

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1924-1925)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERESPACE A QUATRE DIMENSIONS  
**Autor:** Hlavaty, V.  
**Kapitel:** VI. — Orthogonalité.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515769>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$k$ -ième projection  $D_k$  appartenant à  $D_i$ , pourvu que l'on fasse correspondre à deux points  $a_i$  et  $b_i$  de  $D_i$  les points  $a_k$  et  $b_k$  sur  $D_k$  d'après V, 3.

Grâce à cette méthode, on peut facilement trouver le point d'intersection d'une droite quelconque  $E$  et de l'espace  $\mathbf{A}$ . On trouve, d'après la méthode que nous venons d'expliquer, une droite  $D$  dans  $\mathbf{A}$  telle que l'on a  $E_1 \equiv D_1$  et  $E_2 \equiv D_2$ . Les droites  $E$  et  $D$  se rencontrent au point cherché (III, 3).

5. — *Plan et espace. Deux espaces.* Pour trouver l'intersection de ces deux figures linéaires, on procède d'après la méthode précédente et on détermine ainsi le nombre nécessaire des points communs à ces deux figures linéaires.

6. — *Constructions auxiliaires* pour résoudre les problèmes non métriques dans  $\mathbf{A}$ . On peut projeter l'espace  $\mathbf{A}$  d'un point  $o$  quelconque (non situé dans  $\mathbf{A}$ ) sur un espace  $\mathbf{A}'$  contenant  $\pi$ . Grâce à cette projection on parvient à la méthode élémentaire de projection sur  $\pi$ . Soit donc  $\mathbf{A} \equiv (a^2 c^1 c^0 c)$  l'espace à projeter,  $\mathbf{A}' \equiv ({}^1 c', {}^2 c' \pi)$  l'espace de projection et  $o$  sur  ${}^i C$  le centre de projection. Chaque point  $a$  de  $\mathbf{A}$  a  $a_i \equiv \overline{a'_i}$ , si  $a'$  désigne le point projeté sur  $\mathbf{A}'$ . Le point  $a'$  se trouve sur  $P \equiv (oa)$ . Mais, parce qu'il est aussi dans  $\mathbf{A}'$ , le point d'intersection des rayons  $(a'_i, {}^i c'_h)$  et  $P_h$  nous représente  $a'_h$ . Pour projeter un point quelconque  $a'$  de  $\mathbf{A}'$  sur  $\mathbf{A}$ , il faut trouver la droite  $A_k$  appartenant à  $a_i$  dans  $\mathbf{A}$  (V, 3). L'intersection de cette droite avec  $P_h \equiv (o_h a'_h)$  nous donne  $a_k$ . On approuve facilement le théorème suivant: *Le plan d'intersection des espaces  $\mathbf{A}$  et  $(o \pi)$  se projette en  $\pi$ .*

Pour résoudre un problème nonmétrique dans  $\mathbf{A}$ , on le projette sur  $\mathbf{A}'$  et on y effectue la résolution. On fait ensuite projeter la figure cherchée sur  $\mathbf{A}$ , d'après la méthode ci-dessus exposée.

## VI. — ORTHOGONALITÉ.

1. — *Notes préliminaires.* Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  les droites impropres de deux plans  $\alpha, \alpha'$ . Pour trouver les angles extrêmes d'inclinaison de ces deux plans, il faut trouver d'abord deux sécantes  $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$  à  $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$  qui soient conjuguées par rapport à la sphère absolue. Ce sont les droites impropres de deux plans complètement orthogonaux  $\beta$  et  $\beta'$ , demiparallèles et demiorthogonaux à

$\alpha$  et  $\alpha'$ . Les droites  $(\alpha\beta)$ ,  $(\alpha'\beta)$  et  $(\alpha\beta')$ ,  $(\alpha'\beta')$  déterminent les angles cherchés. Si ces angles sont de la même valeur, il y a  $\infty^1$  sécantes  $B$ ,  $B'$  et les angles obtenus à l'aide des  $\infty^1$  plans  $\beta$ ,  $\beta'$  sont tous de la même valeur. Or, en faisant  $A \equiv {}^1C$  et  $A' \equiv {}^0C$ , les  $\infty^1$  sécantes mentionnées se réduisent aux rayons projetants, qui rencontrent  ${}^0C$ ,  ${}^1C$  et  ${}^2C$  aux points  ${}^0c$ ,  ${}^0c^*$ ,  ${}^1c$ ,  ${}^1c^*$  et  ${}^2c$ ,  ${}^2c^*$ . Les points  ${}^0c$  et  ${}^0c^*$  étant conjugués par rapport à la sphère absolue, on les projette d'un point quelconque de  $\pi$  par des rayons orthogonaux. On a aussi

$${}^0c \equiv {}^1c_2 \equiv {}^2c_1 \quad \text{et} \quad {}^0c^* \equiv {}^1c_2^* \equiv {}^2c_1^* .$$

