**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 24 (1924-1925)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERESPACE A QUATRE DIMENSIONS

**Autor:** Hlavaty, V.

**Kapitel:** V. — Espace.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-515769

## V. — Espace.

1. — *Triangle impropre.* On a trois points remarquables $^{0}\underline{c}$, $^{1}\underline{c}$, $^{2}\underline{c}$, dans chaque espace **A**. Ce sont les points d'intersections $(^{0}\underline{C}\mathbf{A})$, $(^{1}\underline{C}\mathbf{A})$, $(^{2}\underline{C}\mathbf{A})$. Ils déterminent le plan impropre de l'espace **A**. $^{0}\underline{c}$ est le point impropre de la trace T de **A** sur $\pi$. On l'obtient, en joignant deux traces $x$, $x'$ de deux plans $\alpha$, $\alpha'$ de **A** (IV, 1). Le point $^{i}\underline{c}$ n'a pas sa $i$-ième projection (II, 2). Pour le trouver, on cherche la droite d'intersection D des plans $(^{i}\underline{c}\mathrm{T})$ et $\alpha$. Sa $i$-ième projection $\mathrm{D}_i$ est sur T, parce que le plan $(^{i}\underline{c}\mathrm{T})$ passe par $^{i}\underline{c}$ (IV, 2, A). On trouve d'après IV, 4, A sa $k$-ième projection dans $\alpha_k$. Parce que la droite cherchée rencontre $\pi$, les rayons de rappels de ses points passent par $^{i}\underline{c}_k$ (III, 2, B). C'est la $k$-ième projection du centre de projection $^{i}\underline{c}$ pour la droite D. Nous appelons $^{0}\underline{c}\,^{1}\underline{c}\,^{2}\underline{c}$ *triangle impropre* de l'espace **A**.

2. — *Positions exceptionnelles.* — A. **A** contient $\pi$. Alors les projections $^{i}\underline{c}_k$ et $^{k}\underline{c}_i$ se confondent. C'est donc la méthode élémentaire de projection avec les centres à l'infini.

B. **A** contient $^{i}\underline{C}$. Dans ce cas, sa trace $\mathrm{T}_i$ est sa $i$-ième projection. Spécialement pour $i = 2$:

*La deuxième projection de l'espace demiorthogonal à $\pi$ est une droite.*

C. **A** contient $^{1}\underline{C}$ et $^{2}\underline{C}$. Il est donc l'unique espace impropre de l'hyperespace.

3. — *Point et espace.* Soit donné un point quelconque $p_i$ dans $\pi$. Le plan $(^{i}\underline{C}p)$ et l'espace donné **A** se rencontrent suivant une droite P qui passe par $^{i}\underline{c}$. $p_i$ est donc la $i$-ième projection d'une droite P de **A**, passant par $^{i}\underline{c}$. Or, il nous faut encore un de ses points pour la connaître. Le plus facile est de déterminer le point d'intersection $p'$ de P et du plan $(^{k}\underline{c}\mathrm{T})$, parce que sa $k$-ième projection se trouve sur $\mathrm{T}_k$. Le point d'intersection de $\mathrm{T}_{12}$ et de $(^{k}\underline{c}_i p_i)$ nous livre $p'_k$. $\mathrm{P}_k \equiv (^{i}\underline{c}_k p'_k)$.

Toutes les droites $\mathrm{P}_k$ sont parallèles.

4. — *Droite et espace.* Trouvons la $k$-ième projection $\mathrm{D}_k$ d'une droite D de **A**, si $\mathrm{D}_i$ est donnée. Il suffit de répéter deux fois la construction de V, 3, pour deux points $a$ et $b$, sur D. Il s'en suit aussitôt que chaque droite de $\pi$ peut être considérée comme la

$k$-ième projection $D_k$ appartenant à $D_i$, pourvu que l'on fasse correspondre à deux points $a_i$ et $b_i$ de $D_i$ les points $a_k$ et $b_k$ sur $D_k$ d'après V, 3.

Grâce à cette méthode, on peut facilement trouver le point d'intersection d'une droite quelconque E et de l'espace **A**. On trouve, d'après la méthode que nous venons d'expliquer, une droite D dans **A** telle que l'on a $E_1 \equiv D_1$ et $E_2 \equiv D_2$. Les droites E et D se rencontrent au point cherché (III, 3).

5. — *Plan et espace. Deux espaces.* Pour trouver l'intersection de ces deux figures linéaires, on procède d'après la méthode précédente et on détermine ainsi le nombre nécessaire des points communs à ces deux figures linéaires.

6. — *Constructions auxiliaires* pour résoudre les problèmes non métriques dans **A**. On peut projeter l'espace **A** d'un point $o$ quelconque (non situé dans **A**) sur un espace **A**$'$ contenant $\pi$. Grâce à cette projection on parvient à la méthode élémentaire de projection sur $\pi$. Soit donc $\mathbf{A} \equiv (a\,{}^2\underline{c}\,{}^1\underline{c}\,{}^0\underline{c})$ l'espace à projeter, $\mathbf{A}' \equiv ({}^1\underline{c}', {}^2\underline{c}'\pi)$ l'espace de projection et $\underline{o}$ sur ${}^i\underline{C}$ le centre de projection. Chaque point $a$ de **A** a $a_i \equiv a'_i$, si $a'$ désigne le point projeté sur **A**$'$. Le point $a'$ se trouve sur $P \equiv (\underline{o}a)$. Mais, parce qu'il est aussi dans **A**$'$, le point d'intersection des rayons $(a'_i\,{}^i\underline{c}'_k)$ et $P_k$ nous représente $a'_k$. Pour projeter un point quelconque $a'$ de **A**$'$ sur **A**, il faut trouver la droite $A_k$ appartenant à $a_i$ dans **A** (V, 3). L'intersection de cette droite avec $P_k \equiv (\underline{o}_k a'_k)$ nous donne $a_k$. On approuve facilement le théorème suivant : *Le plan d'intersection des espaces* **A** *et* $(\underline{o}\pi)$ *se projette en* $\pi$.

Pour résoudre un problème nonmétrique dans **A**, on le projette sur **A**$'$ et on y effectue la résolution. On fait ensuite projeter la figure cherchée sur **A**, d'après la méthode ci-dessus exposée.

## VI. — Orthogonalité.

1. — *Notes préliminaires.* Soient $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ les droites impropres de deux plans $\alpha$, $\alpha'$. Pour trouver les angles extrêmes d'inclinaison de ces deux plans, il faut trouver d'abord deux sécantes $\underline{B}$, $\underline{B}'$ à $\underline{A}$, $\underline{A}'$ qui soient conjuguées par rapport à la sphère absolue. Ce sont les droites impropres de deux plans complètement orthogonaux $\beta$ et $\beta'$, demiparallèles et demiorthogonaux à