 82-85 (1917); *C. R.* 164, 267-270, (1917)].
28. Sur la théorie des séries trigonométriques [*C. R.* 165, 460-462, (1917)].
29. Sur les séries de polynômes de Legendre (*C. R.* 165, 696-699, (1917)].
30. On the series of Legendre [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 94, 292-295].
31. On the convergence of the derived series of Fourier series [*London Math. Soc. Proc. (2)* 17, 195-236, (1918)].
32. On restricted Fourier series and the convergence of power series [*London Math. Soc. Proc. (2)* 17, 353-366, (1918)].
33. On the Cesàro convergence of restricted Fourier series [*London Roy. Soc. Proc. (A)* 95, 22-29, (1917)].
34. On non harmonic trigonometrical series [*London Math. Soc. Proc. (2)* 18, 307-335, (1920)].
35. On series of Bessel functions [*London Math. Soc. Proc. (2)*, 18, 163-200 (1920)].
- W. H. YOUNG and GRACE CHISHOLM YOUNG. — On a theorem of Riesz-Fischer [*Quart. J. Math.* 44, 49-88, (1912)].