2. — *Espace orthogonal à une droite.* Tous les problèmes de l'orthogonalité peuvent être réduits au problème de détermination de l'espace (de la droite) orthogonal (—e) à la droite (à l'espace). L'essentiel dans ce problème est de déterminer les éléments impropres de la figure cherchée. Or, pour trouver l'espace **A** orthogonal à la droite A, il suffit de considérer une droite  $A' // A$  par un point  $a'$  quelconque de  $\pi$ . Désignons par **A'** l'espace  $A' \equiv (\pi A')$ . **A'** rencontre  ${}^1C$  et  ${}^2C$  aux points  ${}^1c'$  et  ${}^2c'$ ,  ${}^1c'_2 \equiv {}^2c'_1$  (V, 2, A).

Le plan impropre de **A** est fixé par trois points. Nous en trouvons le point d'intersection  $(A^2C) \equiv {}^2c$ .  ${}^2c$  est conjugué à  ${}^2c'$  par rapport à la sphère absolue. C'est le point impropre des droites orthogonales à **A'** (et pour cette raison aussi à A'). D'après VI, 1, les points  ${}^2c_1$  et  ${}^2c'_1$  sont de même conjugués par rapport à la sphère absolue. On a donc  $({}^2c'_1 a'_1) \perp ({}^2c_1 a'_1)$ .

Deux autres points impropres de l'espace cherché sont situés sur la droite impropre du plan  $\alpha'$ , orthogonal à A' dans **A'**. On les trouve par la méthode élémentaire de projection dans **A'**. L'un d'eux,  ${}^0c$ , est le point impropre  ${}^0c$  de la trace T' du plan  $\alpha'$ . En résumé:

*Le plan impropre de l'espace **A**  $\perp$  A est fixé par trois points  ${}^0c$ ,  ${}^2c$ ,  $p$ .  ${}^0c$  est le point impropre de la trace  $T_{12} \perp A_2$  de l'espace cherché, la projection  ${}^2c_1$  est conjuguée par rapport à la sphère absolue à  ${}^2c'_1$  ( ${}^2c'_1 a'_1$ )  $\perp$  ( ${}^2c_1 a'_1$ ), et  $p$  est le point quelconque impropre du plan  $\alpha' \perp A'$  dans **A'**.*

3. — *Droite orthogonale à l'espace.* (Nous conservons la nomenclature de l'article précédent.) Il ne s'agit que de la position de

la droite  $A$ . On obtient d'abord le point  ${}^2c'$  par la construction  $({}^2c_1 a'_1) \perp ({}^2c'_1 a'_1)$ . On trouve ensuite le plan commun  $\alpha'$  de deux espaces  $A$  et  $A' \equiv ({}^2c'\pi)$ . Une droite  $A' \perp \alpha'$  dans  $A'$  nous présente le résultat cherché. On peut faciliter la construction, en se servant du fait que l'on a  $A'_2 \perp T_{12}$ .

4. — *Problèmes spéciaux*. Pour trouver le plan complètement orthogonal à un plan donné, il suffit de trouver deux espaces, orthogonaux à deux droites du plan donné. L'intersection de ces deux espaces nous donne le résultat cherché. Comme celui-ci, tous les autres problèmes spéciaux touchant l'orthogonalité de deux figures linéaires peuvent être résolus à l'aide de VI, 2, 3. Il s'en suit que les problèmes métriques trouvent leurs solutions à l'aide de la méthode ci-dessus exposée. Nous ne jugeons pas nécessaire de nous étendre sur le développement des solutions spéciales. Le lecteur intéressé les trouve en abondance dans mon article tchèque, publié en 1922 dans le « Časopis pro pěstování matematiky a fysiky », T. LII<sup>1</sup>.

Remarquons encore que la méthode exposée est un cas spécial de la méthode de projection de l'hyperespace linéaire à cinq dimensions sur un plan à l'aide *de trois projections seulement*, que j'ai exposée dans le même périodique tchèque en 1923, T. LIII<sup>2</sup>.

Prague, février 1925.

---

<sup>1</sup> « Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném ».

<sup>2</sup> « Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného ».